高 等 数 学

5—6 章

（試 用 教 材）

成都电訊工程学院

一九七三年三月

目　　　录

第五章　微分方程

第六章　級　数

毛主席语录

不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。

一切事物中包含的矛盾方面的相互依赖和相互斗争，决定一切事物的生命，推动一切事物的发展。

第五章　微分方程

毛主席教导我们说："**就人类認識运动的秩序説来，总是由認識个別的和特殊的事物，逐步地扩大到認識一般的事物。**"在生产实际中提出来的问题，应用微积分这个数学工具，已经能够解决不少问题。但是尚有比较复杂的一类问题，例如线性电路的过渡过程和机械振动的规律等问题，它们涉及到的不只是量的本身及其函数，而且涉及到某些函数的变化率（导数），出现了把自变量和它的函数及其变化率或微分连接在一起的关系式，即微分方程。

在这一章里，我们将看到微分方程是如何建立起来的，又是如何得到解决的。

第一节　什么是微分方程

我们本着由浅入深的认识规律，先介绍一个特别简单的例子进行分析，看看微分方程是怎样建立起来的。

设一容器內有 100 升溶液，其中含有 10 公斤淨盐。若以每分钟 3 升的均匀速度把淨水注入容器內使溶液冲淡，同时以每分钟 2 升的均匀速度使溶液流出。容器內有一个搅拌器在任何时刻都搅拌着，因而可以认为溶液的浓度在任何时刻都是均匀的。问过程开始一点钟后，溶液內还有多少淨盐？

解：设任一瞬时 t（即第 t 分钟）容器內含有盐 x 公斤。容易看出，这个问题中我们所要求的是变量 x 与变量 t 的关系 $x(t)$。如果得到了这个关系式，再用 $t=60$ 代入函数 $x(t)$，则过程开始一点钟后溶液內的淨盐含量是可以得到的。

根据问题所述，我们无法写出一个代数方程来表达它们之间的关系式，对我们来说这是一个新的课题。即是我们面临着一个实际需要求出某些未知函数和数学工具不足的矛盾。

为了解决这个矛盾，我们只有根据前四章讲过的微分法，以匀代不匀，我们是可以写出含有未知函数的微分方程的。

写出微分方程的步骤是：首先设自变量从某一时刻 t 有改变量 dt（或Δt），然后写出变量 x 因之取得的改变量 Δx 的线性主部 dx，我们就可以得到 dx 与 dt 的关系式。

由于在 t 分钟内液体增加了 3 t 升而减少了 2 t 升，故在 t 那一瞬时的溶液量是100＋ t 升，而含盐浓度是$\frac{x}{100+t}$。

当 t 取得改变量 dt，我们来分析 x 取得的改变量 Δx 是怎样的。

在无限小的一段时间（t，$t+\Delta t$）内，溶液的浓度是变的。如果假定在这一无限小的一段时间内，溶液保持在时刻 t 的浓度不变，以匀代不匀，则可写出 Δx 的线性主部 dx。又因为每分钟要从容器内流出 2 升的溶液，而每升溶液的盐量是$\frac{x}{100+t}$，因而一分钟减少的盐量是$\frac{2x}{100+t}$。同时盐量是在不断减少的，所以 $dx<0$，故在 dt 时间内应有

$$\frac{2x}{100+t}dt=-dx$$

即

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2x}{100+t}$$

这个方程反映了任意时刻 t 的含盐量 $x(t)$，它是一个包含未知函数 $x(t)$ 及变化率$\frac{dx}{dt}$的微分方程。

微分方程在生产实际中的应用是非常广泛的。为了分析和叙述方便起见，下面我们再举出几个从自然科学中提出来的问题，进行推导。

第一个问题：放射性元素鈾的衰变规律。

解：放射性元素鈾由于原子中不断放出微观粒子，它的含量 Q 不断减少，(称为衰变)。所以 Q 是时间 t 的函数。从实验知道，它的衰减速度是和函数 $Q(t)$本身成正比的，即是

$$\frac{dQ}{dt}:Q(t)$$

的比值是一个常数。

假如比值（即衰减系数）是一个正常数 λ，因为变量 $Q(t)$ 是随着时间 t 的增加而减少的，所以

$$\frac{dQ}{dt}<0$$

又因

$$Q(t)>0$$

故得到

$$\frac{dQ}{dt}=-\lambda Q(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

这个方程反映了鈾元素衰减过程的一般规律。这是我们求未知函数 $Q(t)$的根据。也就是说，$Q(t)$这个未知函数应该满足（1）。

另外，任意时刻 t 的含量 Q，显然与开始时刻的含量 Q_0 有关。那就必须知道当 $t=0$ 时

变量$Q(t)$是多少。如果是Q_0，那么我们就写作

$$Q(t)\Big|_{t=0}=Q_0$$

这个条件，叫做初始条件。

第二个问题：质量m的物体在地球引力的作用下自由下落，初速度为零（不计空气阻力），求下落路程S的变化规律。

解：因为地球对质量m的物体引力为mg（g为重力加速度），根据物理规律：

$$F=ma$$

其中F是作用力，a是加速度。

又因为速度$v=\dfrac{ds}{dt}$，而加速度$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}$，故物体在自由下落运动中，满足

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg$$

即反映物体自由下落的规律是一个微分方程

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

它的初始条件是 $S\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=0$

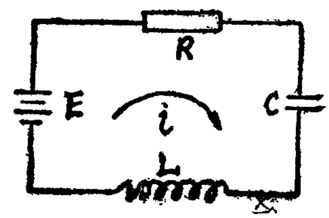


图5—1

第三个问题：电子电路中线性电路的过渡过程规律。

在电子电路中，对于线性电路的过渡过程规律的研究，具有很重要的实用意义。

如图5—1所示的R、L、C电路，根据电学规律知道：在一闭合回路上的各个电压的代数和为零。由此得到

$$E-u_L-u_R-u_C=0$$

即

$$u_L+u_R+u_C=E \quad （外加电压）$$

说得明确点，即是

电感上电压＋电阻上电压＋电容上电压＝外加电压

其中

$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d^2Q}{dt^2}=LC\frac{d^2u_c}{dt^2}=\text{电感产生的电压降。}$$

$$u_R=iR=R\frac{dQ}{dt}=RC\frac{du_C}{dt}=\text{电阻产生的电压降。}$$

$$u_C=\frac{Q}{C}=\frac{1}{C}\int_0^t idt=\text{电容产生的电压降。}$$

R、L及C三个参数，各称为电阻、电感及电容。Q是电量（即物体带电的多少）。

这里用了$Q(t)=\int_0^t idt$ 及$Q(t)=Cu_C$ 这两个关系式。这是因为，电流的强弱叫做电流强度，而导体内电流强度是单位时间内沿着一定方向经过导体横截面的电量。所以有下列的关系式

$$i(t)=\frac{dQ}{dt}$$

故 $$Q(t)=\int_0^t i\,dt$$

又因为电容上电压 u_C 与电量 Q 是成正比的，故满足关系式 $Q(t)=Cu_C$

由上分析，因而得到微分方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

或

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

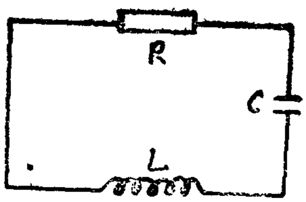


图 5 — 2

其中 E 是外加电源。在直流电源时，是一个常数。在交流电源时，可以是一个周期函数，$E=v_m\sin\omega t$，如果交流电动势 $E=v_m\sin\omega t$ 不断供给能量，电容器极板上的电量不断地得到补充。那末，在周期性外加电动势（电源）的作用下，就会产生振荡现象，称为强迫振荡。

如果撤去电源 E，如图 5 — 2 所示

则得到微分方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

或

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

这个系统所出现的振荡现象，称为自由振荡。

又因为 R、L、C 电路中，电容器的电压 u_C 和它的一阶变化率 $\frac{du_C}{dt}$，二阶变化率 $\frac{d^2u_C}{dt^2}$ 都是一次的，所以这种电路又叫做线性电路。

从上面得出的方程来看，与代数方程相比较，有一个最突出的特点，它们都含有未知函数 $Q(t)$，$s(t)$ 和 $u_C(t)$ 等的变化率或微分。下面六点值得注意。

（1）凡含有未知函数与它的变化率或微分的方程，都叫做微分方程。

（2）微分方程中，自变量只有一个的叫常微分方程，含有两个以上自变量的叫做偏微分方程。本讲义只讲常微分方程。

（3）微分方程中最高阶的变化率为一阶、二阶的，分别叫做一阶微分方程、二阶微分方程。其余类推。

（4）微分方程中，未知函数与各阶变化率都是一次的，叫做线性微分方程。前面得到的方程都是线性微分方程。

（5）线性微分方程中，沒有任意函数项的叫做线性齐次微分方程；含有任意函数项的叫做非齐次微分方程。（凡不含未知函数及其变化率，只含有自变量的函数项，叫做任意函数项）。

例如（5）和（6）两方程是齐次微分方程。（3）和（4）两方程是非齐次微分方程。

（6）线性微分方程中，函数项和各阶变化率项的系数都是常数的，叫做常系数线性微分

方程。前面所得到的微分方程除$\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{100+t}$外，都是常系数微分方程。

补充材料：

Ⅰ．电容器上电流$i(t)$与电压u_C的关系。

如图(1)所示，我们知道，电流$i(t)$是电量$Q(t)$对时间t的变化率，即是$i(t)=\frac{dQ}{dt}$。

在含有电容的电路中，从实际知道电容上电压u_C与电量Q的关系是

$$Q(t)=Cu_C \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

将(1)代入$i(t)=\frac{dQ}{dt}$ 中得

$$\boxed{i(t)=C\frac{du_C}{dt}} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

在含有电容的电路计算中，(2)式是一个基本公式。

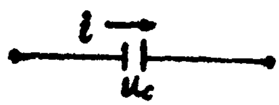


图 (1)

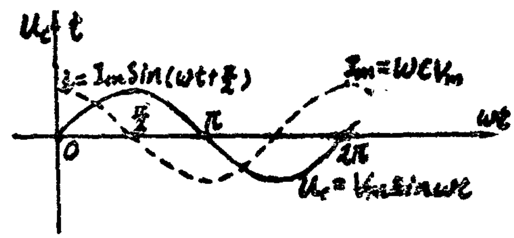


图 (2)

例1． 如果在电容两端加上正弦交流电压

$$u_C=v_m\sin\omega t$$

求电流$i(t)$。

解：由(2)式

$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}=C\cdot\frac{d}{dt}(v_m\sin\omega t)=w\,c\,v_m\cos\omega t$$

即
$$i(t)=\omega C v_m\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

其中ωCV_m是电流的峯值，记作$I_m=\omega CV_m$

则
$$i(t)=I_m\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

如图(2)所示，电容器上电流$i(t)$与电压u_C有下列关系。

(1) 电流i与电压u_C是同频率的正弦波。

(2) 电流i比电压u_C的相位提前$\frac{\pi}{2}$。

(3) 电压峯值与电流峯值之比为

$$\frac{V_m}{I_m}=\frac{V_m}{WCV_m}=\frac{1}{\omega c}$$

电工中称 $\frac{1}{\omega c}$ 为容抗。这些结论经过实践检验，是符合实际的。

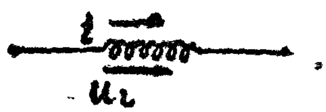
Ⅱ. 电感上电流 $i(t)$ 与电压 u_L 的关系。

电感线圈是电路中另一个常用的元件。

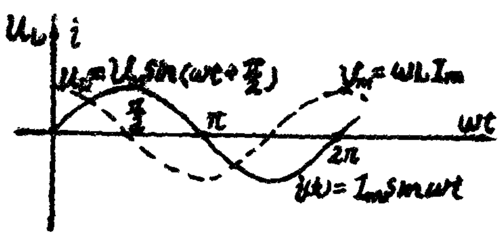
如图(3)所示，根据电磁感应定律，电感两端的电压 u_L 与通过电感的电流 $i(t)$ 之间的关系是

$$\boxed{u_L = L\frac{di}{dt}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

如图(3)所示，其中 L 是电感量。（单位是亨）



图（3）



图（4）

例2. 在交流电路中，已知通过电感的电流是 $i(t) = I_m \sin \omega t$，求电压 u_L。

解：由(3)式

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I_m \sin \omega t)$$
$$= L\omega I_m \cos \omega t$$
$$= L\omega I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

其中 $L\omega I_m$ 是 u_L 的峯值，记作 $V_m = L\omega I_m$，则

$$u_L = V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

如图(4)所示，电感上电流 $i(t)$ 与电压 u_L 有下列关系。

(1)电压 u_L 与电流 i 是同频率的正弦波。

(2) 电压 u_L 比电流 i 相位提前 $\frac{\pi}{2}$。

(3) 电压 u_C 峯值与电流 i 峯值之比为

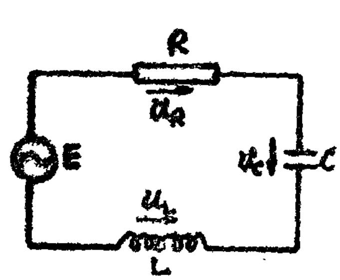
$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{\omega L I_m}{I_m} = \omega L$$

电工中称 ωL 为感抗。

Ⅲ. 在含有电阻、电容、电感的串联电路中的有关计算，常要用到(2)与(3)这两个基本关系式。

例3. 如图(5)所示的串联电路中，已知电容电压是 $u_C = V_m \sin(\omega t \varphi)$ 求电阻电压 u_R 和电感电压 u_L。

解：设电路中电流为 $i(t)$，



图（5）

因为 $u_R = Ri$ ………………………………… (A)

$u_L = L\dfrac{di}{dt}$ ………………………………… (B)

$i = C\dfrac{du_C}{dt}$ ………………………………… (D)

将(D)代入(A)得　　$u_R = RC\dfrac{du_C}{dt}$……… (E)

将(D)代入(B)得　　$u_L = L\dfrac{d}{dt}\left(C\dfrac{du_C}{dt}\right) = LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$ ………… (F)

因此，计算 u_R、u_L 时，主要是求 u_C 的一阶变化率和二阶变化率。

$\because$　　$u_C = V_m \sin(\omega t + \phi)$

$\therefore$　　$\dfrac{du_C}{dt} = \omega V_m \cos(\omega t + \phi) = \omega V_m \sin(\omega t + \phi + \dfrac{\pi}{2})$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\omega^2 V_m \sin(\omega t + \phi) = \omega^2 V_m \sin(\omega t + \phi + \pi)$$

从以上三节来看，总的说起来电阻R，电容C，电感L是电路中的三个主要元件，这些元件上电压（u_R、u_C、u_L）与电流 i 之间的关系是 $u_R = iR$，$u_L = L\dfrac{di}{dt}$，$i = C\dfrac{du_C}{dt}$ 这是电路中的三个基本关系式。

习　题　一

Ⅰ 回答下列各问：

1. 什么样的方程叫微分方程？
2. 什么样的微分方程，是线性微分方程？
3. 什么样的微分方程是线性齐次的微分方程？
4. 什么样的微分方程是线性非齐次的微分方程？
5. 什么样的微分方程是常系数的线性微分方程？
6. 什么样的微分方程是常微分方程？

Ⅱ 指出下列各微分方程的阶：

1. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3y = 7x^2 + 8x + 1$；
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$；
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x + \dfrac{dy}{dx} + x^2y^3 = x + 1$；
4. $2\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^5 + \dfrac{d^3v}{dt^3} = t^2 + 1$；
5. $3y^{(4)} + 7y^{(3)} + 8y' - 15y^5 = 2t^3 + t + 1$；
6. $y''' + 8(y')^4 + 7y^8 = e^{2t}$。

毛主席語录

分析的方法就是辯証的方法。所謂分析，就是分析事物的矛盾。

科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。

第二节　微分方程的解

从前面得到的微分方程 $LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+RC\frac{du_c}{dt}+u_c=E$ 来看，虽然得出了未知函数 $u_c(t)$ 及其变化率（导数）与自变量 t 之间的微分方程。但是，问题并未得到彻底解决。因为 $u_c(t)$ 和 t 的关系是通过变化率给出的，还没有直接得出变量间的具体对应关系。这个矛盾必须进一步得到解决，具体确定 u_c 是 t 的一个什么样的函数。一般把找出未知函数 $u_c(t)$ 的过程，叫做解微分方程。详细些说，即是具体找出这样的函数 $u(t)$，将它代入原微分方程后，能使方程两边相等。

下面我们将通过第一和第二两个问题得到的微分方程作例子，来看微分方程求解是怎么一回事。

第一个问题：求解微分方程 $\frac{dQ}{dt}=-\lambda Q$，要求满足初始条件 $Q(t)|_{t=0}=Q(o)=Q_0$。

解：以 dt 乘方程两边，得

$$dQ=-\lambda Q dt;$$

再以 $Q(t)$ 除方程两边，得

$$\frac{dQ}{Q}=-\lambda dt;$$

两边同时积分

$$\int\frac{dQ}{Q}=\int-\lambda dt,$$

得到

$$\ln Q+C_1=-\lambda t+C_2,$$

即　　$\ln Q=-\lambda t+(C_2-C_1)$。

令　　$C_3=C_2-C_1$，因为 C_1 与 C_2 都是任意常数，所以 C_3 也是一个任意常数。

得到

$$\ln Q=-\lambda t+C_3,$$

即是　　　$Q(t)=e^{-\lambda t+C_3}=e^{C_3}\cdot e^{-\lambda t}$;

又因 e^{C_3} 仍然是一个任意常数，令 $C=e^{C_3}$，则 C 也是一个任意常数，最后得到

$$Q(t)=Ce^{-\lambda t}.$$

但是　　　$t=0$ 时，$Q(t)|_{t=0}=0$.

故　　　$Q_0=C\cdot e^0=C$.

即满足初始条件的解是

$$Q(t)=Q_0e^{-\lambda t}.$$

注意：（1）积分时，不要在方程两边都写上一个任意常数，只要在右边写一个任意常数就行了。

（2）若找出来的未知函数项都是对数形式的。任意常数写成 $\ln C$，那就更方便些。

第二个问题：求解微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2}=g$，并满足初始条件 $S(t)\Big|_{t=0}=0$, $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=0$.

解：求解过程分析如前。

∵速度　$v=\frac{ds}{dt}$，加速度 $g=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$,

$\therefore dv=gdt$,

即　$v=\int gdt=gt+c_1$; ………………………………（1）

又因　$ds=vdt=(gt+c_1)dt$,

故　$s=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$. ………………………………（2）

将初始条件代入上面（1）和（2）两方程。

∵　　$s\Big|_{t=0}=0$, $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=0}=v\Big|_{t=0}=0$，得到

$$\begin{cases}0=g\times 0+C_1\\ 0=\frac{1}{2}\times 0+C_1\times 0+C_2,\end{cases}$$

最后得　$S(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

值得注意的是：有些微分方程的解，是比较容易观察出来的，若是已经知道了微分方程的解，那又如何验证呢？现在举例说明如下：

例1．由观察知道，微分方程 $y'=y$ 有一解是 e^t.

证：∵　$y=e^t$，$y'=e^t$,

∴　$y'=y=e^t$,

故　$y=e^t$ 是方程 $y'=y$ 的一个解。

例2．验证　$y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$ 是微分方程 $y''+4y=0$ 的解。其中 C_1 和 C_2 都是任意常数。

证：∵　$y'=-2C_1\sin 2t+2C_2\cos 2t$,

$$y'' = -4C_1\cos 2t - 4C_2\sin 2t,$$

$$\therefore\quad y'' + 4y = -4(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) + 4(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) = 0;$$

即函数 $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$ 是方程的解。y 含有两个任意常数，包含了方程的一切解，叫做方程的通解。

例3. 验证函数 $y = \frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}t}$ 是微分方程 $2y' + 5y = 0$ 的解。

证：$\because\quad y' = -\frac{35}{4}e^{-\frac{5t}{2}}$，

$$\therefore\quad 2y' + 5y = -\frac{35}{2}e^{-\frac{5}{2}t} + \frac{35}{2}e^{-\frac{5}{2}t} = 0;$$

即函数 $y = \frac{7}{2}e^{-\frac{5}{2}t}$ 是方程的解。因为它没有含任意常数，叫做微分方程的特解。

从上面讲的内容和例子来看，可得如下结论：

（1）凡满足微分方程的函数，叫做微分方程的解。

（2）微分方程的解，如果包含有任意常数，而且任意常数的个数恰好等于微分方程的阶数；即是说：一阶微分方程的解含有一个任意常数，二阶微分方程的解含有两个任意常数。那么，这样的解叫做微分方程的通解。如果将通解中所有的任意常数，按照初始条件找出确定的数值，由此得出的解，叫做特解。

例如在第一个问题中，$Q(t) = Ce^{-\lambda t}$ 是通解，而 $Q(t) = Q_0e^{-\lambda t}$ 是特解。

在第二个问题中，$S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$ 是通解而 $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ 是特解。

注意：就特解来看，对于不同的初始条件，相应的有不同的特解。所谓微分方程的通解，实际上可以理解为这个微分方程所有特解的一个共同表达式。

（3）对于一阶微分方程，根据问题的要求，当自变量取某定值时（比如 $x = a$），规定因变量（即函数）应取何值（比如 $y = b$）的条件（一般记为 $y\big|_{x=a} = b$ 或 $y(a) = b$）叫做问题的初始条件。至于二阶微分方程的初始条件，则取如 $y\Big|_{x=a} = b$ 和 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = c$ 的形式。

（4）微分方程的一个特解，所对应的一条曲线，叫做积分曲线。微分方程通解所对应的一族曲线，叫做积分曲线族。

不难证明，函数 $y = e^t$ 是微分方程 $y' = y$ 的特解；函数 $y = Ce^t$ 是微分方程 $y' = y$ 的通解，其中 C 是一个任意常数。

它们的几何意义，有如下图：

图5－3表示 $y = e^t$ 是通过（0.1）点的一条指数函数曲线

图5－4表示 $y = Ce^t$ 是一族指数函数曲线，它们在平行 t 轴的任意一条直线上交点处的切线都是平行的。

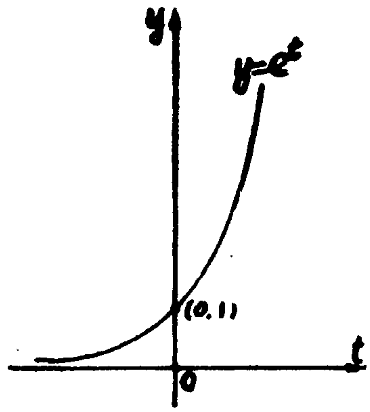


图5—3

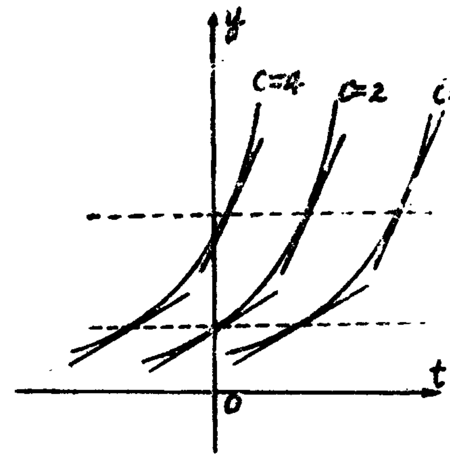


图5—4

习 题 二

Ⅰ. 回答下列各问：

1. 求解微分方程是什么意思？
2. 什么是微分方程的通解？
3. 什么是微分方程的初始条件？
4. 怎样从通解中求特解？
5. 什么叫积分曲线？

Ⅱ. 验证下列各题：

1. 函数 $u(t)=E+Ae^{-\frac{t}{RC}}$是方程$RC\frac{du}{dt}+u=E$ 的通解，其中A是任意常数。

2. 函数$i(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ 是方程$\frac{d^2i}{dt^2}+\omega^2 i=0$的通解。其中$A$与$B$是任意常数。

3. $y=4e^{3t}-2e^{4t}$是方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-7\frac{dy}{dt}+12y=0$的解。但不是通解。

4. $y=ax^2+bx$是$y''-\frac{2}{x}y'+2\frac{y}{x^2}=0$的解。

5. $y=Cx$是方程$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$的解。但不是通解，其中C是任意常数。

6. $y=\frac{\cos x}{x}$是方程$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$的解。

毛主席語录

入門既不难，深造也是办得到的，只要有心，只要善于学习罢了。

第三节　一阶微分方程解法

我们在前节已经提到过，在生产实际问题中得出了一些微分方程以后，还必须前进一步找出未知函数与自变量之间的关系式。这便叫做求解微分方程。同时，就第一节提出的微分方程看来，主要是一些一阶和二阶的微分方程。其实在机械振动中提出来的问题也不例外。针对这种情况，我们下面将着重研究这两种类型的微分方程的解法。

从这一节开始，首先对一阶微分方程中比较容易求解的两种类型的微分方程：（1）可分离变量的微分方程。（2）一阶线性微分方程，进一步研究它们的求解方法。我们将看到，对不同类型的微分方程，是怎样用不同的方法来解决的。

一、可分离变量的微分方程解法

在微分方程$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$中如果P与Q都是一个变量x的函数和另一个变量y的函数相乘之积。即是

$$p(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$
$$Q(x,\ y)=f_3(x)\cdot f_4(y)$$

于是原方程可写成

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+f_3(x)\cdot f_4(y)dy=0$$

两边除以$f_3(x)$，$f_2(y)$，便得到

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=0\cdots\cdots①$$

因为(1)式的左边是两个函数的微分相加，所以分别积分再相加得方程(1)的通解是

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C$$

例1．求解微分方程$\sin x\cdot\cos y\,dx+\cos x\cdot\sin y\,dy=0$满足初始条件$y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$的特解。

解：求解过程分三步进行：

第一步：用$\cos x\cdot\cos y$除整个方程得

$$\frac{\sin x}{\cos x}dx+\frac{\sin y}{\cos y}dy=0;$$

第二步：分别求积分

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}d x+\int\frac{\sin y}{\cos y}d y=-\ln c,$$

即
$$\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}+\int\frac{-d(\cos y)}{\cos y}=-\ln c,$$

结果是$-\ln\cos x-\ln\cos y=-\ln c$,

即 $\ln\cos x\cdot\cos y=\ln c$;

故通解是$\cos x\cdot\cos y=c$。

第三步：为了求满足初始条件$y\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$的特解，将$x=\frac{\pi}{3}$，$y=\frac{\pi}{9}$代入通解中，

$$\because\ \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=C,$$

故所求特解是$\cos x\cdot\cos y=\sqrt{\frac{3}{4}}$。

例2：求方程$(1+y^2)dx-x(1+x^2)ydy=0$的通解。

解：求解过程同前例，

以$x(1+x^2)(1+y^2)$除方程，得

$$\frac{dx}{x(1+x^2)}-\frac{ydy}{1+y^2}=0,$$

两边积分

$$\int\frac{dx}{x(1+x^2)}-\int\frac{ydy}{1+y^2}=C_1,$$

$$\because\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\ln(1+y^2),$$

$$\therefore\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1+y^2=C_1,$$

即 $2\ln x-2C_1=\ln(1+x^2)(1+y^2)$,

以 $\ln C$代替$-2C_1$，得到

$\ln(1+x^2)(1+y^2)=\ln Cx^2$,

所以通解是

$$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2。$$

例3．求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{4x+7}{6y+3}$满足初始条件$y_{x=1}=1$的特解。

解：以$(6y+3)dx$乘方程两边，得

$$(6y+3)dy=(4x+7)dx,$$

取积分得通解

$$3y^2+3y=2x^2+7x+c,$$

代入初始条件得

$$3\times1^2+3\times1=2\times1^2+7\times1+C,$$

得到$C=-3$,

故特解为$3y^2-2x^2+3y-7x+3=0$。

例4.求方程$RC\dfrac{du_c}{dt}+u_c=0$的通解。

解：$\because \dfrac{du_C}{u_C}=-\dfrac{1}{RC}dt$,

$$\therefore \quad \ln u_c=-\frac{t}{RC}+C_1$$

$$即 \quad uc=e^{-\frac{t}{RC}+c_1}=e^{-\frac{t}{Rc}}\cdot e^{c_1} ;$$

令 $A=e^{C_1}$,

故通解 $u_c=Ae^{-\frac{t}{Rc}}$。

注意：有些简单微分方程的通解，是可以用观察法求出来的。請同学们自己验证一下。

例如 $\dfrac{dy}{dx}+2y=0$的通解是$y(x)=ce^{-2t}$;

$\dfrac{dy}{dx}-2y=0$的通解是$y(x)=ce^{2t}$;

$5\dfrac{dy}{dx}+7y=0$的通解是$y(x)=c\,e^{-\frac{7}{5}x}$;

$Rc\dfrac{du_c}{dt}+u_c=0$的通解是$u_c(x)=Ae^{-\frac{t}{Rc}}$

二、一阶线性微分方程解法

在微分方程$Ay'+By=E$中函数y和它的变化率y'都是一次的。这样的微分方程，叫做一阶线性微分方程。其中A、B、E都不含有y和y'，而只是一个变量x的函数，或常数。

一般把方程$Ay'+By=0$叫做方程

$$Ay'+By=E\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

的齐次线性微分方程。

以A除方程(1)两边得到

$$y'+\frac{B}{A}y=\frac{E}{A};$$

令 $\frac{B}{A}=P \qquad \frac{E}{A}=Q,$

得到一阶线性微分方程的标准式

$$y'+py=Q。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

怎样求解方程(1)呢？

如果方程(1)有一个形如$=\mu(x)\cdot v(x)$的解，同时μ又是齐次方程$Ay'+By=0$的任意一个特解，我们认为：采用两次积分法，那是很方便的。

求解过程是这样的：

第一步：求齐次方程$Ay'+By=0$的通解

$$y_0(x)=c_1\mu(x);$$

第二步：令$y=\mu(x)\cdot v(x)$。把$y=\mu v$和$y'=\mu'v+\mu v'$代入原方程$Ay'+By=E$中，要是$v'(x)$是一个可积的函数，通解是不难求出的。

现在举例说明如下：

第一个例子。求微分方程$x\frac{dy}{dx}-y=15x^4+8x^3$的通解。

解：第一步：求方程$x\frac{dy}{dx}-y=0$的通解

$$\because \quad \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$$

积分得 $\ln y-\ln x=\ln c_1,$

即 $\frac{y}{x}=c_1;$

故齐次方程的通解$y_0(x)=c_1x$，即$\mu(x)=x$。

第二步：求原方程$x\frac{dy}{dx}-y=15x^4+8x^3$的通解。

令 $y=v(x)\cdot x$

$$\because \quad y'=v'x+v$$

将y和y'代入原方程，得到

$$xv+x^2v'-xv=15x^4+8x^3,$$

即 $v'=15x^2+8x,$

$$\therefore \quad v=\int(15x^2+8x)dx=5x^3+4x^2+c;$$

即原方程的通解

$$y=x(5x^3+4x^2+c)=cx+5x^4+4x^3。$$

第二个例子，求微分方程$\frac{dy}{dx}+y\mathrm{tg}x=\sin 2x$满足初始条件$y\Big|_{x=0}=-1$的特解。

解. 第一步求齐次方程$y'+y\,\mathrm{tg}\,x=0$的通解：

$$\because \quad \frac{dy}{y}+\mathrm{tg}\,x\cdot dx=0,$$