

数 学 习 题 集

(几何、解几部分)

一九七九年三月

宁波地区教师进修学院
宁波地区教育局教研室

翻印

一九七九年三月

目 录

第一篇 平面几何..... (1)

第一部分 证明题..... (1)

第二部分 计算题..... (35)

第三部分 轨迹题..... (40)

第四部分 作图题..... (42)

第五部分 综合题..... (45)

第二篇 立体几何..... (47)

第一部分 问答题..... (47)

第二部分 证明题..... (49)

第三部分 计算题..... (59)

第四部分 轨迹题、作图题..... (73)

第三篇 平面解析几何..... (76)

第一部分 点的直角坐标..... (76)

第二部分 直 线..... (80)

第三部分 元..... (85)

第四部分 抛物线、椭圆、双曲线..... (89)

第五部分 坐标变换..... (99)

第六部分 极坐标..... (105)

第七部分 参数方程..... (107)

[附录]: 应用“美尼劳斯”定理和“西瓦”定理解决的
选作题..... (109)

附 录

习题答案或提示

第一篇	平面几何		(111)
第二篇	立体几何		(126)
第三篇	平面解析几何		(134)

第一篇 平面几何

第一部分 证明题

甲、基本题

- 1、求证：对顶角的平分线成一条直线。
- 2、求证：邻补角的平分线互相垂直。
- 3、已知一条直线和两条平行线相交，求证：
 - (i) 一组同位角的平分线互相平行；
 - (ii) 一组内错角的平分线互相平行；
 - (iii) 一组同旁内角的平分线互相垂直。
- 4、一个角的两边和另一个角的两边分别平行时，那么这两个角相等或互补。
- 5、一个角的两边和另一个角的两边分别垂直时，那么这两个角相等或互补。
- 6、求证：等腰三角形两个底角的平分线相等。
- 7、求证：等腰三角形两腰上的中线相等。
- 8、求证：等腰三角形两腰上的高相等。
- 9、求证：等腰三角形顶角的外角的平分线和底边平行。
- 10、求证：过等腰三角形底边所对的顶点引底边的平行线必平分顶角的外角。
- 11、求证：顶角等于 60° 的等腰三角形是正三角形。
- 12、如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形。
- 13、求证：五角星形的五个顶角的和等于 180° 。

14、求证：三角形三边的垂直平分线交于一点；这点到三顶点的距离相等。

15、求证：三角形三内角的平分线交于一点；这点到三边的距离相等。

16、求证：三角形的一内角的平分线和另外两内角的外角的平分线交于一点；这点到三边的距离相等。

17、平行四边形ABCD，BC边的中点E，DA边的中点F，求证：BEDF是平行四边形。

18、平行四边形ABCD的四边AB、BC、CD、DA的中点依次是E、F、G、H，求证：四直线AF、BG、CH、DE交成平行四边形。

19、平行四边形ABCD的两条对角线AC和BD交于O点，OA、OB、OC、OD的中点依次是E、F、G、H，求证：EFGH是平行四边形。

20、四边形ABCD， $AB = AD$ ， $CB = CD$ ，求证：AC垂直平分BD。

21、从等腰三角形ABC的底边BC上任一点D引 $DE \parallel AB$ 和AC交于E点；引 $DF \parallel AC$ 和AB交于F点，求证：四边形AEDF的周长等于 $AB + AC$ 。

22、 $\triangle ABC$ ，以CA、AB各为一边向外侧作正三角形CAD和ABE，求证： $BD = CE$ 。

23、正方形ABCD，在四边AB、BC、CD、DA上依次取一点E、F、G、H，使 $AE = BF = CG = DH$ ，求证：EFGH是正方形。

24、 $\triangle ABC$ ，以CA、AB各为一边向外侧作正三角形CAD和ABE，再以AD和AE为二邻边作平行四边形ADFE，求证：BCF是正三角形。

25、求证：两组对角分别相等的四边形是平行四边形。

26、等腰三角形ABC的底边上的高AD，两腰AB和AC的中点分别是E和F，求证 $DE = DF$ 。

27、求证：平行四边形的四个内角的平分线围成矩形。

28、求证：一条对角线平分一个内角的平行四边形是菱形。

29、求证：等腰三角形底边的中点到两腰的距离相等。

30、正三角形ABC，在三边AB、BC、CA上依次取一点D、E、F，使 $AD = BE = CF$ ，求证：三条直线AE、BF、CD交成正三角形。

31、 $\triangle ABC$ 的内心I，延长AI和BC交于D点，再引 $IE \perp BC$ ，垂足为E，求证： $\angle BID = \angle CIE$ 。

32、二直线 $AB \parallel CD$ ，AB上一点A，CD上一点C，AB和CD之间一点E，求证： $\angle AEC = \angle ABE + \angle DCE$ （但这三个角都是锐角）。

33、求证：等腰三角形的底边内部的任意一点到两腰的距离的和等于一腰上的高。

34、求证：等腰三角形的底边的延长线上任意一点到两腰的距离的差等于一腰上的高。

35、求证：正三角形内部任意一点到三边的距离的和等于一边上的高。

36、求证：顺次连结四边形的四边中点成平行四边形。

37、求证：顺次连结矩形的四边中点成菱形。

38、求证：顺次连结菱形的四边中点成矩形。

39、求证：等腰梯形一个底上的两个内角相等。

40、求证：等腰梯形的两条对角线相等。

41、求证：等腰梯形的两底边中点间的线段和两底边垂

直。

42、求证：梯形的两条对角线的中点间的线段平行于两底，并且等于两底的差的一半。

43、求证：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。

44、求证：在直角三角形中， 30° 的内角所对的直角边等于斜边的一半。

45、求证：在直角三角形中，一条直角边等于斜边的一半时，这条直角边所对的角等于 30° 。

46、求证：三角形的三条高所在的三条直线交于一点。

47、求证：三角形的三中线交于一点。这点到一边中点的距离等于这边上中线长的三分之一。

48、正方形ABCD，在对角线AC上取一点E，使 $AE = AB$ ，从E点引AC的垂线和BC边交于F点，求证： $BF = FE = EC$ 。

49、平行四边形ABCD，CD边的中点E，DA边的中点F，求证：BE和BF把对角线AC三等分。

50、平行四边形ABCD，AB边的中点E，CD边的中点F，求证：BF和DE把对角线AC三等分。

51、直角梯形ABCD ($AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$) 中，已知 $CD = BC + AD$ ，P是AB的中点，求证： $\angle CPD = 90^\circ$ 。

52、 $\triangle ABC$ 的中线BE，从A点引 $\angle EBC$ 平分线的垂线，这条垂线和BE、BC分别交于P点、Q点，求证： $PE = \frac{1}{2}QC$ 。

53、 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，在AB上取一点E，在AC的延长线上取一点F，使 $CF = BE$ ，直线EF和BC交于D点，求证： $DE = DF$ 。

54、求证：有两条高相等的三角形是等腰三角形。

55、求证：有两条中线相等的三角形是等腰三角形。

56、 $\triangle ABC$ 内部任意一点P, 求证: $PB+PC < AB+AC$ 。

57、线段AB的垂直平分线MN外一点P (P点和B点在MN的同侧), 求证 $PA > PB$ 。

58、求证：三角形一边上的中线小于另二边的和的一半。

59、求证：四边形的四边的和大于两条对角线的和。

60、 $\angle XOY$ 的平分线OM, $\angle XOM$ 内部一点P, 从P点引OX的垂线PA; 引OY的垂线PB (A、B是垂足), 求证: $PA < PB$ 。

61、求证：三角形三条中线的和小于这个三角形的周长而大于这个三角形的周长的四分之三。

62、 $\triangle ABC$, $AB=AC$, 在这三角形内部取一点O, 使 $\angle BAO > \angle CAO$, 求证: $\angle BCO > \angle CBO$ 。

63、在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB=2AC$, 那么 $\angle B$ 最小。

64、在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB=2AC$, 求证: $\angle C > 2\angle B$ 。

65、圆的两条直径AB和CD, 弦 $CE \parallel AB$, 求证: $\widehat{BE} = \widehat{BD}$ 。

66、圆O的弦AB, 把它按从A到B的方向延长到C点, 使BC等于圆O的半径, CO的延长线和圆O交于D点, 求证: $\angle AOD = 3\angle ACD$ 。

67、一条直线和两个同心圆顺次交于A、B、C、D四点, 求证: $AB=CD$ 。

68、圆的弦AB, 切线CD, 切点是P, 并且 $AB \parallel CD$, 求证: $\widehat{PA} = \widehat{PB}$ 。

69、 $\triangle ABC$, $\angle A$ 的平分线和外接圆交于E点, 设这个三角形的内心是I, 求证: $BE=CE=IE$ 。

70、 $\triangle ABC$ 的高 AD ，垂心 H ，延长 AD 和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 E 点，求证： $HD = DE$ 。

71、两圆 O_1 、 O_2 相切于 P 点，过 P 点引直线和圆 O_1 交于 A 点，和圆 O_2 交于 B 点，求证： $O_1A \parallel O_2B$ 。

72、两圆 O_1 、 O_2 相交，交点是 A 和 B ，过 A 点引直线和圆 O_1 交于 C 点，和圆 O_2 交于 D 点；过 B 点引直线和圆 O_1 交于 E 点，和圆 O_2 交于 F 点，求证： $CE \parallel DF$ 。

73、两圆 O_1 、 O_2 相切于 P 点，过 P 点引二直线和圆 O_1 交于 A 、 C 两点，和圆 O_2 交于 B 、 D 两点，求证： $AC \parallel BD$ 。

74、从圆 O 外一点 P 引这圆的二切线 PA 、 PB （ A 、 B 是切点），再引这圆的直径 AC ，求证： $CB \parallel OP$ 。

75、以 AB 为直径的圆上取一点 C ，使 $\angle BAC = 30^\circ$ ，过 B 点引这个圆的切线和 AC 的延长线交于 D 点；过 C 点引这个圆的切线和 BD 交于 E 点，求证： $\triangle CDE$ 是正三角形。

76、求证：在一个圆内的两条平行弦所夹的弧相等。

77、圆 O 的二等弦 AB 和 CD 互相垂直，垂足是 P 点，求证： P 点分 AB 所成的二线段和 P 点分 CD 所成的二线段分别相等。

78、求证：过一个圆的互相垂直的两条直径的四个端点引这个圆的四条切线围成正方形。

79、两圆外离，求证：它们的外公切线长相等；内公切线长相等。

80、求证：一个圆的外切四边形两组对边的和相等。

81、求证：一个圆的两条直径的四个端点是一个矩形的四个顶点。

82、求证：以一个正三角形的一边为直径的圆把另外两边平分。

83、以 $\angle XPY$ 的平分线上一点 O 为圆心作一个圆，和 PX 交于 A 、 B 两点；和 PY 交于 C 、 D 两点，求证： $AB = CD$ 。

84、如果以一个角的平分线上一点为圆心的圆和这个角的一边相切，那么这个圆也和这个角的另一边相切。

85、如果一个圆把一个角的两边截得相等的弦，那么这个圆的圆心在这个角的平分线上。

86、求证：圆的内接菱形是正方形。

87、如果两个圆存在两条外公切线，那么两条外公切线的四个切点是一个等腰梯形的四个顶点。

88、 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，求证： $AB + AC - BC$ 等于这个三角形的内切圆的直径长。

89、求证：三角形的三个顶点在以这个三角形的三个旁切圆的圆心为顶点的三角形的三边上。

90、 $\triangle ABC$ ， $\angle A$ 外角的平分线和这个三角形的外接圆交于D点，求证： $\triangle DBC$ 是等腰三角形。

91、以AB为直径的圆上取一点C，从C点引这个圆的切线CE，再从B点引CE的垂线，垂足是D点，求证：BC是 $\angle ABD$ 的平分线。

92、两圆外切于P点，这两个圆的一条外公切线和两圆相切于A点和B点，求证： $\angle APB = 90^\circ$ 。

93、两个圆相交于A、B，从B点引这两个圆的直径BC、BD，求证：C、A、D三点在同一直线上。

94、圆O的直径AB，过A、B引圆O的二切线AD、BC，又圆O的另外一条切线和AD交于D，和BC交于C，求证： $OC \perp OD$ 。

95、两圆 O_1 、 O_2 相交于A、B，过A点引圆 O_1 的切线和圆 O_2 交于C点；过A点引圆 O_2 的切线和圆 O_1 交于D点，求证： $\angle ABC = \angle ABD$ 。

96、圆的内接四边形ABCD，延长一组对边AD和BC交

于M点，过M点引过C、D、M三点的圆的切线MT，求证：
 $MT \parallel AB$ 。

97、圆的两个弧 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{AC}$ 的中点M和N，直线MN和弦AB、AC分别交于P、Q，求证： $\triangle APQ$ 是等腰三角形。

98、直角三角形ABC，以一直角边AB为直径作圆和斜边BC交于P点，求证：过P点所引的这个圆的切线把另一直角边AC平分。

99、圆O的直径AB，半径 $OC \perp AB$ ，从AB的延长线上一点P引圆O的切线PD（D是切点），直线CD和直线AB交于E点，求证： $\triangle PDE$ 是等腰三角形。

100、在以AB为直径的半圆上取一点C，再取 $\widehat{AC}$ 的中点P，BP和AC交于D点，从P点引AB的垂线和AC交于E点，求证：E点到A、D、P三点的距离相等。

101、 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径AD，求证： $\angle BAD$ 和 $\angle C$ 是互为余角。

102、两圆内切于P点，一直线和这两圆顺次交于A、B、C、D四点，求证： $\angle APB = \angle CPD$ 。

103、圆O的弦AB， $\widehat{AB}$ 的中点P，弦PC和弦PD和AB分别交于E、F，求证： $\angle PEF = \angle D$ 。

104、正方形ABCD，以AB、BC为直径在这个正方形内部作两个半圆，这两个半圆交于E点，求证：BE平分 $\angle ABC$ 。

105、圆O的两弦AB和CD交于P点，如果AB、CD和OP成等角，求证： $AB = CD$ 。

106、二直线 $l \parallel m$ ，l和三射线OX、OY、OZ依次交于A、B、C；m和这三射线OX、OY、OZ依次交于A'、B'、C'，求证： $A'B' : AB = B'C' : BC$ 。

107、平行四边形ABCD，过A点引直线和BD、BC、DC的延长线依次交于E、F、G，求证： $AE^2 = EF \cdot EG$ 。

108、 $\triangle ABC$ 的高AD（D在BC内部），若 $AD^2 = BD \cdot CD$ ，求证： $\angle BAC = 90^\circ$ 。

109、从圆外一点P引二切线PA、PB，引一割线PCD（A、B是切点，C、D是交点），求证： $AC \cdot BD = BC \cdot AD$ 。

110、圆O的直径AB，过A、B引AB的垂线和过圆O上一点P的切线分别交于C、D，求证：OP是AC和BD的比例中项。

111、梯形ABCD（ $AD \parallel BC$ ），一直线和这个梯形的两底平行，和AB、BD、AC、CD依次交于E、F、G、H，求证： $EF = GH$ 。

112、两圆内切于P点，从P点引二射线，一条和这两圆交于A、B；另一条和这两圆交于C、D，求证： $PA : PB = PC : PD$ 。

113、 $\triangle ABC$ 的角平分线AD，延长AD和外接圆交于E点，求证： $AD \cdot AE = AB \cdot AC$ 。

114、求证：三角形两边的乘积等于第三边上的高和外接圆直径的乘积。

115、正方形ABCD，AB的中点E，在AD上取一点F，使 $AF = \frac{1}{4}AD$ ，再引 $EG \perp CF$ ，垂足为G，求证： $EG^2 = CG \cdot FG$ 。

116、两圆相交于P、Q，这两圆的一条外公切线AB（A、B是切点），求证：直线PQ平分AB。

117、以AB为直径的半圆上取两点P、C，从P点引AB的垂线，垂足为D，直线AC、BC分别和直线PD交于E、F

点, 求证: $PD^2 = ED \cdot FD$ 。

118、 $\triangle ABC$ 的两条高 BE 和 CF , 求证: $\triangle ABC \sim \triangle AEF$ 。

119、平行四边形 $ABCD$, 从 A 点引直线和 CD 、 BC 的延长线分别交于 E 、 F 点, 求证: $DC : DE = BF : BC$ 。

120、 $\triangle ABC$, 在 AB 上取一点 D , 在 AC 上取一点 E , 使 $AD = AE$, 直线 DE 和 BC 边的延长线交于 P 点, 求证: $BP : CP = BD : CE$ 。

121、平行四边形 $ABCD$, 一线段 $EF \parallel BC$, 直线 BE 和 CF 交于 G ; 直线 AE 和 DF 交于 H , 求证: $GH \parallel AB$ 。

122、 $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, BC 的垂直平分线和 AB 、 AC (或它们的延长线) 分别交于 D 、 E 、 BC 的中点 M , 求证: $AM^2 = DM \cdot EM$ 。

123、 $\triangle ABC$, 中线 AD , 过 A 点引 $AX \parallel BC$, 在 AX 上取一点 P , 从 P 引直线和 AB 、 AD 、 AC 分别交于 E 、 F 、 G , 求证: $EF : EP = FG : GP$ 。

124、 $\triangle ABC$, 角平分线 AD , 求证: $BD : DC = AB : AC$ 。

125、 $\triangle ABC$, $\angle A$ 外角的平分线和 BC 的延长线交于 D 点, 求证: $BD : DC = AB : AC$ 。

126、 $\triangle ABC$, 中线 AD , $\angle ADB$ 的平分线和 AB 交于 E 点; $\angle ADC$ 的平分线和 AC 交于 F 点, 求证: $EF \parallel BC$ 。

127、在线段 AB 同侧的二线段 AC 和 BD , 并且 $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, 又 AD 和 BC 交于 M 点, 再引 $MN \perp AB$, 垂足是 N , 求证: NM 平分 $\angle CND$ 。

128、 $\triangle ABC$ 的内心是 I , 角平分线 AD , 求证: $AI : ID = (AB + AC) : BC$ 。

129、 $\triangle ABC$ 的中线 AD ，过 A 点引直线 $XY \parallel BC$ ，在 AD 上任取一点 P ，直线 BP 、 CP 和 XY 分别交于 E 、 F ，求证： $AE = AF$ 。

130、 $\triangle ABC$ 的角平分线 BE 和 CF ，如果 $FE \parallel BC$ ，求证： $AB = AC$ 。

131、 $\triangle ABC$ ，一直线和 AB 、 AC 、 BC 的延长线分别交于 D 、 E 、 F 点，如果 $AE : EC = BF : CF$ ，求证： $AD = BD$ 。

132、正方形 $ABCD$ ，从 A 点引射线和 CD 、 BC 的延长线分别交于 E 、 F ，再从 E 点引 BC 的平行线和 DF 交于 G 点，求证： $CE = EG$ 。

133、 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，以 AB 、 AC 各为一边向外侧作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$ ， CD 和 AB 交于 L ； BF 和 AC 交于 K ，求证： $AL = AK$ 。

134、 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，高 AD ，求证： $AB^2 : AC^2 = BD : DC$ 。

135、 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，底边 BC 上一点 M ，求证： $AB^2 - AM^2 = BM \cdot MC$ 。

136、求证：直角梯形的两条对角线的平方差等于两底的平方差。

137、正方形 $ABCD$ ， $\angle BAC$ 的平分线和 BC 交于 E 点，引 $EF \perp AC$ ，垂足为 F ，引 $FG \perp AB$ ，垂足为 G ，求证： $AB^2 = 2FG^2$ 。

138、 $\triangle ABC$ 的两高 AD 、 CF ，在 AB 上取一点 P ，使 $AP = AD$ ，再从 P 点引 BC 的平行线和 AC 交于 Q 点，求证： $PQ = CF$ 。

139、 $\triangle ABC$ ，在 AB 上取一点 D ，在 AC 上取一点 E ，使 $BD = CE$ ，直线 DE 和 BC 的延长线交于 F 点，求证： $AB : AC$

$= EF : DF$ (但 $AB \neq AC$)。

140、直角三角形 ABC ，斜边上的高 AD ， $\angle ABD$ 的平分线和 AD 交于 E 点； $\angle CAD$ 的平分线和 CD 交于 F 点，求证： $EF \parallel AC$ 。

141、 $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) 的角平分线 AD ， AD 的垂直平分线和 BC 的延长线交于 E 点，求证： $DE^2 = BE \cdot CE$ 。

142、 $\triangle ABC$ ， BC 的中点 D ，从 A 点引射线 $AX \parallel BC$ ，过 D 点引一直线，和 AB 的延长线、 AC 、 AX 分别交于 E 、 F 、 G 点，求证： $DF : FG = ED : EG$ 。

143、梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$)，过二对角线的交点 O 引和两底平行的直线，这条直线和两腰 AB 、 CD 分别交于 E 、 F 点，求证： $OE = OF$ 。

144、 $\triangle ABC$ 的中线 AD ，从 C 点任引一射线，和 AD 、 AB 分别交于 E 、 F 点，求证： $AE \cdot FB = 2AF \cdot DE$ 。

145、四边形 $ABCD$ ，对角线 AC 的中点 O ， OE 、 OF 、 OG 、 OH 分别是 $\angle AOB$ 、 $\angle BOC$ 、 $\angle COD$ 、 $\angle DOA$ 的平分线，分别和 AB 、 BC 、 CD 、 DA 交于 E 、 F 、 G 、 H 点，求证： $EF \parallel GH$ 。

146、圆的内接四边形 $ABCD$ ，延长 AD 、 BC 交于 P 点，求证： $PD \cdot AC = PC \cdot BD$ 。

147、圆 O 的互相垂直的二直径 AB 、 CD ，弦 CF 和 AB 交于 E 点，求证： $2OC^2 = CE \cdot CF$ 。

148、等腰三角形 ABC ，从顶点 A 引一直线和底边 BC 的延长线交于 M 点，和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 N 点，求证： AB 是 AM 和 AN 的比例中项。

149、圆的直径 AB ，弦 CD ，从 A 、 B 向 CD 引二垂线，垂足依次是 E 、 F ，求证： $AE \cdot BF = CE \cdot CF$ 。

150、元的内接四边形ABCD的二对角线交于P点，从P点引 $PE \perp AB$ ， $PF \perp CD$ ，垂足是E、F，求证： $PE : PF = AB : CD$ 。

151、元O的互相垂直的两条直径AB和CD，元O上一点M，直线CM、DM分别和直线AB交于E、F点，求证： $AO^2 = OE \cdot OF$ 。

152、正五边形ABCDE的二对角线AC和BE交于P点，求证：(i) $BC = PC$ ；(ii) PC是AC和AP的比例中项。

153、两元 O_1 、 O_2 相交于A、B，从A点引元 O_2 的切线和元 O_1 交于C点，从A点引元 O_1 的切线和元 O_2 交于D点，求证，AB是BC和BD的比例中项。

154、两元交于A、B，过公共弦AB上一点M引一直线和两元顺次交于P、Q、R、S，求证： $PQ : QM = RS : MR$ 。

155、从元O的圆心O向这元外的一直线引垂线，垂足为P，从P点引元O的切线PA，（切点是A），再从元O外这条直线上另一点Q引元O的切线QB，（切点是B）求证： $QB^2 = PQ^2 + PA^2$ 。

156、四点A、B、C、D，A、D在直线BC的同侧，如果 $\angle BAC = \angle BDC$ ，那么A、B、C、D四点在同一元上。

157、四边形ABCD，如果 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ ，那么四边形ABCD是元的内接四边形。

158、二线段AB和CD交于P点，如果 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ，那么这二线段的四个端点在同一元上。

159、 $\triangle ABC$ ，引射线AM（AM、AC在AB的两侧），如果 $\angle BAM = \angle C$ ，那么AM是 $\triangle ABC$ 的外接元的切线。