北 京 电 視 大 学

# 数学系(乙)学习資料之二

## "空間介析几何"自学指导書

北京电視大学数学系編

1661 年 9 月

# (乙班)空間解析几何

I．目的要求：

解析几何是应用代数方法解决几何問題的一个数学分支。分为平面解析几何与空間解析几何两大部分。

解析几何的基本思想有二：①坐标法——使点（几何元素）与数（代数元素）之間建立了对应。②几何圖形与方程——由于点与数建立了对应关系，因而几何圖形（看成点的几何軌跡）就和方程式之間建立了对应关系。正是基于这两个基本思想，才使我們有可能把一个几何問題通过数字的計算求得解决，因而也才形成了解析几何。

空間解析几何这一部分，我們基本上采用了"向量講法"，即通过向量导出公式。这种方法对空間圖形來說，比不用向量的講法要簡单不少。我們所用的教科書上，經常写着这两种不同的講法，以兹比較。

空間解析几何的目的要求如下：

①建立空間概念：会看圖，会画圖，习慣于想像空間圖形。

②初步学会利用向量來解决几何問題的方法：要求会推导我們講过的所有公式。这一部分主要体現在平面和直綫两章。

③結合二次曲面，进行立体圖形的訓練。为以后的学习（多元微分学，多元积分学，偏微分方程，綫性代数）作好几何方面的准备。

II．重点：

①明确向量的坐标表示法，大小（长短）以及方向余弦的概

念和求法。

②熟練掌握向量的綫性运算（加法，减法，数与向量的乘法）、数量积、向量积、混合积等运算，牢記其坐标表示法，並明确其几何意义。

③熟記向量垂直、共綫（或平行）以及共面的条件。

④熟記平面和直綫的各种主要方程，初步掌握用向量工具來处理問題的方法。

⑤利用③熟記平面与平面、直綫与直綫以及平面与直綫之間的平行、垂直条件。

⑥熟記主要的二次曲面的标准方程和圖形特点；会作二次曲面的圖形（单个的或者两个相交的）。

**Ⅲ，参考書：**

1. 勃立瓦洛夫著：解析几何学
2. 穆斯海里什維利著：解析几何学数程 下册，二次曲面部分。
3. 狄隆涅、拉伊可夫合著：解析几何学 第二卷，第6章与第7章第一篇 § 148 之前。

6

# 乙班測驗作业題

## 第一阶段——空間解析几何

1. 已知点P(1,-1,2)，試求：与P点对称于

   1)各坐标平面；　　2)各坐标軸；　　3)原点

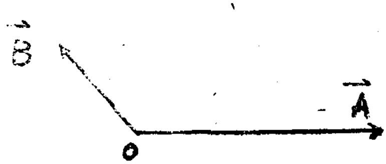
   的各点的坐标。

2. 試求点P(12,-3,-4)与Y軸的距离。

3. 已知四点A(0,0,0)．B(2,0,0)，C(0,3,0)　D(0,0,6)，試求过此四点的球面的方程。

4. 在点A(2,-1,5)上作用一力$\vec{F}$，其大小$|\vec{F}|=11$．(力的单位)，並已知$\vec{F}$的两个分力的大小为$X=7, Y=6$．求表示这力的向量的方向余弦及端点的坐标。

5. 已知$\vec{A}$，$\vec{B}$如下圖，試作出$\vec{A}+\vec{B}$，$\vec{A}-\vec{B}$，$\vec{B}-\vec{A}$的圖：




6. 設$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$为三基本向量，　求

   $\vec{i}\cdot\vec{j}=?$　　$\vec{j}\cdot\vec{k}=?$　　$\vec{k}\cdot\vec{i}=?$

   $\vec{i}\times\vec{j}=?$　　$\vec{j}\times\vec{k}=?$　　$\vec{k}\times\vec{i}=?$

   又　$\vec{j}\times\vec{i}$呢？

7. 分别求向量 $\vec{A}=\{4,-3,4\}$在 $\vec{B}=\{2,2,1\}$ 和 $\vec{j}$ 上的投影。

8. 求 $\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ 与 $\vec{B}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$的交角。

9. 給定两点 A(2,-1,-2) 和B(8,-7,5),一平面通过点B而且垂直于綫段 AB 求平面的方程。

10. 平面 $Ax+3y-5z+1=0$ 当A为何值时与直綫

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$$

平行?

11. 过点 (3,-2,4) 作垂直于平面 $5x+3y-7z+1=0$ 的直綫。

12. 球面方程为 $2(x^2+y^2+z^2)+6x-8y-\frac{11}{2}=0$. 求球心与半徑。

13. 作下列圖形:

① $x^2=y^2+y^2$

② $(y-1)=x^2+y^2$

14. 求柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$与球面$x^2+y+z^2=4a^2$ 的交綫,並作圖(在第一卦限內作)。

# 測驗作业題解答和評分标准

1. 已知点P(1,-1,2).

   1) 与点P对称于XOY平面的点为 (1,-1,-2)

   ……………YOZ…………… (-1,-1,2)

   ……………YOX…………… (1, 1, 2)

   2) 与P对称于X軸的点为 (1, 1, -2) ——只須将Y, Z 加上負号

   ……………Y………… (-1,-1,-2)——只須将Z, X加上負号

   ……………Z………… (-1, 1, 2) ——只須将X, Y 加上負号

   3) 与P对称于原点的点为 (-1,1,-2).

   本題共10分：其中 1) 一共3分，每一小問題1分

   2) 一共6分，每一小問題2分

   3) 1分

2. 点P(12,-3,-4)与Y軸的距离为

$$\sqrt{(12-0)^2+[(-3)-(-3)]^2+(-4-0)^2}=4\sqrt{10}$$

   本題得3分

3. 設所求球面方程为

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-C)^2=R^2$$

$$\because \left.\begin{array}{lll} \text{过}A(0,0,0), & \Rightarrow & a^2+b^2+C^2=R^2 \\ \text{过}B(2,0,0), & \Rightarrow & (2-a)^2+b^2+C^2=R^2 \\ \text{过}C(0,3,0), & \Rightarrow & a^2+(3-b)^2+C^2=R^2 \\ \text{过}D(0,0,6), & \Rightarrow & R^2+b^2+(6-c)^2=R^2 \end{array}\right\}$$

得到含 4 个未知数 $a,b,c$，$R$ 的 4 个方程. 从中解出

$$a=1,\quad b=\frac{3}{2},\quad C=3,\qquad R=\frac{\sqrt{49}}{2}$$

本题得 8 分．（但方法可以和上述不同）

4. 設 $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}=7\vec{i}+6\vec{j}+Z\vec{k}$今 $|\vec{F}|=11$.
即 $\sqrt{7^2+6^2+Z^2}=11$，　解出 $Z=6$或$-6$

即有二解：　$\vec{F}=\{7,6,6\}$，　$\vec{F}=\{7,6,-6\}$

再求其方向余弦：

对于 $\vec{F}=\{7,6,6\}$來說，（$\because\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=11$）

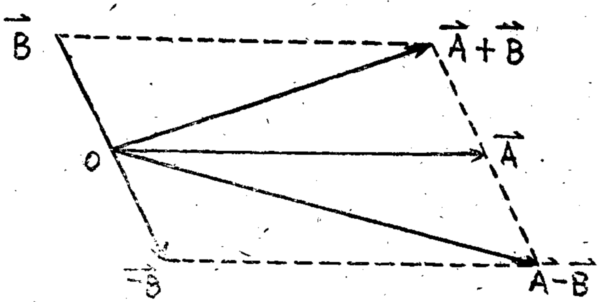
$$\cos\alpha=\frac{7}{11},\ \cos\beta=\frac{6}{11},\ \cos\gamma=\frac{6}{11},$$

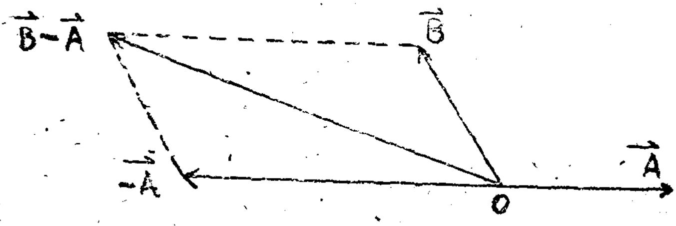
对于 $\vec{F}=\{7,6,-6\}$來說，

$$\cos\alpha=\frac{7}{11},\ \cos\beta=\frac{6}{11},\ \cos\gamma=-\frac{6}{11}$$

本題得 10 分。

5. $\vec{A}+\vec{B}$，$\vec{A}-\vec{B}$，恰为以$\vec{A}$，$\vec{B}$为二边的平行四边形之两对角綫。






本題共 6 分：　　画对 $\vec{A}+\vec{B}$ 者： 2 分

画对 $\vec{A}-\mathrm{B}$ 者： 2 分

画对 $\vec{B}-\vec{A}$ 者： 2 分

6, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ —— 2 分

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$， $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$， $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ —— 2 分

$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$ —— 1 分

——共 5 分

7. ① $\vec{A}=\{4,-3,4\}$ 在 $\vec{B}=\{2,2,1\}$ 上之投影为

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{4\times2-3\times2+4\times1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=2$$

——得 4 分

② $\vec{A}$ 在 Y 軸上的投影为

$$\vec{A}\cdot\vec{j}=\{4,-3,4\}\cdot\{0,1,0\}=-3.$$

——得 6 分

——共 10 分

8. $\text{Cos}\,(\widehat{\vec{A},=\vec{B}})\dfrac{1\times1+1\times(-2)-4\times2}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=\frac{3\pi}{4}$$

——得 3 分

9. 設平面为$\pi$, $\because \pi$通过B$(8,-7,5)$, $\therefore$方程为

$$A(X-8)+B(Y+7)+C(Z-5)=0.$$

又, $\pi\perp\vec{AB}$, $\therefore\vec{AB}$ 可作为$\pi$的法向量 $\vec{n}$, 即

$$\vec{n}=\vec{OB}-\vec{OA}=\{8-2,-7-(-1),\ 5-(-6)\}$$

$\Longrightarrow\ \vec{n}=\{5,-6,7\}$. 　即$A=6$, $B=-6$, $C=7$

$\therefore$得到$\pi$的方程

$$6(X-8)-6(Y+7)+7(Z-5)=0$$

$\Longrightarrow\ 6Z-6Y+7Z-125=0.$

——本題得10分

10. 要平面 $(\pi)$ $AX+3Y-5Z+1=0$ 平行于直綫

$$(l)\quad \frac{X-1}{5}=\frac{Y+2}{3}=\frac{Z}{1}$$

必須要$(\pi)$的法向量$\vec{n}=\{A,3,-5\}$与$(l)$之方向向量 $\vec{S}=\{4,3,1\}$垂直, 即

$$4A+9-5=0$$

$$\Longrightarrow\ A=1.$$

——得 5 分

11．設过点 $(3,-2,4)$之直綫方程为

$$\frac{X-3}{m}=\frac{Y+2}{n}=\frac{Z-4}{p}$$

∵它垂直于平面　$5X+3Y-7Z+1=0$，　∴向量$\{m,n,p\}$

平行于平面的法向量　$\vec{n}=\{5,3,-7\}$.

$$\Longrightarrow\quad \frac{m}{5}=\frac{n}{2}=\frac{p}{-7}$$

故得直綫方程为　$\frac{X-3}{5}=\frac{Y+2}{3}=\frac{Z-4}{-7}$

——得5分

12，从　$2(X^2+Y^2+Z^2)+6X-8Y-\frac{11}{2}=0$，　得到

$$X^2+Y^2+Z^2+3X-4Y-\frac{11}{4}=0$$

配方，$\Longrightarrow$　$(X+\frac{3}{2})^2+(Y-2)^2+Z^2=9$，

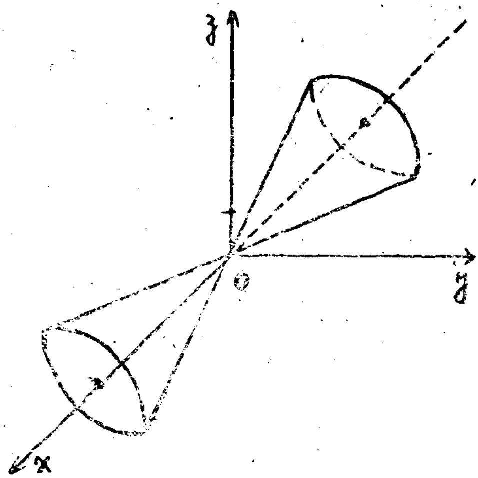
∴　球心在点 $(-\frac{3}{2},2,0)$，半徑为3.

——得5分

13．作圖:

①　$X^2=Y^2+Z^2$

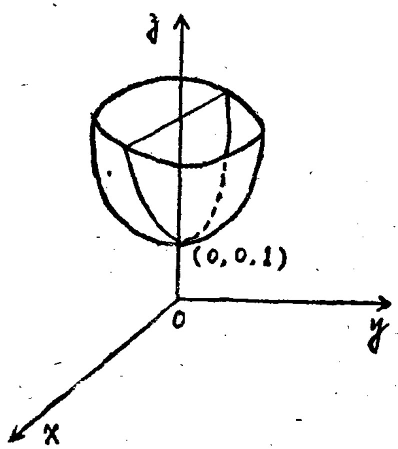
为圓錐面，对称軸为X軸;




——得 5 分

② $(z-1)=x^2+y^2$

为椭圆抛物面，对称轴为Z轴，顶点在(0,0,1)

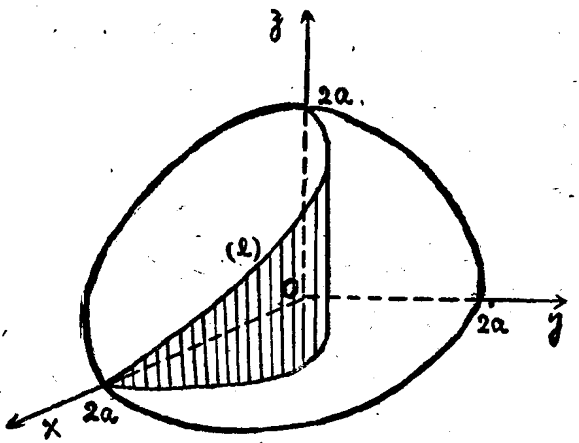



——得 5 分

14. 柱面 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 的交綫

的方程为 $\begin{cases}(x-a)^2+y^2=a^2\\ x^2+y^2+z^2=4a^2\end{cases}$

圖为（只画第一卦限里的圖）：




得10分