根据面向21世纪最新教材《微积分》编写

高等数学

学习指导与题解

主编 罗雪梅 高国成 张来亮 孟艳双

上册

Gaodengshuxue

浓缩高等数学精华

全面复习快捷高效

课后习题分类解答

单元测试逐级提高

考研真题寻根详解

一书在手得心应手

山东大学出版社

根据面向21世纪最新教材《微积分》编写

高 等 数 学

学习指导与题解

（上册）

主编 罗雪梅 高国成
张来亮 孟艳双

山东大学出版社

序

数学是人类理解世界及其发展的一把主要钥匙。长期以来，高等数学是大学理工科各专业（数学类除外）的重要基础课。由于近几十年来社会的迅速发展，在社会科学的许多领域里，不懂数学的人只能处于无所建树或望尘莫及的尴尬境地。国内已有好几所知名大学在人文、社会学科各专业中开设了高等数学课程，所以高等数学是大多数大学生入校后首先要接触的课程，就其难度、深度及讲课速度之快而言，是不能掉以轻心的。毋庸讳言，对本课程掌握的优劣程度，会直接影响到大学修业期间很多后继课程的学习，甚至还要深远得多。科学界、工程界和经济学界很多大师级的人物，数学功底都是非常深厚的。著名科学家伦琴（X 射线发现者）在回答科学工作者应具有什么素质时，就说过："第一是数学，第二是数学，第三还是数学。"兴匆匆地跨进大学校门的莘莘学子们，如果立志要更好地报效祖国，就应该下决心主动掌握好数学这把金钥匙，在高等数学的学习过程中汲取营养，积累能量。

再说考研，是本科生毕业后继续深造的重要途径，高等数学是很多专业的必考课程之一。学好了数学，就是前进道路上的助推器或引玉之砖，否则是拦路虎或绊脚石。从以上分析可见，学好高等数学应是大学生中普遍的心愿。在学习过程中如果有一本较好的辅导书伴随左右，提供启迪和帮助，应该是非常诱人的想法。

我校在几十年办学过程中，高等数学课程长期坚持使用同济大学编写的教材，积累了丰富的教学经验。前年同济应用数学系在原有教材的基础上又推出了颇具改革特色的《微积分》。我校部分教师在短时间内编写出了与新教材配套的辅导书《高等数学学习

指导与题解》，并由山东大学出版社出版。

本书各章节内容均分五部分，第一部分“知识网络图”和第二部分“重点、难点及理解记忆方法”，对学生学完一章后进行小结复习，会有较大帮助。其编写方式新颖，摒弃了把定义、定理罗列重叙的写法，而是用图表的方法，体现出知识的整体性、关联性和渗透性，并提供了对重点、难点的理解、记忆技巧，有助于提高学习效率。

后三部分都是关于习题的。亲自动手动脑解答一批习题，包括一些颇费心思的难题，是学好数学、培养能力和开拓思维的必不可缺的手段。求解数学问题是毅力、智力的操练和展示，滥做和瞎抄均无济于事。每做一批题目，总得从中悟出点有益的东西来。本书各章第三部分“习题分类解答”，对一批具有代表性与典型性的习题作了分类剖析解答，所使用的方法、技巧和思路，若能用心体会，定能起到触类旁通、举一反三的作用。第四部分是自检自测题，第五部分是为有志于考研的学生准备的，是一份挺好的复习参考资料。

本书的出版，希望能得到广大读者的喜欢，给朋友们带来方便，带来帮助，更希望得到大家的关心与指正。

诗云：“嘤其鸣矣，求其友声。”

袁云耀

2001 年 5 月于山东科技大学济南校区

前　言

高等数学是工科院校的一门重点基础课,它在各个学科领域中的重要性是有目共睹的,它对培养适应新世纪各类工程技术人才的数学素质起着举足轻重的作用。但是近几年摆在广大教师和学生面前的却是一个越来越突出的矛盾:一方面数学课程的学时越来越少,另一方面各科后继专业课及考研对高等数学的要求却越来越高。教育部也已把《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》立为专项,并已出版了面向21世纪课程教材《微积分》(上、下册)。为了有效地解决上述矛盾,同时帮助广大师生跟上改革的步伐,我们编写了这套《高等数学学习指导与题解》(上、下册)。本书主要配合同济大学应用数学系编写的面向21世纪课程教材《微积分》,同时也可作为同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第四版)的教学参考书和工科学生的学习指导书。

本书分上、下两册,主要包括一元函数微积分、微分方程、空间解析几何、多元函数微积分以及无穷级数等内容,共九章。每章由五部分组成:

第一部分是"知识网络图"。它以简洁、直观的图文综述全章概貌,勾画整体轮廓,从而使读者能一览全章,用最短的时间把握各部分内容之间的联系。

第二部分是"重点、难点及理解记忆方法"。这部分采用表格的形式分类列出,既可以使读者全面复习各节内容,又将重点、难点及理解、记忆的技巧穿插其中,使读者有一种赏心悦目的感受,从而大大提高学习效率。

第三部分是"习题分类解答指导"。本书对同济大学应用数学

系编写的面向21世纪课程教材《微积分》的部分习题，其中很多习题也是同济大学《高等数学》(第四版)的课后习题，进行了分类解答，读者可从这部分学到高等数学中的各种基本方法、技巧及分析问题、解决问题的思路。同时这一部分还在容易出现问题的地方加以提醒，目的一是使读者引以为戒，二是少走弯路，减少失误。

第四部分是"自测题及答案"。本书每章后面给出了三套单元测试题(初级、中级、能力测试题)，按最基本的要求、适当提高、较高要求三个层次给出，读者可结合自己的实际情况选择一套、两套或三套完成。另外上、下册还各给出了三套综合测试题。读者可用这些测试题检验自己的学习情况，随时作出适当调整。

第五部分是"1992年～2001年历届考研真题解析和寻根溯源"。对每道考研试题所涉及的知识点都进行了寻根求源，有利于读者找出自己存在的弱点，并进行有针对性的复习和提高。

参加本书编写的编委有曹秀娟、李振波、宋治涛、郑艳琳、刘晓妍、马燕，另外他们还做了大量的书稿输入计算机等工作。

本书承蒙袁云耀教授在百忙之中抽时间审阅，并撰写了序言。在此向袁云耀教授表示衷心的感谢。

本书的编写还得到了山东科技大学济南校区公共课部领导和数学教研室全体老师的大力支持，也得到了山东大学出版社的鼎力相助，在此深表感谢。

在编写过程中，我们参考了许多书籍，限于篇幅，在书末只列出了部分参考文献，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，时间仓促，不足之处一定难免，恳请广大读者指正。

编　者

2001.3.22

目　　录

第一章　极限与连续

1.1　知识网络图

极限与连续知识网络图见图 1-1.

- 极限与连续
  - 极限
    - 数列极限
      - 数列
      - $\varepsilon-N$ 定义
      - 性质(惟一性、有界性、保号性、归并性)
    - 函数极限
      - $x\to x_0$ 时,$\varepsilon-\delta$ 定义,水平渐进线,
      - 左右极限定义及与极限的关系
      - $x\to\infty(\pm\infty)$时 $\varepsilon-X$ 定义及三者间的关系
    - 无穷大(小)量
      - 无穷小量
        - 定义,性质
        - 无穷小的比较(高阶无穷小、低阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、K 阶无穷小)
      - 无穷大量
        - 定义,性质
        - 无穷大与无穷小的关系
    - 极限运算法则
      - 四则运算法则
      - 反函数、复合函数极限运算法则
    - 极限存在准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$
      - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$
  - 连续
    - 连续性
      - 定义
        - $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
        - $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$
        - $\varepsilon-\delta$ 定义
      - 左右连续定义
      - 间断点
        - 定义
        - 分类
          - 第一类(可去型、跳跃型)
          - 第二类(无穷型、振荡型)
      - 区间上连续函数
      - 初等函数连续性
      - 连续函数的运算(四则运算,反函数、复合函数的连续性)
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最大值、最小值存在定理,有界性定理
      - 零点定理、介值定理

图 1-1

1.2 主要内容、重点、难点及记忆方法

极限与连续主要内容、重点、难点及理解记忆方法见表 1-1 至表1-10.

表 1-1 各种极限($\varepsilon-\delta(N,X)$)定义(以下 a,x_0 均为有限值)

分类			定义		
数列极限		$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$	对于∀ $\varepsilon>0$	∃ $N>0$,当 $n>N$ 时,恒有	$\|x_n-a\|<\varepsilon$
		$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$	对于∀ $M>0$		$\|x_n\|>M$
		$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$			$x_n>M$
		$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$			$x_n<-M$
函数极限	$x\to x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$	对于∀ $\varepsilon>0$	∃ $\delta>0$,当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,恒有	$\|f(x)-a\|<\varepsilon$
		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$			$\|f(x)\|>M$
		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$			$f(x)>M$
		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$			$f(x)<-M$
	$x\to\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$	对于∀ $\varepsilon>0$	∃ $X>0$,当 $\|x\|>X$ 时,恒有	$\|f(x)-a\|<\delta$
		$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	对于∀ $M>0$		$\|f(x)\|>M$
		$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$			$f(x)>M$
		$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$			$f(x)<-M$
	$x\to+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$	对于∀ $\varepsilon>0$	∃ $X>0$,当 $x>X$ 时,恒有	$\|f(x)-a\|<\varepsilon$
		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$	对于∀ $M>0$		$\|f(x)\|>M$
		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$			$f(x)>M$
		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$			$f(x)<-M$
	$x\to-\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$	对于∀ $\varepsilon>0$	∃ $X>0$,当 $x<-X$ 时,恒有	$\|f(x)-a\|<\varepsilon$
		$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$	对于∀ $M>0$		$\|f(x)\|>M$
		$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$			$f(x)>M$
		$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$			$f(x)<-M$

续表

分类			定义			
函数极限	单侧极限	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$	对于$\forall\ \varepsilon>0$	$\exists\ \delta>0$	当 $0<x-x_0<\delta$ 时恒有	$\|f(x)-a\|<\varepsilon$
		$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$			当 $0<x_0-x<\delta$ 时恒有	

表 1-2　极限的性质

性质	数列极限		函数极限	
惟一性	若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在	则极限值惟一	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$)存在	则极限值惟一
有界性		则数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界		则在点 x_0 的某去心邻域内(或当$\|x\|$大于某正数时)，函数 $f(x)$有界
保号性	若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$)	则存在 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$)	则在点 x_0 的某去心邻域内 $f(x)>0$(或 $f(x)>0$)
			若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$)	则存在 $X>0$，使得在无穷区间$(-\infty,-X)$和$(X,+\infty)$内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)
归并性	若数列收敛，那么它的子数列也收敛，并且收敛于同一数值		设极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$)存在，数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是函数 $f(x)$定义域中的数列，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$)则相应的函数值数列$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$(或 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$)	

表 1-3　极限存在的判别准则

数列极限存在性	夹逼准则	设数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$
	单调有界收敛准则	单调递增有上界的数列必有极限
		单调递减有下界的数列必有极限
	无穷小判别法	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow x_n=a+\alpha$　（其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=0$）
函数极限存在性	夹逼准则	设 $x\in \mathring{U}(x_0,r)$或($\lvert x\rvert>M$ 时)，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$\lim g(x)=\lim h(x)=a$，则 $\lim f(x)=a$
	单侧极限判别法	设 $f(x)$在 x_0的某去心邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$
	无穷小判别法	$\lim f(x)=a \Leftrightarrow f(x)=a+\alpha$（其中 α 是同一过程中的无穷小）

表 1-4　两个重要极限

基本形式	变　型	特　点	注　意
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ 当 $x\to a$ 时，$f(x)\to 0$	无穷小的正弦 / 无穷小 $\dfrac{0}{0}$型	分子、分母中 $f(x)$ 必须统一，包括系数和正负号
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{1}{g(x)}\right)^{g(x)}=e$ 当 $x\to a$ 时，$g(x)\to\infty$ $\lim\limits_{x\to a}(1+h(x))^{\frac{1}{h(x)}}=e$， 当 $x\to a$ 时，$h(x)\to 0$	1^{∞}型	$g(x)$，$h(x)$形式上一定要统一，包括正负号

表 1-5　连续的定义

<table>
<tr><th>前　提</th><th>三个定义</th><th>充要条件</th></tr>
<tr><td rowspan="3">设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义</td><td>若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续</td><td rowspan="3">$f(x)$在点 x_0 连续$\Leftrightarrow$在点 x_0 左连续且右连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$</td></tr>
<tr><td>对于$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$ 当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$则称 $f(x)$在点 x_0 连续</td></tr>
<tr><td>若在 x_0 点有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 则称 $f(x)$在点 x_0 连续</td></tr>
</table>

表 1-6　间断点分类

<table>
<tr><td rowspan="4">函数$f(x)$在区间中的不连续点 x_0 称为函数的间断点</td><td rowspan="2">若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$都存在，则称 x_0 为第一类间断点</td><td>若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$但与 $f(x_0)$不相等或 $f(x_0)$不存在，则称 x_0 为可去型间断点</td></tr>
<tr><td>若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$则称 x_0 为跳跃型间断点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$中至少有一个不存在，则称 x_0 为第二类间断点</td><td>若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$中至少有一个为∞，则称 x_0 为无穷型间断点</td></tr>
<tr><td>若 $x\to x_0$ 的过程中，函数值 $f(x)$无限次地在两个不同的数之间变动，则称 x_0 为振荡型间断点</td></tr>
</table>

表 1 7　闭区间上连续函数的性质

	定　义	性　　质	说　明
函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续(记作 $f\in C[a,b]$)	函数 $f(x)$ 在开区 (a,b) 内每一点处都连续,且在 a 处右连续,在 b 处左连续	1. 最大值最小值存在定理 $f\in C[a,b]$,$\exists\ \xi,\eta\in[a,b]$,使得 $\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=f(\xi)$, $\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=f(\eta)$,	这几条定理中,闭区间上连续的要求是本质的,不可轻易替换
		2. 有界性定理 $f\in C[a,b]\Rightarrow f\in B[a,b]$	
		3. 零点定理 $f\in C[a,b]$,且 $f(a)f(b)<0\Rightarrow\exists\ x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=0$	
		4. 介值定理 $f\in C[a,b]$,$f(a)\neq f(b)$,μ 介于 $f(a)$,$f(b)$之间 $\Rightarrow\exists\ x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=\mu$	
		5. 中间值定理 $f\in C[a,b]$,则对于 $\forall\ \mu\in[\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}]$,必 $\exists\ x_0\in[a,b]$使 $f(x_0)=\mu$	
		6. $f\in C[a,b]$且 $f(x)\neq$常数$\Rightarrow f[a,b]$是闭区间	

表 1-8　无穷大,无穷小的定义,性质

定　义		性　　质	说　　明
无穷小量	极限为 0 的变量称为无穷小量	无穷小量的绝对值仍是无穷小量	
		有限个无穷小的和,差,积仍是无穷小量	有限个改为无限个后此性质不再成立
		无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量	
无穷大量	极限为无穷(包括 $+\infty$, $-\infty$)的变量称为无穷大量	若变量不取零值,则变量为无穷大量$\Leftrightarrow$它的倒数为无穷小量	无穷小的性质对无穷大不一定成立

表 1-9　无穷小的比较

前　提	定　义	记　号
设 α,β 是在同一自变量的同一变化过程中的两个无穷小，且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 表示这个变化过程中的极限	若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小	$\beta=o(\alpha)$
	若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\ (c\neq0)$，则称 β 是与 α 同阶的无穷小	
	若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 是与 α 等价的无穷小	$\alpha\sim\beta$
	若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\ (c\neq0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小 $(k>0)$	

表 1-10　常用等价无穷小（$x\to0$ 时）

$\sin x\sim x$	$\tan x\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$	$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$	$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$
$\arcsin x\sim x$	$\arctan x\sim x$	$e^x-1\sim x$	$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$	$a^x-1\sim\ln a\cdot x$

1.3　极限与连续习题连解

一、极　限

1. 证明数列极限存在的常用方法

(1) 利用极限的定义

例 1　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，并举例说明：如果数列 $|x_n|$ 有极限，数列 x_n 未必有极限.

分析：本题需证：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，恒有 $||x_n|-|a||<\varepsilon$，

这里 N 的存在性需从条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 导出来.

证明：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由极限定义知：对 $\forall\ \varepsilon>0$，必存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

由不等式的知识：$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$，故当 $n>N$ 时，必

有$||x_n|-|a||<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$得证.

反例:设$x_n=(-1)^{n+1}$,则数列$\{|x_n|\}$有极限1,但数列x_n却没有极限.

例 2 设数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,试证:$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明:由数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有界知:存在$M>0$,使得$|x_n|<M$ $(n=1,2,\cdots)$.

设ε是任意给定的正数,则由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$知:对$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}>0$,存在$N$,当$n>N$时,恒有$|y_n|=|y_n-0|<\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{M}$.

于是对上述ε,当$n>N$时,就有$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.故$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$得证.

例 3 用极限定义证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=0$.

证明:任意给定$\varepsilon>0$,由于$\left|\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x^2|}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,故要使$\left|\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,即$x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,因此取$X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$,则当$x>X$时,就有$\left|\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$.这就证明了$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=0$.

例 4 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,证明$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$;并举例说明:若当$x\to x_0$时$|f(x)|$有极限,$f(x)$未必有极限.

证明:对任给的$\varepsilon>0$,由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$知:存在$\delta>0$,当

$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,

由不等式$||f(x)|-|A||\leqslant|f(x)-A|$可知$||f(x)|-|A||<\varepsilon$,

故$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$得证.

但若 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$，却未必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

例如设 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$，而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 却不存在.

例 5 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.

证明：任意给定 $\varepsilon>0$，要使 $|\ln x-0|=|\ln x|<\varepsilon$，只要

$-\varepsilon<\ln x<\varepsilon$，即 $e^{-\varepsilon}<x<e^{\varepsilon}$ 或 $e^{-\varepsilon}-1<x-1<e^{\varepsilon}-1$，

取 $\delta=\min\{e^{\varepsilon}-1,|e^{-\varepsilon}-1|\}=\min\left\{e^{\varepsilon}-1,\dfrac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\varepsilon}}\right\}=e^{\varepsilon}-1$，

则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，必有 $|\ln x-0|<\varepsilon$，

故 $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$ 得证.

例 6 证明收敛数列的有界性：设数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，则存在常数 M，使所有的 x_n 均满足 $|x_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$.

证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对 $\varepsilon=1$，$\exists$ N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<1$，因此有 $|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$，取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots|x_n|,1+|a|\}$，

则对所有的 $x_n(n=1,2,\cdots)$，均有 $|x_n|\leqslant M$，证毕.

例 7 证明收敛数列的保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

证明：若 $A>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，得：$x_n>A-\varepsilon=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}>0$.

当 $A<0$ 时，类似可证.

例 8 对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a(k\to\infty)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明：任意给定 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，故 $\exists$ $K_1>0$，当 $k>K_1$ 时，$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$；