# 高等数学习题集题解

（二）



一九八五年三月

# 第五章　导数的应用

## 函数的单调性、极值、最值

5.1　试证函数$y=2x^3+3x^2-12x+1$在区间$(-2,1)$上单调减少。

**证**　函数$y=y(x)$在$[-2,1]$上连续，$(-2,1)$上可导，$y'=6x^2+6x-12$，$y'(-2)=y'(1)=0$．当$-2<x<1$时$y'<0$，故函数$y$在区间$(-2,1)$上单调减少。

5.2 试证明函数$y=5+\sqrt{2x-x^2}$在区间$(0,1)$为递增函数，而在区间$(1,2)$为递减函数。

**证**　$y'=(1-x)(2x-x^2)^{-1/2}$，$y'(1)=0$又$x=0,2$时$y'$不存在，$0<x<1$时$y'>0$，$1<x<2$时$y'<0$，所以函数$y$在区间$(0,1)$为递增函数，而在区间$(1,2)$为递减函数。

5.3　判定函数$y=x+\cos x$在$0\leqslant x\leqslant 2\pi$的单调性。

**解**　$y'=1-\sin x\geqslant 0$，等号仅当$x=\dfrac{\pi}{2}$时成立$(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，函数单调上升。

5.4 求下列各函数的单调区间：

(1)$y=(x+2)^2(x-1)^3$

**解**　$y'=(x+2)(x-1)^2(5x+4)$，令$y'=0$得$x=-2$，$-\dfrac{4}{5}$，1．$x\in($

当$x<-2$及$x>-$

(2) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$

**解** $y'=-60(2x^2-3x+1)[x(4x^2-9x+6)]^{-2}$，$y'$的零点为1/2，1；$y'$不存在的点为0，在$(-\infty, 0)$，$(0, \frac{1}{2})$，$(1, +\infty)$上$y'<0$，因此函数单调减少。在$(\frac{1}{2}, 1)$上$y'>0$，因此函数单调增加。

(3) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}$ $(a>0)$

**解** $y'=2(2a-3x)/[3\sqrt[3]{(2x-a)^2}(a-x)]$

$y'(2a/3)=0$，$x=a/2$和$a$时$y'$不存在，在$(-\infty, a/2)$，$(a/2, 2a/3)$，$(a, +\infty)$上$y'>0$，故在$(-\infty, 2a/3)$ $(a, +\infty)$上函数单调增加；在$(2a/3, a)$上$y'<0$，函数单调减少。

(4) $y=\sqrt{x}/(x+100)$

**解** $y'=\frac{1}{2}(100-x)x^{-1/2}(x+100)^{-2}$，在$(0, 100)$上$y'>0$，函数单调增加；在$(100, +\infty)$上$y'<0$，函数单调减少。

(5) $y=x^4-2x^2-5$

**解** $y'=4x(x^2-1)$，在$(-\infty, -1)$，及$(0, 1)$上$y'<0$，函数单调减少；在$(-1, 0)$及$(1, +\infty)$上$y'>0$，函数单调增加。

(6) $y=x^n e^{-x}$ $(n>0, x\geqslant 0)$

**解** $y'=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$，$(0, n)$上$y'>0$，函数单调增加；$(n, +\infty)$上$y'<0$，函数单调减少。

(7) $y=x-\ln(1+x)$

**解** $y'=x(1+x)^{-1}$，在$(-1, 0)$上$y'<0$，

函数单调下降；在 $(0, +\infty)$ 上 $y'>0$，函数单调上升。

(8) $y=\sin ax-ax\ (a>0)$

解 $y'=a(\cos ax-1)\leqslant 0$，在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调下降。

(9) $y=x/(1+x^2)$

解 $y'=(1-x^2)(1+x^2)^{-2}$，在 $(-\infty, -1)$ 及 $(1, +\infty)$ 上 $y'<0$，函数单调下降；在 $(-1, 1)$ 上 $y'>0$，函数单调上升。

(10) $y=x\sqrt{ax-x^2}\ (a>0)$

解 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{x}\ (3a-4x)\cdot(a-x)^{-1/2}$，在 $(0, 3a/4)$ 上 $y'>0$，函数单调上升；在 $(3a/4, a)$ 上 $y'<0$，函数单调下降。

(11) $y=2x^2-\sin x$

解 $y'=4x-\cos x$，$y''=4+\sin x>0$，$y'$ 严格上升，$y'\to+\infty\ (x\to+\infty)$，$y'\to-\infty\ (x\to-\infty)$，因此，$y'=0$ 只有一个实根，设为 $\eta$，可以估计出 $0<\eta<\frac{\pi}{6}$ 故 $x<\eta$ 时 $y'<0$，函数单调下降；$x>\eta$ 时 $y'>0$，函数单调上升

(12) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解 $y=(1+x^2)^{-1/2}>0$，在 $(-\infty, +\infty)$ 上函数单调上升。

(13) $y=x/\ln x$

解 $y'=(\ln x-1)(\ln x)^{-2}$，$y'(e)=0$，在 $(0, 1)$ 及 $(1, e)$ 上 $y'<0$，函数单调下降；在 $(e, +\infty)$ 上 $y'>0$；函数单调上升。

(14) $y=x^2 2^{-x}$

**解** $y'=x(2-x\ln 2)2^{-x}$，在$(-\infty,0)$及$(2/\ln 2,\infty)$上$y'<0$，函数单调下降；在$(0,2/\ln 2)$上$y'>0$，函数单调上升。

5.5 研究下列函数的极值（求出极值点和极值）：

(1) $y=2+x-x^2$

**解** $y'=1-2x$，$y'(\frac{1}{2})=0$，$y''=-2<0$，极大值$y(\frac{1}{2})=2\frac{1}{4}$。

(2) $y=x^3-6x^2+9x-4$

**解** $y'=3x^2-12x+9$，$y'(1)=y'(3)=0$，$y''=6x-12$，$y''(1)<0$，$y''(3)>0$，所以极大值$y(1)=0$，极小值$y(3)=-4$。

(3) $y=-x^4+2x^2$

**解** $y'=-4x^3+4x$，$y''=-12x^2+4$，$y'(0)=y'(1)=y'(-1)=0$，$y''(0)>0$，$y''(1)<0$，$y''(-1)<0$，所以极大值$y(1)=y(-1)=1$，极小值$y(0)=0$。

(4) $y=x^5-5x^3+10x-3$

**解** $y'=5x^4-15x^2+10$，$y'$之零点为$\pm 1$，$\pm\sqrt{2}$，$y''(1)<0$，$y''(-1)>0$，$y''(\sqrt{2})>0$，$y''(-\sqrt{2})<0$，极大值$y(1)=3$，$y(-\sqrt{2})=-3-4\sqrt{2}$，极小值$y(-1)=-9$，$y(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-3$

(5) $y=x(x-1)^2(x-2)^3$

**解** $y'=2(x-1)(x-2)^2(3x^2-5x+1)$，$y'$的零点为1，2，$(5\pm\sqrt{13})/6$，$x$在1的邻域内从左变到右，$y'$的符号从正变到负，所以极大值$y(1)=0$，在$x=2$的邻

域内$y'$不变号，2 不是极值点，类似可知极小值$y\left(\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}\right)$

$=\frac{-587\pm 143\sqrt{13}}{2\times 3^6}$

(6) $y=x-e^x$

**解** $y'=1-e^x$，$y''=-e^x$，$y'(0)=0$，$y''(0)<0$，极大值$y(0)=-1$。

(7) $y=x^m(1-x)^n$ （m，n均为正整数）

**解** $y'=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-nx)$，$y'(0)=y'(1)=y'\left(\frac{m}{m+n}\right)=0$，m为偶数时，类似于(5)题知极小值$y(0)=0$；n为偶数时，同样可知极小值$y(1)=0$；m，n为任意正整数时，极大值$y\left(\frac{m}{m+n}\right)=m^m n^n(m+n)^{-(m+n)}$

(8) $y=\sqrt{x^2+4x-5}$

**解** 定义域$x\geqslant 1$及$x\leqslant -5$，$y'=(x+2)(x^2+4x-5)^{1/2}$

$y'$不存在的点为1，$-5$，当$x>1$时$y'>0$，极小值$y(1)=0$；$x<-5$时，$y'<0$，极小值$y(-5)=0$。

(9) $y=10\sqrt[3]{(x-1)^2}/(x+9)$

**解** $y'=-\frac{10}{3}(x-21)(x+9)^{-2}(x-1)^{-1/3}$，$x=21$时$y'=0$，$x=1$时$y'$不存在，x从21的左邻域变到右邻域，$y'$的符号从正变为负，极大值$y(21)=\frac{1}{8}\sqrt[3]{400}$，x从1的左边变到右边，$y'$的符号由负变到正，极小值$y(1)=0$

(10) $y=a+(b-x)^4$

**解** 极小值$y(b)=a$

(11) $y=(3x^2+4x+4)/(x^2+x+1)$

解　$y'=-x(x+2)(x^2+x+1)^{-2}$，$y'$的零点为0，$-2$，与(5)题类似可知，极大：$y(0)=4$；极小$y(-2)=8/3$。

(12) $y=x^2/(x^4+4)$

**解**　$y'=2x(4-x^4)(x^4+4)^{-2}$，$y'(0)=y'(\pm\sqrt{2})=0$，同(5)题类似可知极大值$y(-\sqrt{2})=y(\sqrt{2})=1/4$，极小值$y(0)=0$

(13) $y=\mathrm{ch}\,x$

**解**　$y'=\mathrm{sh}\,x$，$y'(0)=0$，$y''(0)>0$，极小值$y(0)=1$。

(14) $y=x-\ln(1+x)$

**解**　$y'=x(1+x)^{-1}$，可知极小值$y(0)=0$，

(15) $y=x-\ln(1+x^2)$

**解**　$y'=(x-1)^2(1+x^2)^{-1}$，$y'$在1附近不变号，无极值。

(16) $y=x^2\ln x$

**解**　$y'=x(2\ln x+1)$，$y'(e^{-1/2})=0$，$y''(e^{-1/2})>0$，极小值$y(e^{-1/2})=-\dfrac{1}{2e}$

(17) $y=e^x\cos x$

**解**　$y'=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$y'$的零点为$2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi$，与(5)类似可知极大值$y\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$，极小值$y\left(2k\pi+\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}$，k为整

数。

(18) $y=x+\sqrt{1-x}$

**解** $y'=1-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$，$y'\left(\dfrac{3}{4}\right)=0$，$x=1$ 时 $y'$不存在，与(5)题类似可知极大值$y\left(\dfrac{3}{4}\right)=5/4$，函数定义域为$x\leqslant 1$，当$3/4<x<1$时$y'<0$，所以$x=1$是极小值点，极小值 $y(1)=1$。

(19) $y=x^2e^{-x}$

**解** $y'=xe^{-x}(2-x)$，可知极小值$y(0)=0$，极大值$y(2)=4e^{-2}$。

(2) $y=\sqrt{x}\ln x$

**解** $y'=(2+\ln x)/(2\sqrt{x})$，与(18)题类似知极小值$y(e^{-2})=-2e^{-1}$，极大值$y(0^+)=0$

(21) $y=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$

**解** $y'=\dfrac{4}{3}(1-x)(2x-x^2)^{-1/3}$，$y'(1)=0$，$y'$不存在的点0，2.与(9)题类似知极大值$y(1)=1$，极小值$y(0)=y(2)=0$

(22) $y=x^x$

**解** $y'=x^x(\ln x+1)$，$y'(e^{-1})=0$，可知极小值$y(e^{-1})=e^{-1/e}$。又$0<x<e^{-1}$时，$y'<0$，$y\to 1$ $(x\to 0^+)$，故极大值$y(0^+)=1$

(23) $y=\sin x+\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

**解** $y'=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，类似于(5)题知极大值

$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

(24) $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$

**解** $y'=(x^2-x+1)[x(1+x^2)]^{-1}>0\quad(x>0)$，无极值

(25) $y=(x-1)^3(2x+3)^2$

**解** $y'=5(x-1)^2(2x+3)(2x+1)$，类似于(9)题知极小值 $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-27/2$，极大值 $y\left(-\frac{3}{2}\right)=0$

(26) $y=2x-\ln(4x^2)$

**解** $y'=2-2/x$，易知极小值 $y(1)=2-4\ln 2$

(27) $y=3-2(x+1)^{1/3}$

**解** $y'=-\frac{2}{3}(x+1)^{-2/3}$，$y'(-1)$不存在，$y'$在$x=-1$附近不变号，无极值。

(28) $y=(x-2)(3-x)x^{-2}$

**解** $y'=x^{-3}(-5x+12)$，类似于(9)题知，极大值 $y(12/5)=1/24$

(29) $y=2e^x+e^{-x}$

**解** $y'=2e^x-e^{-x}$，$y''=2e^x+e^{-x}>0$，极小值 $y\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=2$

(30) $y=x+\operatorname{tg} x$

**解** $y'=1+\cos^{-2}x>0$，$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，无极值

(31) $y=e^{-x}-e^{-2x}$

**解** $y'=2e^{-2x}-e^{-x}$，$y'(\ln 2)=0$，$y''(\ln 2)<0$，极大值 $y(\ln 2)=1/4$

(32) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$

**解** $y'=-3\sqrt{2}\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，类似于(5)题得极大值$y(2k\pi)=y\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$，$y\left(2k\pi+\frac{5}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}/2$；极小值$y\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}/2$，$y(2k\pi+\pi)=y\left(2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)=-1$，K为整数。

(33) $y=|x|$

**解** 极小值$y(0)=0$

(34) $=x^{-1}\ln^2 x$

**解** $y'=x^{-2}(2-\ln x)\ln x$，类似于(5)题得极小值$y(1)=0$，极大值$y(e^2)=4e^{-2}$

(35) $y=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

**解** $y'=(1-x)(1+x^2)^{-1}$，极大值$y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

(36)* $y=|x|e^{-|x-1|}$

**解**

$$y'=\begin{cases}(1-x)e^{-x+1} & (x>1)\\ (x+1)e^{x-1} & (0<x<1)\\ -(x+1)e^{x-1} & (x<0)\end{cases}$$

$y'(-1)=0$，$y'$不存在的点为0，1，类似于(9)题得极大值$y(1)=1$，$y(-1)=e^{-2}$，极小值$y(0)=0$

(37) $y=10/(1+\sin^2 x)$

**解** $y'=-10\sin 2x(1+\sin^2 x)^{-2}$，类似于(5)题得极小值$y\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=5$，极大值$y(k\pi)=10$，K为整数。

(38) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}(x+a)}\quad\left(0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

**解** $y'=\sin a\cos(2x+a)\cos^{-2}x\sin^{-2}(x+a)$，类似于9题得极大值$y\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{a}{2}\right)=\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}\right)^2\left(1+\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}\right)^{-2}$

(39)* $y=\begin{cases}x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

**解** 显然$y(0)=0$是极小值

$x\neq 0$时，$y'=2x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)-\cos\dfrac{1}{x}$，$x=0$时由定义求得$y'=0$，$y'$在0点不连续，不难知道当$|x|>\frac{1}{2}$时$y'=0$无实根。当$x\to 0$时，$2x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)\to 0$，$-\cos\dfrac{1}{x}$在$+1$和$-1$之间无穷次振荡，因而$y'$有无穷个零点，而且$y'$在这些零点左右异号。既有这样的零点，在这些零点的左边$y'>0$，在右边$y'<0$；又有这样的零点，在这些零点的左边$y'<0$，在右边$y'>0$所以$y$在0附近无数次取得极大值和极小值。

(40) $y=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

**解** $y'=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)$，$y'=0\ (x=0)$，$x<0$时$y'<0$，$x>0$时$y'>0$，极小值$y(0)=0$

5.6 函数$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$的系数满足什么关系时，这个函数没有极值？

**解** $y'=3ax^2+2bx+c$，$b^2<3ac$时$y'=0$无实根，

函数无极值。

5.7 a为何值时，$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$在$x=\frac{\pi}{3}$处具有极值？求出此极值，并说明是极大还是极小。

**解** $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a}{2}-1$，$a=2$时$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)<0$，$f(x)$在$x=\frac{\pi}{3}$处有极大值$\sqrt{3}$

5.8* 求下列各方程中隐函数y的极值：

(1) $y^2+2x^2y+4x-3=0$

**解** 对x求导得$y'=-2(xy+1)(y+x^2)^{-1}$，令$y'=0$得$xy=-1$，以$y=-\frac{1}{x}$代入函数式得$x=1$，$-\frac{1}{2}$，由$xy=-1$得$y=-1$，2。$y''\left(-\frac{1}{2}\right)=-2y(y+x^2)^{-1}\Big|_{\substack{x=-\frac{1}{2}\\ y=2}}<0\left(利用了y'\Big|_{\substack{x=-\frac{1}{2}\\ y=2}}=0\right)$，极大值$y\left(-\frac{1}{2}\right)=2$，$x=1$时$y'$不存在；设$\alpha$是充分小的正数，令$x=1-\alpha$，代入函数求得$y=-1+2\alpha-\alpha^2\pm\alpha\sqrt{\alpha^2+24-16\alpha}$不难知道，当$\alpha$充分小时，得到的两个y值一个大于$-1$，一个小于$-1$，所以$x=1$不是极值点。

(2) $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$

**解** 仿上可得极大值$y(1)=1$

(3) $x^3+y^3-3axy=0$ $(x>0)$

**解** 与(1)类似并利用5.17题的结果得极大值$y(a\sqrt[3]{2})=a\sqrt[3]{4}$

5.9* 求由参数方程$x=t^3+3t+1$，$y=t^3-3t+1$表示

的函数$y=y(x)$的极值。

**解** $y'_x=(t^2-1)(t^2+1)^{-1}$，$t=\pm 1$时$y'_x=0$。$x|_{t=1}=5$，$t$在1的邻域从左变到右，$x$在5的邻域从左变到右，$y'_x$的符号从负变为正，所以极小值$y|_{t=1}=-1$。类似知极大值$y|_{t=-1}=3$。

5.10* 求由参数方程$x=te^t$，$y=te^{-t}$表示的函数$y=y(x)$的极值。

**解** $y'_x=(1-t)(1+t)^{-1}e^{-2t}$，$t=1$时$y'_x=0$，$t=-1$时$y'_x$不存在，$y'_t=e^{-t}(1-t)$，在$t=-1$附近$y'_t>0$，$y$是$t$的严格单调增函数，所以$t=-1$不会使$y$取极值，同5.9题知极大值$y|_{t=1}=e^{-1}$

5.11 求下列各函数在所给区间上的最大值和最小值：

(1) $y=x+2\sqrt{x}$，$[0,4]$；

**解** $y'=1+x^{-1/2}$，$y(0)=0$即为最小值，$y(4)=8$为最大值

(2) $y=x^2-4x+6$，$[-3,10]$；

**解** $y'=2x-4$，$y'(2)=0$，$y(2)=2$，$y(-3)=27$，$y(10)=66$，$y_{max}=66$，$y_{min}=2$。

(3) $y=x+x^{-1}$，$[0.01,100]$；

**解** $y'=1-x^{-2}$，$y'(1)=0$，$y(1)=2$，$y(0.01)=100.01$，$y(100)=100.01$，$y_{max}=100.01$，$y_{min}=2$。

(4) $y=\sqrt{5-4x}$，$[-1,1]$；

**解** $y'=-2(5-4x)^{-1/2}<0$，$y(1)=1$，$y(-1)=3$，$y_{max}=3$，$y_{min}=1$。

(5) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$，$[-1,2]$；

**解** $y'=5x^4-20x^3+15x^2$，在$[-1,2]$上$y'(0)=y'$

$(1)=0$， $y(0)=1$， $y(1)=2$， $y(-1)=-10$， $y(2)=-7$， $y_{max}=2$， $y_{min}=-10$，

(6) $y=\sqrt{100-x^2}$， $[-6,8]$；

**解** $y'=-x(100-x^2)^{-\frac{1}{2}}$， $y'(0)=0$， $y(0)=10$， $y(-6)=8$， $y(8)=6$， $y_{max}=10$， $y_{min}=6$

(7) $y=|x^2-3x+2|$， $[-10,10]$；

**解** $y'=2x-3$，$(x>2\text{或}x<1)$，$y'=3-2x$，$(1<x<2)$，$y'\left(\frac{3}{2}\right)=0$，$x=1,2$时$y'$不存在，$y(1)=y(2)=0$，

$y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}$， $y(-10)=132$， $y(10)=72$， $y_{max}=132$，

$y_{min}=0$

(8) $y=(x-1)(x+1)^{-1}$，$[0,4]$；

**解** $y'=2(x+1)^{-2}>0$， $y(0)=-1=y_{min}$， $y(4)=4/5=y_{max}$

(9) $y=a^2x^{-1}+b^2(1-x)^{-1}(a>0,b>0)$，$(0,1)$；

**解** $y\to+\infty(x\to0^+)$，$y\to+\infty(x\to1^-)$；$y'=-a^2x^{-2}+b^2(1-x)^{-2}$，$y'\left(\frac{a}{a+b}\right)=0$，$y\left(\frac{a}{a+b}\right)=(a+b)^2=y_{min}$，无最大值

(10) $y=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$， $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$；

**解** $y'=2\sqrt{2}\cos(x+\pi/4)\cos^{-3}x$， $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$y(0)=0$， $y\to-\infty\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$， $y_{max}=1$，无最小值

(11) $y=x^x$，$(0.1,+\infty)$；

**解** $y'=(1+\ln x)x^x$，$y'(e^{-1})=0$，$y(e^{-1})=e^{-1/e}$，

当$0.1<x<e^{-1}$时，$y'<0$，所以$y(0.1)>y(e^{-1})$，又$y\to+\infty(x\to+\infty)$，故$y_{min}=e^{-1/e}$，无最大值

(12)$y=\mathrm{artg}\dfrac{1-x}{1+x}$,[0,1]；

**解** $y'=-(1+x^2)^{-1}<0$，$y(0)=\pi/4=y_{max}$，$y(1)=0=y_{min}$

(13)$y=-3x^4+6x^2-1$，$[-2,2]$；

**解** $y'=12x(1-x^2)$，$y'(0)=y'(\pm)=0$，$y(\pm2)=-25$，$y(\pm1)=2$，$y(0)=-1$，$y_{max}=2$，$y_{min}=-25$，

(14)$y=2^x$，$[-1,5]$；

**解** $y'=2^x\ln2>0$，$y_{max}=y(5)=32$，$y_{min}=y(-1)=1/2$.

5.12 证明下列不等式：

(1)$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}(>1)$

**证** 令$f(x)=2\sqrt{x}+1/x-3$，$f'(x)=(x^2-\sqrt{x})x^{-2/5}$，$x>1$时$f'(x)>0$，$f(x)$是x的严格增函数，$f(1)=0$，因此$f(x)>0$ $(x>1)$，不等式得证

(2)$x>\ln(1+x)(x>0)$

**证** 令$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f'(x)=x(1+x)^{-1}>0$，$f(0)=0$，所以$f(x)>0$ $(x>0)$

(3)$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ $(x>1)$

**证** 令$f(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$，$f'(x)=\ln x+x^{-1}-1$，$f''(x)-(x-1)x^{-2}>0$ $(x>1)$，$f'(x)$增，$f'(1)-0$，故$f'(x)>0$，$f(1)-0$，因而$f(x)>0$，即$\ln x>2(x-1)(x+1)^{-1}$ $(x>1)$

(4)$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$

证　令$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$，$f(0)=0$，所以$f(x)>0\ (x>0)$

(5)　$\ln(1+x)\geqslant\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x}\ (x\geqslant0)$

证　令$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\operatorname{arctg}x$，证法同上

(6)$\operatorname{arctg}x\leqslant x(x\geqslant0)$，$\operatorname{arctg}x\geqslant x(x\leqslant0)$

证　令$f(x)=\operatorname{arctg}x-x$，$f'(x)=-x^2(1+x^2)^{-1}$，$f'(x)\leqslant0$，$f(0)=0$，所以$f(x)\leqslant0\ (x\geqslant0)$，即$\operatorname{arctg}x\leqslant x(\geqslant0)$；$f(x)\geqslant0\ (x\leqslant0)$，即$\operatorname{arctg}x\geqslant x(x\leqslant0)$

(7)$\sin x+\operatorname{tg}x>2x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

证　令$f(x)=\sin x+\operatorname{tg}x-2x$，$f'(x)=(\cos^3x-2\cos^2x+1)\cos^{-2}x$，令$g(x)=\cos^3x-2\cos^2x+1$，$g'=\frac{1}{2}\sin2x(4-3\cos x)>0$，$g(0)=0$，故$g>0$，从而$f'(x)>0$，$f(0)=0$，所以$f(x)>0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

(8)　$|x|\leqslant2$时，$|3x-x^3|\leqslant2$。

证　令$f(x)=|3x-x^3|-2$，因为$f(x)=f(-x)$，故只须证明在$0\leqslant x\leqslant2$上$f(x)\leqslant0$即可

$$f'(x)=\begin{cases}3-3x^2\ (0\leqslant x<\sqrt{3})\\3x^2-3\ (\sqrt{3}<x\leqslant2),\end{cases}$$

在$(0,1)$及$(\sqrt{3},2)$上$f(x)$单调上升，$(1,\sqrt{3})$上$f(x)$单调下降，但$f(1)=f(2)=0$所以$f(x)\leqslant0\ (0\leqslant x\leqslant2)$

(9)若$0\leqslant x\leqslant1$，$P>1$，则$2^{1-p}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant1$。

证　令$f(x)=x^p+(1-x)^p$，$f(x)=p(x^{p-1}-(1-x)^{p-1})$

，易知$(0,1/2)$上$f(x)$下降，$(1/2,1)$上$f(x)$上升，$f(0)=f(1)=1$，$f(1/2)=2^{1-p}$，所以$2^{1-p}\leqslant f(x)\leqslant 1$，

(10) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$

**证** $|a\sin x+b\cos x|=\sqrt{a^2+b^2}|\sin(\varphi+x)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$，其中$\sin\varphi=b(a^2+b^2)^{-1/2}$。

5.13 试证方程$\sin x=x$只有一个实根。

**证** 显然有$|x|\leqslant 1$，令$f(x)=\sin x-x$，$f'=\cos x-1\leqslant 0$，等号仅当$x=0$成立，$f(x)$单调，$f(-1)>0$，$f(1)<0$，所以方程只有一个实根。

5.14 方程$\ln x-ax=0(a>0)$有几个实根？

**解** 令$f(x)=x^{-1}\ln x$，$f'=x^{-2}(1-\ln x)$，$f'(e)=0$，$(0,e)$上$f$升，$(e,+\infty)$降，极大值$f(e)=e^{-1}$，$f(x)\to-\infty$ $(x\to 0^+)$，$f(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$，作简图，当$a>e^{-1}$时，$y=a$与曲线无交点，方程无实根。$a=e^{-1}$时，方程仅有一实根$e$，$0<a<e^{-1}$时，$y=a$与曲线有两个交点，方程有两个实根，分别在$(0,e)$和$(e,+\infty)$内。

5.15 单调函数的导函数是否必为单调函数？试举例说明。

**解** 不一定，例$y=x+\sin x(-1\leqslant x\leqslant 1)$，$y'>0$，$y$单调，$y'=1+\cos x$在$[-1,1]$上不单调，

5.16 方程$e^x=ax^2(a>0)$有几个实根？试确定这些根所在的范围。

**解** 令$y=x^{-2}e^x$，则$y'=x^{-3}e^x(x-2)$，当$x<0$及$x>2$时，$y$单调增，$0<x<2$时，$y$单调减，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，