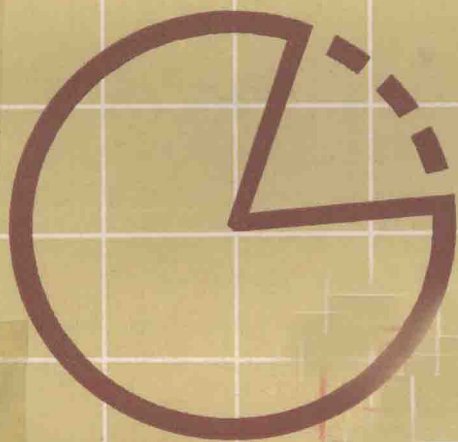




上 册



# 算术基础理论

天津教育学院

## 前 言

算术基础理论是对算术进行理论上研究的一门专业课。学习该课程，对提高小学教师的知识水平和教学能力具有重要意义。

本书编写原则：在篇章体系上，不破坏小学传统算术的结构；内容上，是小学数学大纲所规定的教材的提 高 和 扩 充；在研究方法上，侧重于理论上的阐述。这样做有利于提高读者的理论水平，便于直接应用于教学实践。本书论述细致，条目清楚，适合小学教师进修和自学。书中注有“※”号的，可在教学中酌情选用。

本书由天津市河西区教师进修学校方自西、霍力申二同志执笔写成，并多方征求意见，参考有关书目，几经修改。因水平有限，不足之处，恳望读者提出。

天津教育学院

小学干部教师培训指导部

# 目 录

## 第一章 集合

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第一节 基本概念.....         | 1  |
| § 1. 集合.....          | 1  |
| § 2. 集合的三种表示法.....    | 3  |
| § 3. 有限集合和无限集合.....   | 4  |
| § 4. 空集合.....         | 5  |
| § 5. 有序集合.....        | 6  |
| 第二节 集合的包含与相等.....     | 11 |
| § 1. 子集.....          | 11 |
| § 2. 集合相等.....        | 11 |
| 第三节 集合的运算.....        | 15 |
| § 1. 并集.....          | 15 |
| § 2. 交集.....          | 17 |
| § 3. 差集.....          | 20 |
| § 4. 补集和全集.....       | 22 |
| 第四节 对应.....           | 26 |
| § 1. A到B内(或上)的对应..... | 27 |

|                |    |
|----------------|----|
| § 2. 一一对应..... | 28 |
| § 3. 等价集合..... | 29 |

## 第二章 整 数

|                      |    |
|----------------------|----|
| 第一节 整数的性质.....       | 34 |
| § 1. 概念和定义.....      | 34 |
| § 2. 公理和定理.....      | 35 |
| § 3. 自然数.....        | 35 |
| § 4. 自然数列.....       | 36 |
| § 5. 自然数列的性质.....    | 36 |
| § 6. 零.....          | 37 |
| § 7. 整数.....         | 38 |
| § 8. 相等和不等.....      | 39 |
| § 9. 整数的性质.....      | 40 |
| § 10. 计数过程和计数公理..... | 40 |
| § 11. 序数和基数.....     | 41 |

|                        |    |
|------------------------|----|
| 第二节 十进制制.....          | 43 |
| § 1. 计数制度.....         | 43 |
| § 2. 十进制的计数方法.....     | 43 |
| § 3. 十进制记数方法的一般概念..... | 45 |
| § 4. 一位数和多位数.....      | 46 |
| § 5. 数的读法和写法.....      | 47 |
| § 6. 用单位计数.....        | 49 |
| § 7. 分节的概念.....        | 49 |

|                          |    |
|--------------------------|----|
| § 8. 自然数的大小比较.....       | 50 |
| <b>第三节 非十进位制</b> .....   | 52 |
| § 1. 制度数的一般概念.....       | 52 |
| § 2. 用位率计数.....          | 53 |
| § 3. 数的组成与分解.....        | 54 |
| § 4. 十进制数与非十进制的数的转化..... | 56 |
| § 5. 两个非十进制的数的转化.....    | 58 |
| § 6. 非十进制数的运算.....       | 59 |
| § 7. 十二进制与六十进制.....      | 62 |
| 附 记数制度发展史简介.....         | 64 |

### 第三章 整数的运算

|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>第一节 加法</b> .....      | 77 |
| § 1. 两个自然数的加法.....       | 77 |
| § 2. 加法的计算形式.....        | 77 |
| § 3. 加法运算的可能性与和的唯一性..... | 78 |
| § 4. 零做加数.....           | 79 |
| § 5. 加法定义的推论.....        | 79 |
| § 6. 括号的应用.....          | 79 |
| § 7. 几个数的和.....          | 80 |
| § 8. 加法运算定律.....         | 80 |
| § 9. 加法运算定律的推广.....      | 82 |
| § 10. 等效语言.....          | 84 |
| § 11. 加法运算定律的推论.....     | 84 |

|                  |    |
|------------------|----|
| § 12. 加法应用题..... | 85 |
| § 13. 加法法则.....  | 87 |

## 第二节 减法..... 89

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| § 1. 减法定义.....           | 89  |
| § 2. 减法运算的可能性与差的唯一性..... | 90  |
| § 3. 减法中已知数与得数之间的关系..... | 91  |
| § 4. 减法的性质.....          | 92  |
| § 5. 加减式的性质.....         | 92  |
| § 6. 减法应用题.....          | 94  |
| § 7. 减法法则.....           | 95  |
| § 8. 和差的变化.....          | 98  |
| § 9. 简算.....             | 100 |

## 第三节 乘法..... 105

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| § 1. 乘法定义.....           | 105 |
| § 2. 乘法运算的可能性与积的唯一性..... | 106 |
| § 3. 乘法的补充定义.....        | 107 |
| § 4. 积是零的定理.....         | 107 |
| § 5. 几个因数求积.....         | 108 |
| § 6. 乘法运算定律.....         | 109 |
| § 7. 由乘法运算定律所得出的推论.....  | 113 |
| § 8. 乘法应用题.....          | 115 |
| § 9. 乘法法则.....           | 116 |
| § 10. 积的位数定理.....        | 118 |
| § 11. 简算.....            | 119 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| <b>第四节 除法</b> .....      | 125 |
| § 1. 除法定义.....           | 125 |
| § 2. 除法中已知数与得数之间的关系..... | 126 |
| § 3. 除法的特殊情况.....        | 126 |
| § 4. 除数不能为零.....         | 127 |
| § 5. 除法运算的可能性与商的唯一性..... | 127 |
| § 6. 有余数的除法.....         | 128 |
| § 7. 除法的性质.....          | 130 |
| § 8. 乘除式的性质.....         | 130 |
| § 9. 积除以积的性质.....        | 134 |
| § 10. 商的大小比较.....        | 136 |
| § 11. 除法应用题.....         | 137 |
| § 12. 除法法则.....          | 138 |
| § 13. 商的位数定理.....        | 140 |
| § 14. 积商的变化.....         | 140 |
| § 15. 简算.....            | 143 |
| <b>第五节 四则混合运算</b> .....  | 149 |
| § 1. 算术运算.....           | 149 |
| § 2. 四则混合运算.....         | 149 |

## 第四章 整数四则应用题

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| <b>第一节 一般概念和一般解题思路</b> ..... | 153 |
| § 1. 应用题.....                | 153 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| § 2. 解答应用题的一般步骤.....      | 153 |
| § 3. 一般解题思路——综合法和分析法..... | 154 |
| § 4. 解答应用题的步骤举例.....      | 155 |
| § 5. 利用综合法分析法分析应用题举例..... | 159 |

## 第二节 特殊的解题思路..... 162

|               |     |
|---------------|-----|
| § 1. 归一法..... | 162 |
| § 2. 归总法..... | 163 |
| § 3. 比较法..... | 163 |
| § 4. 逆推法..... | 165 |
| § 5. 假定法..... | 166 |

# 第五章 数的整除性

## 第一节 数的整除性定理..... 17

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| § 1. 整除、约数、倍数的概念.....    | 172 |
| § 2. 整除的传递性.....         | 173 |
| § 3. 和的整除性定理.....        | 174 |
| § 4. 差的整除性定理.....        | 175 |
| § 5. 积的整除性定理.....        | 175 |
| § 6. 有余数除法的整除性定理.....    | 177 |
| § 7. 判定被除数为零的定理.....     | 178 |
| § 8. 和、差被一个数整除的充要条件..... | 179 |

## 第二节 数的整除的特征（判别法）..... 182

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| § 1. 能被 2 和 5 整除的数的特征..... | 182 |
|----------------------------|-----|

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 2. 能被 4 或 25, 8 或 125 整除的数的特征 | 184 |
| § 3. 能被 3 和 9 整除的数的特征           | 187 |
| § 4. 能被 7、11、13 整除的数的特征         | 189 |
| § 5. 被任意数整除的数的特征                | 196 |

### 第三节 最大公约数的意义和性质 201

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 1. 最大公约数        | 201 |
| § 2. 互质数          | 202 |
| § 3. 辗转相除法        | 202 |
| § 4. 最大公约数的性质定理   | 206 |
| § 5. 求多于两个数的最大公约数 | 209 |

### 第四节 最小公倍数的意义和性质 210

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 1. 最小公倍数         | 210 |
| § 2. 准备定理          | 211 |
| § 3. 最小公倍数定理       | 212 |
| § 4. 最小公倍数的性质定理    | 215 |
| § 5. 求两个以上的数的最小公倍数 | 219 |

### 第五节 质数与合数 221

|                   |     |
|-------------------|-----|
| § 1. 质数与合数        | 221 |
| § 2. 质约数与质因数      | 221 |
| § 3. 质约数定理        | 222 |
| § 4. 质数表          | 223 |
| § 5. 质数的判定        | 225 |
| § 6. 关于被质数整除的几个定理 | 227 |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 7. 关于被两个互质数的积整除定理·····        | 229 |
| § 8. 分解质因数·····                 | 231 |
| § 9. 分解质因数的方法·····              | 234 |
| ※ § 10. 质数的分布·····              | 235 |
| § 11. 质数列是无限的·····              | 235 |
| ※ § 12. 寻求表示质数的公式·····          | 237 |
| ※ § 13. 约数的个数·····              | 239 |
| ※ § 14. 求 $N$ 的一切约数的和·····      | 241 |
| ※ § 15. 哥德巴赫 (Goldbach) 猜想····· | 243 |

## 第六节 最大公约数与最小公倍数的求法和应用··· 248

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| § 1. 整除的充要条件·····                   | 248 |
| § 2. 利用分解质因数法求两个数的最大公约数·····        | 250 |
| § 3. 利用分解质因数法求两个以上的数的最大<br>公约数····· | 251 |
| § 4. 利用分解质因数法求两个数的最小公倍数·····        | 251 |
| ※ § 5. 利用辗转相减法求最大公约数·····           | 253 |
| ※ § 6. 利用综合的方法求几个数的最大公约数·····       | 256 |
| § 7. 应用题·····                       | 257 |

## ※第七节 高斯公式和弗尔玛小定理····· 263

|                      |     |
|----------------------|-----|
| § 1. 互质数与对质数的概念····· | 263 |
| § 2. 互质数的几个定理·····   | 264 |
| § 3. 高斯公式·····       | 265 |
| § 4. 欧拉定理·····       | 267 |
| § 5. 弗尔玛小定理·····     | 268 |

## 第六章 一次同余式

|               |     |
|---------------|-----|
| 第一节 同余的概念和性质  | 270 |
| § 1. 同余的概念    | 270 |
| § 2. 同余的性质    | 272 |
| § 3. 弃九法验算    | 275 |
| 第二节 解一次同余式    | 281 |
| § 1. 同余式的概念   | 281 |
| § 2. 一次同余式的解  | 282 |
| § 3. 求解的定理    | 283 |
| § 4. 解一次同余式举例 | 284 |
| § 5. 孙子定理     | 286 |

## 第七章 量

|             |     |
|-------------|-----|
| 第一节 量的理论    | 291 |
| § 1. 量的概念   | 291 |
| § 2. 同类量    | 291 |
| § 3. 量的比较公理 | 292 |
| § 4. 可加量    | 293 |
| § 5. 连续量    | 294 |
| § 6. 量的分割   | 295 |
| § 7. 零量     | 295 |
| § 8. 量的加法   | 296 |

|              |     |
|--------------|-----|
| § 9. 量的减法    | 297 |
| § 10. 量与数的乘法 | 297 |
| § 11. 量的除法   | 300 |

## 第二节 量的度量 302

|           |     |
|-----------|-----|
| § 1. 量与数  | 302 |
| § 2. 公度   | 303 |
| § 3. 量的度量 | 304 |

## 第三节 度量单位 306

|                |     |
|----------------|-----|
| § 1. 度量单位的选定   | 306 |
| § 2. 公制度量单位    | 307 |
| § 3. 市制度量单位与换算 | 313 |
| § 4. 时间单位      | 315 |
| § 5. 合并度量单位的使用 | 316 |

## 第四节 名数运算 317

|                |     |
|----------------|-----|
| § 1. 名数        | 317 |
| § 2. 名数的化法和聚法  | 318 |
| § 3. 名数的运算     | 320 |
| § 4. 让度量单位参与运算 | 323 |

## 第五节 应用题 327

# 第八章 分数

## 第一节 分数的概念 332

|               |     |
|---------------|-----|
| § 1. 分数的引入    | 332 |
| § 2. 分数的定义    | 333 |
| § 3. 分数与除法    | 334 |
| § 4. 分数与比     | 336 |
| § 5. 相等和不等    | 337 |
| § 6. 分数的性质    | 339 |
| § 7. 分数的基本性质  | 340 |
| § 8. 零分数      | 341 |
| § 9. 整数与分数    | 341 |
| § 10. 真分数与假分数 | 342 |
| § 11. 分数的约简   | 343 |
| § 12. 分数的通分   | 344 |
| § 13. 分数的稠密性  | 346 |

## 第二节 分数的运算 352

|                     |     |
|---------------------|-----|
| § 1. 分数加法           | 352 |
| § 2. 带分数            | 354 |
| § 3. 多个分数相加         | 356 |
| § 4. 分数加法的运算定律和性质   | 356 |
| § 5. 分数减法           | 358 |
| § 6. 加减式的性质         | 359 |
| § 7. 分数乘法           | 361 |
| § 8. 分数乘以整数和乘以分数的含义 | 362 |
| § 9. 积的运算性质         | 365 |
| § 10. 分数除法          | 366 |
| § 11. 倒数的概念         | 368 |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| § 12. 乘除式的性质 ..... | 370 |
| § 13. 将分数看成量 ..... | 371 |
| § 14. 繁分数 .....    | 372 |

### 第三节 分数应用题 .....

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| § 1. 分数应用题的分类 .....            | 379 |
| § 2. 求一个数是另一个数的几分之几 .....      | 379 |
| § 3. 求一个数的几分之几是多少 .....        | 381 |
| § 4. 已知一个数的几分之几是多少, 求这个数 ..... | 382 |
| § 5. 工程问题 .....                | 385 |

## 第九章 小数

### 第一节 小数的概念 .....

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| § 1. 十进分数和小数 .....    | 391 |
| § 2. 小数大小的比较 .....    | 395 |
| § 3. 小数的性质 .....      | 396 |
| § 4. 科学记数法 .....      | 398 |
| § 5. 小数与十进制名数 .....   | 399 |
| § 6. 小数与百分数和千分数 ..... | 400 |

### 第二节 小数的运算 .....

|                  |     |
|------------------|-----|
| § 1. 小数加减法 ..... | 404 |
| § 2. 小数乘法 .....  | 405 |

|                     |     |
|---------------------|-----|
| § 3. 小数除法           | 407 |
| <b>第三节 小数与普通分数</b>  | 412 |
| § 1. 普通分数化成小数       | 412 |
| § 2. 分数化成有限小数的充要条件  | 414 |
| § 3. 分数化成循环小数       | 416 |
| § 4. 普通分数化纯循环小数的条件  | 419 |
| § 5. 普通分数化成混循环小数的条件 | 423 |
| § 6. 循环小数化分数        | 424 |
| § 7. 循环小数概念的推广      | 426 |
| 附: 分数小数发展史简介        | 430 |

## 第十章 近似计算

|                    |     |
|--------------------|-----|
| <b>第一节 基本概念</b>    | 437 |
| § 1. 准确数与近似数       | 437 |
| § 2. 近似数的截取方法      | 438 |
| § 3. 绝对误差和绝对误差界    | 440 |
| § 4. 相对误差和相对误差界    | 443 |
| § 5. 有效数字          | 444 |
| § 6. 有效数字与相对误差界的关系 | 446 |
| <b>第二节 近似数的计算</b>  | 452 |
| § 1. 近似数的加法和减法     | 452 |
| § 2. 近似数的乘法和除法     | 454 |
| § 3. 近似数的混合运算      | 455 |

|                      |     |
|----------------------|-----|
| § 4. 预定结果精确度的计算..... | 457 |
|----------------------|-----|

## 第十一章 比和比例

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 第一节 比.....             | 461 |
| § 1. 比的意义.....         | 461 |
| § 2. 比、除法和分数的关系.....   | 463 |
| § 3. 比的性质.....         | 464 |
| § 4. 反比.....           | 466 |
| § 5. 比的应用.....         | 467 |
| 第二节 比例.....            | 474 |
| § 1. 比例.....           | 474 |
| § 2. 比例的基本性质.....      | 474 |
| § 3. 比例基本性质的应用.....    | 475 |
| § 4. 诱导比例.....         | 477 |
| § 5. 利用诱导比例求未知项例题..... | 482 |
| 第三节 正比例函数和反比例函数.....   | 485 |
| § 1. 正比例.....          | 485 |
| § 2. 正比例的特征.....       | 486 |
| § 3. 反比例.....          | 490 |
| 第四节 解比例应用题.....        | 497 |

# 第一章 集 合

“集合”概念是现代数学最基本的概念之一。从十九世纪末叶德国数学家康妥 (Cantor) 发表“集合论”的文献始, “集合论”作为一门数学分支就迅速地发展起来了, 并使许多数学知识都建立在集合的基础之上。小学生尽早地接触“集合”以及“对应”等基本数学观点, 有利于扩大知识面, 加深对传统算术教材的理解; 并为今后学习近代数学打下良好基础。

## 第一节 基本概念

### § 1 集合

**集合:** 具有某种共同特征的事物所组成的整体。(简称集)

**例 1** 某教室里全体学生的集合。

这个集合不包括教室外的学生, 当然也不包括教室内的老师。这个集合仅指“教室内”的学生。

**元素:** 构成集合的每个事物叫集合的元素。(简称元)

**例 2** 小学课本内简单应用题类型的集合。

元素是在小学课本中所出现的每一种简单的应用题类型, 而不是简单应用题的本身。

集合的名称一般用大写字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、…… $X$ 、 $Y$  等表示, 把组成集合的元素写在大括号“ $\{ \}$ ”内。

集合中的元素一般用小写字母  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、…… $x$ 、 $y$  等表