普通高等教育“十五”国家级规划教材

《航海学》附篇及附录

郭 禹 主编
杨守仁 主审

HANGHAI XUE

大连海事大学出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

《航海学》附篇及附录

郭　禹　主编
杨守仁　主审

大连海事大学出版社

目　　录

附篇　球面三角与船位误差理论基础

第一章　航海数值计算

在航海实际中经常会进行各种数字的计算，例如，借助专用表册进行计算、借助图表进行计算、借助计算器或计算机进行计算等。随着计算机的普及，替代了大量的烦琐的人工计算，但是由于航海专业的特点和习惯，还保留许多专业表册，需要航海人员去查算。本章主要介绍如何利用航海专业表册进行航海数值计算的基本方法。

在航海数值计算中，经常要用到一些专用表册，这些表册都是按一定的函数关系编排的，如：$y=f(x)$。根据已知的 x 值，查表可求得 y 值。但是表内不可能一一列出所有的 x 值和对应的 y 值，也就是说，已知的 x 值和对应的 y 值可能正好介于两表列数值之间，这时根据 x 值，利用表列数值求取 y 值的方法称为内插法。以自变量 x 为引数，查表求取函数值 y 称为内插（正内插），内插的逆运算称为反内插。按自变量的个数可分为：单内插（1 个自变量）、双内插（2 个自变量）等等。根据函数的性质可分为：比例内插、变率内插等。

第一节　比例内插（线性内插）

一、比例内插（interpolation by proportional parts）

1. 比例单内插（一元函数）

比例单内插是航海上较常用的内插方法之一。

已知函数 $y=f(x)$ 列表如下：

表 1-1-1　函数表

引数（自变量）	函数值
x_0	y_0
x_1	y_1
…	…

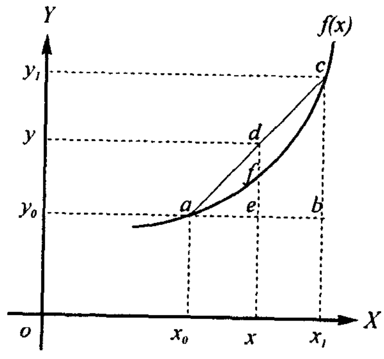

图 1-1-1　比例内插几何意义示意图

如表 1-1-1，利用比例内插求位于表列数值 x_0 和 x_1 之间的自变量 x（查表引数）所对应的函数值 y。

若把函数 $f(x)$ 在 (x_0,x_1) 区间看成线性函数进行内插。由图 1-1-1 可见，两三角形 abc

和 aed 相似，则对应边成比例，即

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$\begin{aligned} y &= y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(y_1-y_0) \\ &= y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0) \end{aligned} \tag{1-1-1}$$

式中：y_1-y_0——表差；

x_1-x_0——表间距；

$x-x_0$——内插间距。

上式即是比例单内插计算公式。

比例单内插的几何意义是采用表列两点(x_0,y_0)，(x_1,y_1)间的直线$\overline{ac}$代替曲线$\overset{\frown}{ac}$进行内插，即以弦代替曲线进行内插。

由图 1-1-1 可看出，如果 $f(x)$为线性函数（直线$\overline{ac}$），利用线性内插求得的 y 值没有误差；如果 $f(x)$为非线性函数（曲线$\overset{\frown}{ac}$），利用线性内插求得的 y 值有$\overline{df}$误差。因此：

(1)为计算简便，只要在误差允许的范围内，均可采用线性内插。

(2)对非线性函数，表间距越小，利用线性内插求得的函数值的误差越小。

例 1-1-1：某船静水力性能数据表部分内容如表 1-1-2。

表 1-1-2 静水力性能数据表

型吃水 d(m)	排水量 Δ(t)	总载重量 DW(t)	…
…	…	…	…
5.00	9 600	4 035	…
5.20	10 040	4 475	…
5.40	10 500	4 935	…
5.60	10 960	5 395	…
…	…	…	…
…	…	…	…

已知型吃水 5.25 m，求排水量 Δ 和总载重量 DW？

解：

$$\begin{aligned} \text{排水量 } \Delta &= \Delta_0+\frac{\Delta_1-\Delta_0}{d_1-d_0}(d-d_0) \\ &= 10\,040+\frac{10\,500-10\,040}{5.40-5.20}(5.25-5.20) \\ &= 10\,155\ \text{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{总载重量 } DW &= 4\,475+\frac{4\,935-4\,475}{5.40-5.20}(5.25-5.20) \\ &= 4\,590\ \text{t} \end{aligned}$$

2. 比例反内插

比例内插的逆运算称为比例反内插，即已知函数 y 求自变量 x。其计算公式如下：

$$x = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}(y - y_0) \tag{1-1-2}$$

二、比例双内插(二元函数)

当函数含有两个自变量时,则必须用比例双内插求近似解。比例双内插是航海数值计算中最常用的内插方法。其具体计算方法可以通过下述例题予以介绍。

例 1-1-2:设物标高 h,垂直角 α,水平距离 $D=h\cot\alpha$(n mile),利用该式编表 1-1-3,求 $h=13.4$ m,$\alpha=4'.4$ 时的水平距离 D(n mile)?

表 1-1-3　水平距离表

D (n mile) ＼ h (m) α(′)	10	13.4	20
3	6.2		12.3
4	4.6	6.2	9.3
4.4		5.7	
5	3.7	5.0	7.4

解:

(1)求 $\alpha=4'$,$h=13.4$ m 时的 D_1?

$$D_1 = D_0 + \frac{D_1 - D_0}{h_1 - h_0}(h - h_0) = 4.6 + \frac{9.3 - 4.6}{20 - 10}(13.4 - 10) \approx 6.2 \text{ n mile}$$

(2)求 $\alpha=5'$,$h=13.4$ m 时的 D_2?

$$D_2 = D_0 + \frac{D_1 - D_0}{h_1 - h_0}(h - h_0) = 3.7 + \frac{7.4 - 3.7}{20 - 10}(13.4 - 10) \approx 5.0 \text{ n mile}$$

(3)当 $\alpha=4.4'$时,从 D_1 和 D_2 中比例内插求 D?

$$D = D_1 + \frac{D_2 - D_1}{\alpha_1 - \alpha_0}(\alpha - \alpha_0) = 6.2 + \frac{5.0 - 6.2}{5 - 4}(4.4 - 4) \approx 5.7 \text{ n mile}$$

从上可见,比例双内插是通过 3 步比例单内插来完成的。由于表 1-1-3 是根据非线性函数 $D=h\cot\alpha$ 编制的,因此用比例内插会引起一定的误差即:

第(1)和第(2)步由于设 α 为常数,则函数 $D=h\cot\alpha$ 变为线性函数,故 D_1、D_2 无误差(不考虑凑整误差)。

第(3)步由于设 α 为变量,则函数 $D=h\cot\alpha$ 变为非线性函数,故用比例内插将导致 D 产生一定的计算误差。

第二节　变率内插

由本章第一节可知当函数是非线性函数时,如果用比例内插计算将会导致一定的计算误差,为了尽量减小该误差,则引进了变率内插。

一、变率单内插(一元函数)

已知比例内插计算公式为:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

式中$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$是在区间$(x_0, x_1)$内,函数的平均变化率,比例内插实际上是按平均变化率进行内插,因此,又可称为平均变率内插。这就是说,函数的变化率比较均匀,在一定的条件下均可采用比例内插。但是,有些函数的变化率是不太均匀的,如果按比例内插,将导致较大的计算误差,对于用这样的函数编制的函数表,则不能采用比例内插,而采用变率内插,将比例内插计算公式改写成变率内插计算公式为:

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx}(x - x_0) \tag{1-2-1}$$

需要采用变率内插的函数表通常在表中给出了相应的变化率,可以利用给出的变化率进行变率内插。

例 1-2-1:用 $y = x^2$ 造表 1-2-1,求 $x = 2.3$ 时的 y?

表 1-2-1 函数表

x	$y = x^2$	$\frac{dy}{dx}$
2	4	4
3	9	6
4	16	8

解:

(1)用比例内插

$$y = 4 + \frac{9 - 4}{3 - 2}(2.3 - 2) \approx 5.5$$

(2)用 $x = 2$ 的变率内插

$$y = 4 + 4(2.3 - 2) \approx 5.2$$

(3)用 $x = 3$ 的变率内插

$$y = 9 + 6(2.3 - 3) \approx 4.8$$

(4)用 $y = x^2$ 直接计算

$$y = (2.3)^2 = 5.29$$

对上述结果进行分析得到:

①用比例内插求得的 y 值的计算误差较大;

②用 $x = 2$ 的变率内插求得的 y 值的计算误差较小。

结论:使用变率内插时,为减小计算误差,应使用最接近实际引数的表列引数所对应的函数为基准(即实际引数 $x = 2.3$,最接近它的表列引数 $x_0 = 2$,与其对应的 $y_0 = 4$)进行内插。

变率内插的几何意义:用表列引数(x_0, y_0)确定的 a 点的切线代替曲线进行内插,如图 1-2-1所示。准确值为$\overline{oy}$,按比例内插,其计算误差为$\overline{dy}$,按 x_0 变率内插,其计算误差为$\overline{ey}$,按

x_1 变率内插，其计算误差为$\overline{fy}$，显然$\overline{ey}<\overline{dy}<\overline{fy}$。

二、变率双内插（二元函数）

若是二元函数，且其变化率是不均匀的，则必须采用变率双内插。

设函数为：

$$z = f(x,y)$$

在 $z_0=f(x_0,y_0)$处展开成泰勒级数只取一次项得：

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) \quad (1\text{-}2\text{-}2)$$

航海上一些专用表册列有变化率$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$，则可采用变率双内插。

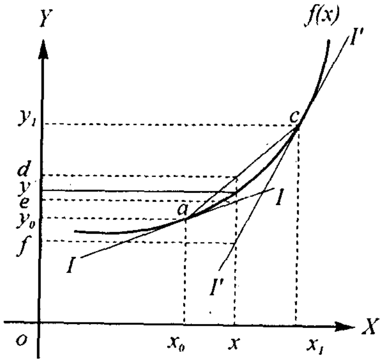

图 1-2-1　变率内插内何意义示意图

这里给出变率双内插的另一目的是导出简化了的比例双内插的另一近似计算式。将式(1-2-2)中的变化率改写成平均变化率，则由变率内插的计算公式得到比例内插的近似计算式：

$$z = z_{00} + \frac{z_{10} - z_{00}}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{z_{01} - z_{00}}{y_1 - y_0}(y - y_0) \quad (1\text{-}2\text{-}3)$$

表 1-2-2　函数表

y \ z \ x	x_0	x_1
y_0	z_{00}	z_{10}
y_1	z_{01}	z_{11}

采用式(1-2-3)，只用 2 步比例内插即可完成比例双内插。该式第二项是对自变量 x 的比例内插，第三项对自变量 y 的比例内插，故称为双比例内插。

例 1-2-2：利用式(1-2-3)求例 1-1-2 题，即求 $h=13.4$ m，$\alpha=4'.4$ 时的水平距离 D(n mile)。

表 1-2-3　水平距离表

$\alpha(')$ \ D (n mile) \ h (m)	10	20
3	6.2	12.3
4	4.6	9.3
5	3.7	7.4

解：

$$z = z_{00} + \frac{z_{10} - z_{00}}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{z_{01} - z_{00}}{y_1 - y_0}(y - y_0)$$

$$= 4.6 + \frac{9.3 - 4.6}{20 - 10}(13.4 - 10) + \frac{3.7 - 4.6}{5 - 4}(4.4 - 4)$$

$$\approx 5.8 \text{ n mile}$$

计算结果与比例双内插的结果($D=5.7$)基本一致,但计算相对简便,故在航海数值计算中,多采用该方法进行比例双内插。

综上所述,查算由非线性函数造的函数表,不论用比例内插还是变率内插都会导致一定的计算误差。航海上比较常用的是比例内插。如果表中列出了变化率,就应按变率内插计算。

第二章　球面三角

球面三角,主要研究球面上由三个大圆弧相交所围成的球面三角形及其性质、解算等问题,为学习航海专业课程提供必要的数学基础。

第一节　球面几何

一、球、球面

在空间与一定点等距离的点的轨迹称为球面(spherical surface)。包围在球面中的实体称为球(sphere),这一定点称为球心。球心和球面上任意一点间的连线称为球半径 R。过球心与球面相交的直线段称为球直径。同球的半径或直径都相等。同理,半径或直径相等的球全等,所以,球面又可定义为半圆周绕它的直径旋转一周的旋转面。

二、球面上的圆

任意一平面和球面相截的截痕是圆。

如图 2-1-1,平面 π 与球面相截 A 是截痕上任意点。由球心 O 向截面 π 作垂线 $\overline{OO'}$、连线 $\overline{OA}$、$\overline{O'A}$ 构成直角三角形 OAO',$\angle OO'A=90°$,则

$$O'A=\sqrt{OA^2-OO'^2}$$

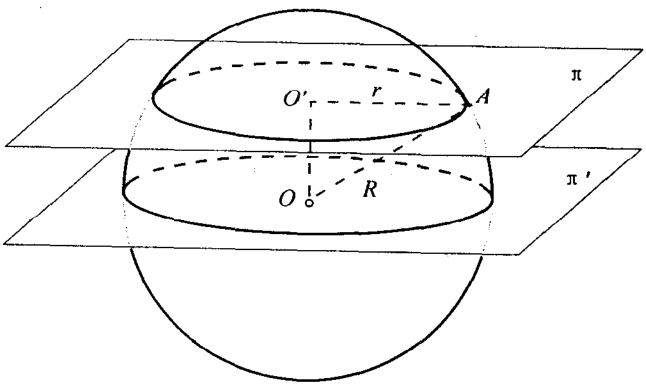

图 2-1-1　大圆、小圆示意图

当平面 π 的位置不变,则 OO' 是定长,又因 OA 是球的半径 R,A 在截痕上任意移动时,OA 总是定值,因而 $O'A$ 也是定值。由此可知,π 平面与球面的截痕是一个以 O' 为圆心,$O'A$ 为半径 r 的圆,从而可以推广到任一平面与球面的截痕均为圆。

当 $O'O=0$,平面 π' 通过球心时,所截成的圆称为大圆(great circle),它的一段圆周叫大圆弧;截面不通过球心的圆称为小圆(small circle),它的一段圆周叫小圆弧。

三、大圆的性质

1. 大圆的圆心与球心重合。
2. 大圆的直径等于球直径,半径等于球半径。
3. 同球或等球上的大圆的大小相等。
4. 大圆等分球面和球体。
5. 同球上的两个大圆平面一定相交,交线是它们的直径,并且两大圆互相平分。

如图 2-1-2,$AEBF$ 和 $CEDF$ 是任意两个大圆。因为球心同时在这两个大圆面上,必在这两个大圆面的交线上,这个交线是这两个圆的公共直径,而圆的直径必平分该圆,所以这两个

大圆互相平分。

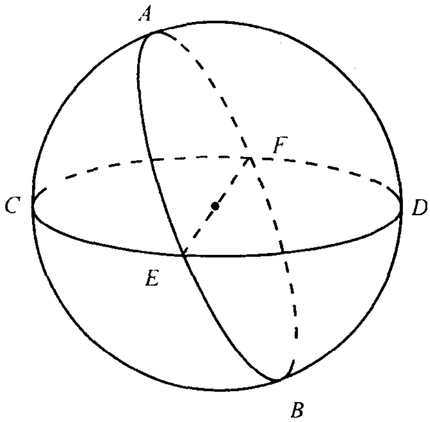

图 2-1-2 同球上两大圆弧相互平分示意图

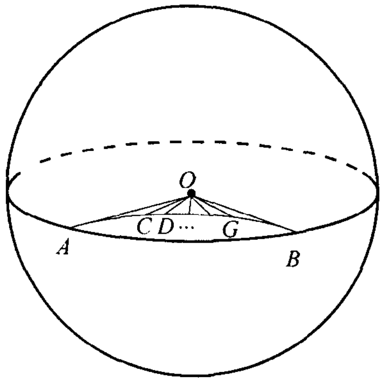

图 2-1-3 球面上两点间最短球面距离证明图

6. 过球面上不在同一直径两端上的两个点,能作且仅能作一个大圆,却能作无数个小圆。若在同一直径两端上的两个点,则能作无数个大圆而不能作小圆。

7. 小于 180°的大圆弧(劣弧)是球面上两点间的最短球面距离。因此,两点间的球面距离应用大圆弧度量。

如图 2-1-3,过球面上两点 A,B 作一大圆弧。过 A 和 B 取任意曲线$\overparen{ACD\cdots GB}$,分成无穷小段的弧$\overparen{AC}$,$\overparen{CD}$,$\cdots\overparen{GB}$。因为这些弧是无穷小的,所以都可以认为是大圆弧。连接$\overline{OA}$,$\overline{OC}$,$\overline{OD}$,$\cdots\overline{OG}$,$\overline{OB}$,得一多面角 $O-ACD\cdots GB$。由立体几何可知,多面角中,任一面角小于其他面角之和,则

$$\angle AOB<\angle AOC+\angle COD+\cdots+\angle GOB$$

即

$$\overparen{AB}<\overparen{AC}+\overparen{CD}+\cdots+\overparen{GB}$$

所以

$$\overparen{AB}<\text{球面曲线}\overparen{ACD\cdots GB}$$

这就证明了小于 180°的大圆弧是球面上两点间的最短球面距离,即两点间的球面距离以大圆距离为最短。航海上,沿 AB 所走的最短航线称为大圆航线。

四、轴、极、极距、极线

垂直于任意圆面的球直径称为该圆(大圆或小圆)的轴(axis),轴的两个端点称为极(pole),故每个圆均有两个极。垂直于同一轴可有无数个平行圆,其中只有一个通过球心的是大圆,其余的都是小圆。从极到圆(大圆或小圆)弧上任一点沿大圆弧的球面距离叫极距(polar distance),又叫球面半径。同一个圆的极距或球面半径都相等,如图 2-1-4,$\overparen{Pa}=\overparen{Pb}=\overparen{Pc}=\overparen{Pd}$。极距为 90°的大圆弧又称为该极的极线(equator)。如图 2-1-4,$\overparen{PA}=\overparen{PB}=\overparen{PC}=\overparen{PD}=90°$,大圆弧$ABCD$为 P 或 P' 的极线,所以大圆弧是它的极的极线;反之,极线必定是大圆弧。

显然,如果球面上一点到某一大圆弧上任意两点间的球面距离都是 90°,则这一点就是该大圆的极,而这个大圆则是该点的极线。

五、球面角及其度量

球面上两大圆弧相交构成的角称为球面角(spherical angle),其交点叫球面角的顶点,两大

圆弧称为球面角的边。如图 2-1-5,大圆弧$\overset{\frown}{PA}$,$\overset{\frown}{PB}$相交于P点,构成球面角$\angle APB$,可简写为$\angle P$或P。其中P为顶点,$\overset{\frown}{PA}$,$\overset{\frown}{PB}$为其两边。大圆弧$\overset{\frown}{EAB}$是以球面角顶点P为极的极线。过P点作$\overset{\frown}{PA}$,$\overset{\frown}{PB}$的切线$\overline{PC}$和$\overline{PD}$,$\angle CPD$是两大圆弧平面相交构成的两面角,它等于球面角的大小。

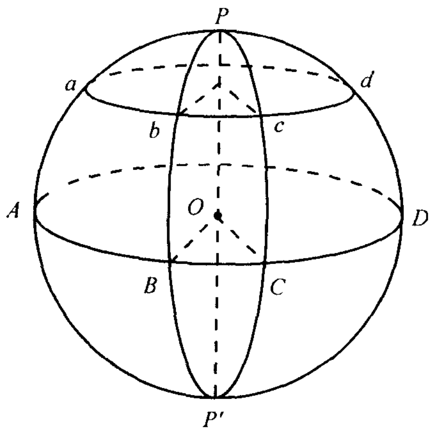

图 2-1-4　轴、极、极、距、极线示意图

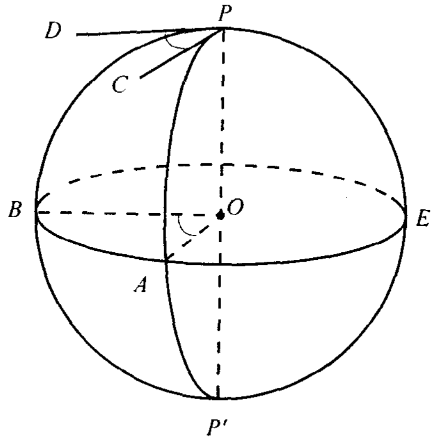

图 2-1-5　球面角的度量方法

如上所述,可得球面角的三种度量方法:

1. 切于顶点大圆弧的切线的夹角$\angle CPD$;

2. 顶点的极线被其两边大圆弧所截的弧长$\overset{\frown}{AB}$;

3. 大圆弧$\overset{\frown}{AB}$所对的球心角$\angle AOB$。

六、圆心角相等的小圆弧与大圆弧之比

如图 2-1-6,大圆弧$\overset{\frown}{AB}$与小圆弧$\overset{\frown}{ab}$的圆面互相平行,PP'为它们的轴。显然:

$$\text{圆心角}\angle AOB = \angle ao'b = \frac{\overset{\frown}{ab}}{\overline{ao'}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{AO}} = \text{圆心角(rad)}$$

$$\frac{\overset{\frown}{ab}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\overline{ao'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{ao'}}{\overline{ao}} = \sin\angle aoo' = \sin \overset{\frown}{pa} = \cos(90° - \overset{\frown}{pa})$$

所以
$$ab(\text{长度}) = AB(\text{长度}) \times \sin(\text{小圆极距})$$

即小圆弧长等于圆心角相等的大圆弧长乘以小圆极距的正弦函数。

如果大圆弧与小圆弧的圆面互相不平行,只要圆心角相等,上述关系式同样成立。

七、两大圆极之间的大圆弧所对的球心角等于该两大圆平面的两面角

如图 2-1-7,两大圆弧$\overset{\frown}{CD}$和$\overset{\frown}{CE}$相交于C点,构成球面角$\angle DCE$,A和B点分别是该两大圆的极。因为两大圆极之间的球心角$\angle AOB$和两面角$\angle DOE$,均等于$90° - \angle BOD$,所以$\angle AOB = \angle DOE = \angle DCE$。

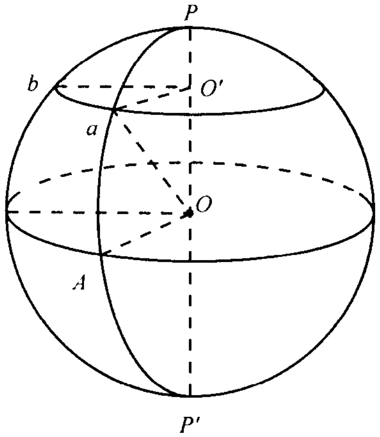

图 2-1-6 求证圆心角相等的小圆弧与大圆弧之比原理图

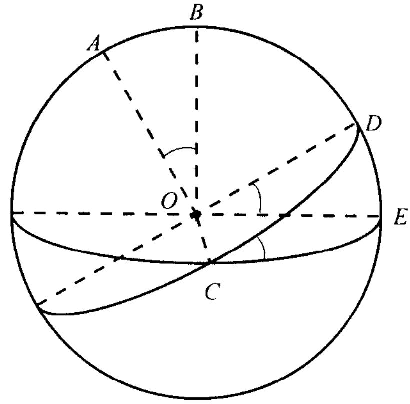

图 2-1-7 原理图

第二节 球面三角形

一、球面三角形的定义

在球面上由三个大圆弧所围成的三角形称为球面三角形(spherical triangle)。围成三角形的大圆弧称为球面三角形的边。由大圆弧相交所成的球面角称为球面三角形的角。如图2-2-1,大圆弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$和$\overset{\frown}{CA}$围成一个球面三角形ABC。常用A,B,C表示球面三角形的三个角,三角的对边则相应地用a,b,c表示。这三个角A,B,C和三个边a,b,c合称为球面三角形的六要素。航海上讨论的球面三角形的六要素均大于0°,而小于180°,又称其为欧拉球面三角形。

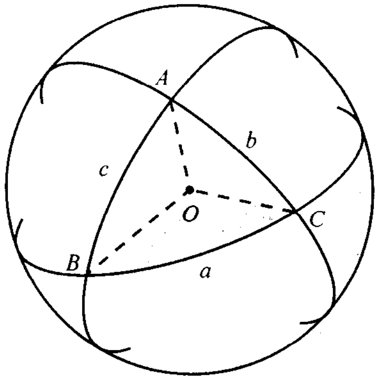

图 2-2-1 球面三角形

二、球面三角形分类

球面三角形分为直角、直边、等腰、等边、初等和任意三角形。

1.球面直角三角形和球面直边三角形

至少有一个角为90°的三角形称为球面直角三角形。

至少有一个边为90°的三角形称为球面直边三角形。

2.球面等腰三角形和球面等边三角形

球面三角形中,有两边或两角相等的三角形称为球面等腰三角形。若三边或三角都相等的三角形称为球面等边三角形。

3.球面初等三角形

三个边相对其球半径甚小的三角形称为球面小三角形。只有一个角及其对边相对球半径甚小的三角形称为球面窄三角形。两者统称为球面初等三角形(primary triangle)。

4.球面任意三角形

凡不具备上述特殊条件的球面三角形称为球面任意三角形。

三、球面极线三角形

球面三角形 ABC 三个顶点的极线所构成的球面三角形 $A'B'C'$ 称为原球面三角形 ABC 的球面极线三角形(polar triangle)。如图 2-2-2,以原球面三角形的三个顶点 A,B,C 为极,作极距等于 90°的三个极线 $B'C',A'C',A'B'$,它们相交于三点,构成球面极线三角形 $A'B'C'$。若原球面三角形各边均小于 90°,则其极线三角形在原三角形之外,如图 2-2-2 所示。若原球面三角形各边均大于 90°,则其极线三角形在原三角形之内,如图 2-2-3 所示。若原球面三角形的一边或两边小于 90°,其余的边大于 90°,则其极线三角形与原三角形相交,如图 2-2-4 所示。

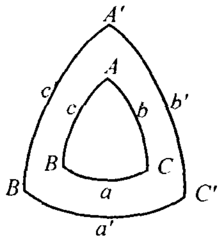

图 2-2-2　示意图

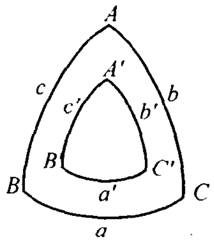

图 2-2-3　示意图

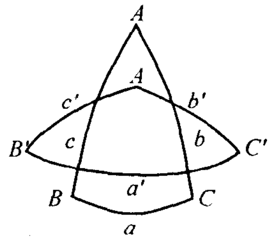

图 2-2-4　示意图

1.原三角形与其极线三角形是互为极线三角形

原球面三角形 ABC 的三个边,也就是其球面极线三角形 $A'B'C'$ 三个顶点的极线。换句话说,画极线三角形 $A'B'C'$ 的极线三角形,则所得到的就是原球面三角形 ABC,所以,它们之间的关系是相互的。

2.原球面三角形的边与其极线三角形对应角互补,原球面三角形的角与其极线三角形对应互补

$$a + A' = 180° \qquad b + B' = 180° \qquad c + C' = 180°$$
$$A + a' = 180° \qquad B + b' = 180° \qquad C + c' = 180°$$

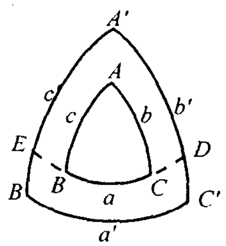

图 2-2-5　示意图

如图 2-2-5,$A'B'C'$ 是球面三角形 ABC 的极线三角形。将原三角形 BC 边向两侧延长,与其极线球面三角形的两边相交得大圆弧 ED,则 $A' = ED$。因为

$$a + A' = a + ED = a + EB + a + CD$$

C 是 c' 的极　　$a + EB = 90°$

B 是 b' 的极　　$a + CD = 90°$

所以　　$a + A' = 180°$

同理可证其他。

第三节　球面三角形的边角函数关系

一、任意球面三角形

1.余弦公式(cosine formula)

(1) 边的余弦公式

记忆口诀：**一边的余弦等于其他两边余弦的乘积，加上这两边正弦及其夹角余弦的乘积。**

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

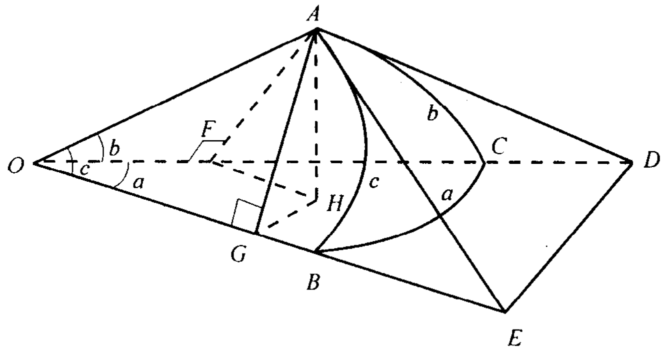

图 2-3-1 余弦公式推导图

如图 2-3-1，从球面三角形 ABC 的顶点 A 作 b，c 两边的切线，并与 OC，OB 的延长线相交于 D，E 两点，构成了四个平面三角形。DA，EA 垂直于 OA，$\angle EAD = \angle A$。

在平面三角形 OED 中，由平面余弦公式得：

$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2OE \cdot OD \cos a \tag{2-3-1}$$

同理，在平面三角形 AED 中有：

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A \tag{2-3-2}$$

在平面直角三角形 AOE 和 AOD 中：

$$OA^2 = OE^2 - AE^2 = OD^2 - AD^2 \tag{2-3-3}$$

用式(2-3-1)减式(2-3-2)并参看式(2-3-3)得：

$$\begin{aligned} 0 &= OA^2 + OA^2 - 2OE \cdot OD \cos a + 2AE \cdot AD \cos A \\ &= OA^2 - OE \cdot OD \cos a + AE \cdot AD \cos A \end{aligned}$$

整理得

$$\cos a = \frac{OA \cdot OA}{OD \cdot OE} + \frac{AD \cdot AE}{OD \cdot OE} \cos A$$

在平面直角三角形 AOE 和 AOD 中：

$$\cos b = \frac{OA}{OD} \qquad \cos c = \frac{OA}{OE}$$

$$\sin b = \frac{AD}{OD} \qquad \sin c = \frac{AE}{OE}$$

所以

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

边的余弦公式应用：已知两边及其夹角求对边；已知三边求三角。

(2)角的余弦公式

记忆口诀：**一角的余弦等于其他两角余弦的乘积冠以负号加上这两角正弦及其夹边余弦的乘积。**

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

角的余弦公式可由边的余弦公式和球面极线三角形的关系来证明。

角的余弦公式应用：已知两角及其夹边求对角；已知三角求三边。

2. 正弦公式(sine formula)

记忆口诀:**边的正弦与其对角的正弦成比例。**

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

如图 2-3-1,过球面三角形 ABC 的顶点 A 作 AD 垂直平面 BOC。再由 D 作 DE 垂直 OB,DF 垂直 OC,连接 AE 和 AF,可知 AE 垂直 OB,AF 垂直 OC。于是得到四个平面直角三角形 OAE,OAF,ADE,ADF。

因为
$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\dfrac{AF}{AO}}{\dfrac{AD}{AE}}=\frac{AE\cdot AF}{AD\cdot AO}\qquad \frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\dfrac{AE}{AO}}{\dfrac{AD}{AF}}=\frac{AE\cdot AF}{AO\cdot AD}$$

所以
$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

同理可证
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}$$

因此
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

正弦公式应用:已知两角及其一对边,求另一边;已知两边及其一对角,求另一角。

3. 边角正余弦公式(五联公式)

记忆口诀:**相邻边角正余弦乘积等于邻边第三边正余弦乘积减去邻边第三边余正弦及其夹角余弦之积。**

边角正余弦公式(sine - cosine formula)是由相连的三边两角共五个要素组成的又称五联(five parts formula)公式,其记忆口诀可以通过图 2-3-2 和图 2-3-3 所示,写出相应的公式:

$$\sin a\cos C=\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A\qquad \sin a\cos B=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A$$

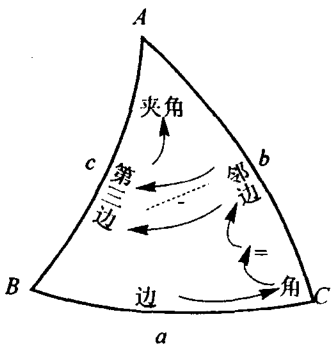

图 2-3-2 五联公式记忆图

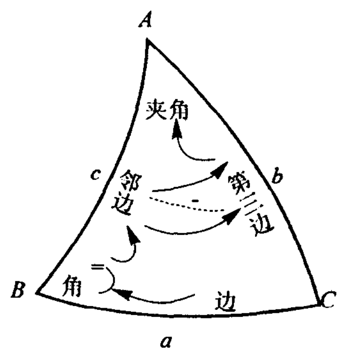

图 2-3-3 五联公式记忆图

4. 余切公式(四联公式 four-part formula)

记忆口诀:**外边余切内边正弦乘积等于外角余切内角正弦乘积加上内边内角余弦之积。**

余切公式(cotangent formula)是由相连的两边两角共四个要素组成的,又称四联(four parts formula)公式,其记忆口诀可以通过图 2-3-4 和图 2-3-5 所示,写出相应的公式:

$$\cot a\sin b=\cot A\sin C+\cos b\cos C\qquad \cot a\sin c=\cot A\sin B+\cos c\cos B$$