多尺度扰动方法在理论气象中的应用

云南大学地球物理系编

1982.6.

前　言

我们知道，近十多年来对大气非线性动力学的研究，在国外已逐渐成为了理论气象研究的一个重要方向。美国学者J.Pedlosky、E.Loesch、G.Duffy等的工作具有开创性的意义。

很清楚，大气运动的动力学是被非线性微分方程所支配的，所以大气运动都将显示着非线性性质。但是，由于数学处理上的困难长期以来都採用将方程线性化略去非重要项而加以简化的办法去找解析解。特别在讨论波动稳定性时，一直是把波扰动看成是振幅无限小的扰动，这样的讨论称为线性分析或无穷小振幅分析。这样做显然略去了非线性作用，也就完全排除了可能具有的波动间任何形式的相互作用。后来，有人开始注意到这一缺陷，逐步考虑非线性过程对大气运动的影响。最有代表性的工作是1954年Phillips[1]的，他对非线性的某些影响作了估计。他从处理一个小但具有限振幅的指数增长的不稳定波开始，计算了波动已建立后基本环流上的二阶变化。但是，他的工作遇到了一个当时尚不能解决的问题，这就是振幅的直接展开式中后项比前项随时间迅速增长，从而在时効上受到限制，致使展式可能非均匀有效。值得注意的是，虽然Phillips当时留下了一个使展式变成均匀有效的扰动方法问题来解决，但他的计算结果已修正了原有的线性结论，在考虑非线性作用方面跨出了第一步。那种在取波扰动振幅是小而有限的情况下，自然不应沿用过去的小扰动法对支配方程进行线性化，而必须建立另一种有効的数学工具去进行处理，在此基础上建立起的对大气运动的研究可称为有限振幅分析。另方面，不去对支配方程简单地进行线性化，好在方程中显现出非可比项的作用，这样的非线性项的考虑，就是运动中包含进了各种非线性共振相互

作用的贡献。从1970年以来，已陆续出现了一些工作，研究了有限振幅斜压波，重力惯性波和罗斯贝波间的共振相互作用，不稳定波和中性斜压波间的共振相互作用，以及罗斯贝波流的有限振幅稳定性等。最近两年来，我们自己已曾作过一些工作，讨论了连续模式中热源与地形的非线性影响及摩擦効应对罗斯贝波流有限振幅分析的影响等。

我们知道，在进行有限振幅分析中，数学处理的最关键工具就是扰动方法或奇异摄动理论，特别是其中的多尺度扰动方法应用更为广泛。我们已曾编印过《扰动方法在流体力学中的应用》作为了解掌握各种扰动方法在理论气象中应用的第一步。现在编印的这本书集则是具体介绍近十多年来国外学者应用多尺度扰动方法处理理论气象中非线性问题的情况。以期引起读者的注意和兴趣，促进这方面工作的开展。

本书集共分八节。§1 介绍了1970年美国J.Pedlosky教授对有限振幅斜压波的研究工作[2]。这是有限振幅分析方面的一项奠基性的工作，具有十分重要的意义。我们知道，波动不稳定理论和现象在气象流体力学中占有一个重要地位。早在1947年Chanery[3]和1949年Eady[4]做过一些开拓性的工作，他们的工作表明：大气中大尺度气旋波的存在可以用斜压纬向环流迭加一个无穷小的波扰动来加以解释。但他们以及后来长时期的工作都是建立在小扰动法以线性化的基础之上的。1954年，Phillips开始考虑由于非线性过程对不稳定现象产生什么样影响的问题。但他的工作中出现了展式非均匀有効的严重问题。直到1970年Pedlosky采用了多尺度扰动方法成功地研究了这个问题。~~他回答了以下几个有趣问题~~：即非线性作用如何导致波动的稳定？波振幅发展如何？波振幅最终趋于定常状态吗？又有一个最终的定常状态或是振荡状态？

1970年Pedlosky的工作中未曾对β効应与摩擦効应同时存在的情形进行研究。§2就介绍了D. Romea关于在有β与摩擦効应下有限振幅斜压波的情形[5]。作者利用多尺度方法进行讨论，表明了粘性引入后对线性稳定曲线的改变和一些其他的新的性质。

研究各类波动之间的共振相互作用问题也是非线性动力学讨论的课题之一。§3中将1974年Z. Loesch对不稳定波与中性斜压波间的共振相互作用的研究作了介绍[6][7]，当然我们看重的是多尺度扰动方法的应用方面。我们知道，大尺度波动是中纬度和海洋环流中所观测到的重要现象，前已说明，由于Charey和Eady的开创性工作表明，这些波动的存在性和线性动力学可以用研究一个斜压纬向环流对于无限小振幅的行星尺度波扰动的稳定性加以解释。线性理论表明，对于充分大的极地温度梯度，斜压环流对于行星尺度的波扰动是不稳定的，这些扰动将随着基本状态的有効位能的释放而增长。但是，由于讨论中又略去了支配方程中的非线性过程，因而它不能预言以下问题：基本状态的改变是由于增长波的存在；不稳定波与在系统中存在的其他波之间相互作用的可能性；波动振幅最终是否达到平衡等。显然，线性问题中，不同型式波动之间被认为是彼此独立地发展的，而改为研究有限（但也是小的）振幅时，就包含了波动不同型式间的相互作用。根据多尺度扰动方法中关于长期项的知识，如果非线性相互作用产生在时间与空间结构上与标准型式成比例的情况上，这时的非线性相互作用尤为重要。上述那种特殊结构的项将引入与线性标符间的共振。Z. Loesch在他的工作中，就在一个β平面上准地转两层模式中讨论了由一个边缘不稳定波与两个中性波组成的三波组的共振相互作用。得出了一些重要结果。这个问题后来被简化为RUN。

§4是在§3的基础上，进一步讨论了由一个边缘不稳定波和N—1个中性波之间的共振相互作用。这里N≥5，我们将所得结果，称为N重共振相互作用斜压波动力学[8]。

在1978年，Z. Loesch[9]又对罗斯贝波流的有限振幅稳定性作了讨论，§5中介绍了他利用多尺度扰动方法进行处理的情况。我们知道，正压罗斯贝波动的不稳定已在1972年由Lorenz[10]所建立。他使用线性扰动分析，证实了对于正压涡度方程（表示在一个常数西风气流之上建立的东—西传播的行星波）的由罗斯贝等得到的原始解是不稳定的，假如波动振幅充分大或者它的纬向波数足够高。到了1974年Gill[11]把Lorenz的研究推广了。而对于斜压波动稳定性则是由Pedlosky（1975）[12]和Yamagata（1976）[13]在两层无粘的斜压模式中建立起来的。将Lorenz的线性稳定性研究推广到非线性范围时，自然扰动应看成有限的（当然是小的）。在这样的假定下，就应利用扰动急流的渐近展式和多尺度扰动方法加以处理。Loesch在1978年对于罗斯贝波流的有限振幅稳定性分析，是在β平面上无粘正压模式中进行的。他的研究表明：在线性概念下不稳定的一个迭加扰动，只要它落后于基本罗斯贝波则要发展。而当扰动成为足够大时，它使罗斯贝波的位相振幅发生了改变。罗斯贝波的位相修正是向西的。同时在充分长的时间后，扰动与基本波流间的位相关系将倒转过来。在两者位相一致时，扰动增长停止，然后当扰动超前于罗斯贝波时，扰动将缓慢地减小，基本罗斯贝波最终将达到一个平衡值，此值是不同於其初值的位相和振幅的。最近，我们在Loesch工作的基础上，考虑了摩擦效应对罗斯贝波流有限振幅稳定性的影响，得出了一些结果[14]。

§6中涉及的是有限振幅斜压波的四层模式[15]。我们知道，最早对波动不稳定研究时採用的模式是具有常数风速切变和常

数静力稳定度的连续模式。这些模式在预报大气中气旋波的占支配的波长方面取得了成功。但是，由于支配斜压气流的微分方程难以处理，因此就妨碍了当时选用更一般的风和静力稳定度的廓线。作为解决这一困难的一种方法就是用所谓分层模式去模拟真实大气。也就是说将模式流体视为由一些均匀水平层组成的系统，从而限制了在垂直向的自由度的数目。这样做就能将複杂的支配方程转化成一组耦合的常微分方程。当然，最简单的分层模型就是熟知的两层模式。这种两层模式首先是由phillips在1951年和1954年所引入的，他的研究表明了两层模式可以重现出连续模式中的最重要的特色。例如大气中占支配地位的波长范围的估计，Chanery得到的是4000~6000公里，而Eady（1952年）和Kuo（1952年）的计标值是4000公里，而Phillips利用两层模式的结果是以6000公里作为最大增长波的波长值。近来，借助于电子计标机进行数值计标，就有可能选用更複杂的垂直廓线了。而模式的分层数也由两层变成了四层。例如在1977年Gall[16]利用一个四层模式表明了，当模式底部附近静力稳定度减少到可与大气中的比拟时，将引起极大增长率问短波漂移的现象。而稳定性的这些变化都不可能在两层模式中加以模拟。1980年F. Donahue为了洞察斜压波的增长变化情况。他选用了与Pedlosky的两层模式相类似的模式，只不过模式选为四层。这个四层模式的主要优越性在于能够分解出多种型式的不稳定波，並能充分地表达出对平均流动的二阶修正的本质。而两层模式在垂直方向上没有充分的自由度，因而根本不能做到这一点。应该指出的是，分层模式的一个严重缺陷是引入了一个在连续模式中不出现的稳定性阈值（Threshold），同时两者之间的另一个关键区别在于摩擦的作用。见於此，近来又有人转过来採用连续模式。1979年Pedlosky[17]就讨论了大

气连续模式中的有限振幅斜压波，我们已曾讨论了连续模式中热源与地形作用下的有限振幅分析，以此从动力学角度对季风进行研究[18]。由于这些工作中采用的不是多尺度扰动方法而是匹配渐近展开（或由外展开）的扰动方法，故在本专集中未列入。

1974年G. Duffy考察了在一个β平面上惯性重力波与罗斯贝的共振相互作用[19]。我们知道，大气不稳定性一般可分为正压与斜压两大类。他指出，正压不稳定又可进一步分成：经典的Rayleigh不稳定和非线性波动不稳定。而且尽管在基本状态与迭加上的扰动间能量的输送以极不同的方式出现，而这两种不稳定都从基本状态的动能中取得能量。特别是非线性波动不稳定的情形中，扰动从基本状态借助于与它的共振相互作用获得能量。由此可知，一个气流相对于Rayleigh稳定性判据是稳定的而根据非线性波动不稳定，它可以是不稳定的。关于这一点已从1973年Gill对有限振幅罗斯贝波研究中得到了支持[20]。然而，Duffy在他的文章中已曾申明：非线性波动不稳定性在大气动力学中的重要性尚属一个问题，因为无观测根据表明可以在事实上作出这种相互作用。在§7中指出了上述研究中多尺度方法的应用情况。

在本专集的最后一节中，叙述了多尺度方法在研究海气耦合模式中热异常的发展的情况[21]。由于海面温度与大气温度场、气压场间存在着一种长期的关系。大气和海洋间通过热量交换构成了一种耦合系统。在海气耦合问题中，关键问题是要决定维持甚至加强海平面温度异常的动力学过程。而这种海气相互作用的模式的求解是很困难的，由于多尺度扰动方法的引入，使问题得到了较满意的解答。

参加本专集编写的教师有谢应齐、先泽进、谭本馗，以及气

象专业八二届毕业生李跃清、陈增会、徐秋平、刘康、肖悦春及王莉苹。由于时间仓促，水平有限，缺点错误在所难免，请读者不吝赐教。

谢应齐

1982年6月于云南大学

§1　有限振幅斜压波(2)

一九七〇年，约舍夫·彼得罗斯基（Joseph Pedlosky）〔1〕讨论了准地转两层模式中不稳定斜压波的有限振幅特性。他在讨论非线性问题时，引入两个时间变易，即快时间$T_0=t$，慢时间$T=|\Delta|^{\frac{1}{2}}t$和$T=|\Delta|t$，应用了多尺度方法，从而得到如下的结论：

1、如有充分的消散，则波动的最终情形是一个具有不变振幅，接近于无振荡的状态；

2、如无消散（或很小），则斜压波与平均流动，其有限振幅平均说来呈现为一种振荡；

3、斜压波与平均流动有限振幅的振荡现象，不是由于β的存在，而是无消散的结果。

下面，我们简明地讨论这些问题，但侧重于多尺度方法的具体应用。

一、

考虑密度稍有差异的两层均质流体，假定整个系统以角速度Ω绕z轴旋转，$\rho_1<\rho_2$，系统处于重力稳定，且两层流体无相对运动，不考虑惯性离心力。系统宽度为L，高度为D，长度无限，如图（1.1.1）。另外，引入β平面近似，即$f=2\Omega=f_0+\beta' y'$。

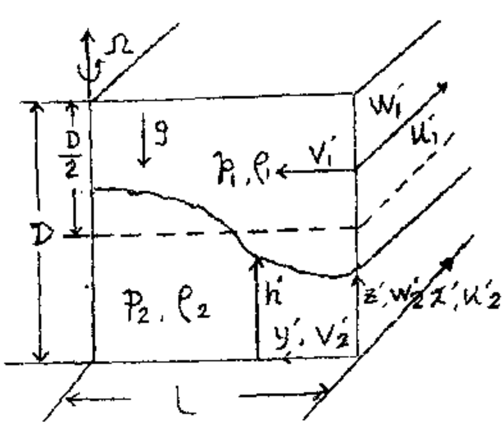

图1.1.1

不难得到，无量纲运动方程组如下：

$$\begin{cases}\varepsilon\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}+u_n\frac{\partial u_n}{\partial x}+v_n\frac{\partial u_n}{\partial y}+w_n\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)-(1+\varepsilon\beta y)v_n=-\frac{\partial p_n}{\partial x}+\frac{E}{2}\nabla_\delta^2 u_n\\ \varepsilon\left(\frac{\partial v_n}{\partial t}+u_n\frac{\partial v_n}{\partial x}+v_n\frac{\partial v_n}{\partial y}+w_n\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)+(1+\varepsilon\beta y)u_n=-\frac{\partial p_n}{\partial y}+\frac{E}{2}\nabla_\delta^2 v_n\\ \varepsilon\delta^2\left(\frac{\partial w_n}{\partial t}+u_n\frac{\partial w_n}{\partial x}+v_n\frac{\partial w_n}{\partial y}+w_n\frac{\partial w_n}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p_n}{\partial z}+\frac{\delta^2 E}{2}\nabla_\delta^2 w_n\end{cases}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}=0 \qquad (1.1.1)$$

分界面运动学边界条件为：

$$z=\frac{1}{2}(1+\varepsilon Fh)\text{时，}\frac{\varepsilon F}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+u_n\frac{\partial h}{\partial x}+v_n\frac{\partial h}{\partial y}\right)=w_n \quad (1.1.2)$$

其中，罗斯贝数 $\varepsilon=\frac{U}{f_0 L}$，埃克曼数 $E=\frac{2\nu}{f_0 D^2}$，行星涡旋因子 $\beta=\frac{\beta' L^2}{U}$，密度比 $\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}$，旋转佛罗德数 $F=\frac{f_0^2 L^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho_1}\cdot g\cdot\frac{D}{2}}$，纵横比 $\delta=\frac{D}{L}$，符号 $\nabla_\delta^2=\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\delta^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$。

对于 $\varepsilon\geqslant E^{\frac{1}{2}}$，我们考虑依赖于 ε 方幂的如下渐近表达式：

$$\begin{cases}u_n\sim u_n^{(0)}+\varepsilon u_n^{(1)}+\cdots\cdots\\ v_n\sim v_n^{(0)}+\varepsilon v_n^{(1)}+\cdots\cdots\\ w_n\sim\varepsilon w_n^{(1)}+\cdots\cdots\\ h\sim h^{(0)}+\varepsilon h^{(1)}+\cdots\cdots\end{cases} \qquad (1.1.3)$$

$$p_n\sim p_n^{(0)}+\varepsilon p_n^{(1)}+\cdots\cdots$$

将上式代入(1.1.1)和(1.1.2)后，令方程两边 ε 同次幂的系数相等，同时利用卡利和爱利生（Charney and Eliassen）一九四九年的研究结果，并未忽略分界面上的粘滞效应。最后得到运动方程组的最终形式：

$$\begin{cases}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\times\left[\nabla^2\psi_1+F(\psi_2-\psi_1)+\beta y\right]=-\gamma\nabla^2\psi_1\\ \left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right]\times\left[\nabla^2\psi_2+F(\psi_1-\psi_2)+\beta y\right]=-\gamma\nabla^2\psi_2\end{cases}\quad(1.1.4)$$

这里，$\psi_n\equiv p_n^{(0)}$，$\gamma\equiv\frac{E^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}$

$$y=0,\ 1\text{ 时，}\frac{\partial\psi_n}{\partial x}=0\quad(1.1.5)$$

$$y=0,\ 1\text{ 时，}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y\partial t}dx=0\quad(1.1.6)$$

二

首先，我们考虑线性稳定问题。为了简单起见，设描述基本流动的地转流函数是：$\psi_n^{(0)}=-U_n y$，由于小扰动的存在，总流函数是：

$$\psi_n=\psi_n^{(0)}+\varphi_n(x,y,t)\quad n=1,2\quad(1.1.7)$$

这里，$\psi_n^{(0)}>>\varphi_n(x,y,t)$

将（1.1.7）代入（1.1.4），可得到关于φ_n的线性方程组，取$\varphi_1=\mathrm{Re}Ae^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y)$，$\varphi_2=\mathrm{Re}\gamma Ae^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y)$，则有：

$$C=\frac{U_1+U_2}{2}-\frac{(k_m^2+F)}{(k_m^2+2F)}\left[\frac{\beta}{k_m^2}+\frac{i\gamma}{\alpha}\right]\pm\frac{\left[(U_1-U_2)^2k_m^4(k_m^4-4F^2)+4F^2(\beta+\frac{i\gamma k_m^2}{\alpha})^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2k_m^2(k_m^2+2F)}$$

其中，$k_m^2=\alpha^2+m^2\pi^2$

由上式，我们可得到三种特殊情形：

(1) $\gamma=0$，$\beta\neq0$：

$V_c=\frac{2\beta F}{[k_m^2(4F^2-k_m^4)]^{\frac{1}{2}}}$，对于$U_1-U_2=U_c+\Delta$，$\Delta<<U_c$，有$C_i\sim O(|\Delta|^{\frac{1}{2}})$；

(2) $\gamma = O(1)$, $\beta = 0$:

$$U_c = \left(\frac{2\gamma}{\alpha}\right)\cdot\frac{k_m}{(4F-k_m^2)^{\frac{1}{2}}}$$，对于 $U_1 - U_2 = U_c + \Delta$，

$\Delta << U_c$，有 $C_i \sim O(|\Delta|)$；

(3) $\gamma = 0$ $\beta = 0$

$$F_c = \frac{m^2\pi^2 + \alpha^2}{2}$$，对于 $F = F_c + \delta$，$\delta << F$，有 $C_i \sim O$ $(|\delta|^{\frac{1}{2}})$。

三

对于非线性稳定问题，为了求得问题的长时间均匀有效的展开式，我们必须引用多尺度扰动方法。

下面，也讨论三种特殊情形：

(1) $\gamma = 0$，$\beta \neq 0$：

根据线性理论，此时波增大率具有 $O(|\Delta|^{\frac{1}{2}})$ 的量级。因此，引入两个时间变量：$T_0 = t$，$T = |\Delta|^{\frac{1}{2}} t$，前者为快时间，后者为慢时间。

总流函数为：$\psi_n = -U_n y + \varphi_n(x, y, t)$ (1.1.9)

对于 $U_1 - U_2 = \Delta << 1$，方程组(1.1.4)成为：

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + |\Delta|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial T} + (U_2 + U_c + \Delta)\frac{\partial}{\partial x}\right]\times\left[\nabla^2\varphi_1 + F(\varphi_2 - \varphi_1)\right] + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\beta + FU_c \\ \quad + F\Delta) + J\left(\varphi_1, \nabla^2\varphi_1 + F(\varphi_2 - \varphi_1)\right) = 0. \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + |\Delta|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial T} + U_2\frac{\partial}{\partial x}\right]\times\left[\nabla^2\varphi_2 + F(\varphi_1 - \varphi_2)\right] + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\beta - TU_c - F\Delta) \\ \quad + J\left(\varphi_2, \nabla^2\varphi_2 + F(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = 0 \end{cases} \quad (1.1.10)$$

其中，$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$，

注意，$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial T_0} + |\Delta|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} + |\Delta|^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial T}$。

这里，对于 φ_n 其适当的尺度为 $|\Delta|^{\frac{1}{2}}$，所以取扰动场的渐近展开式如下：

$$\varphi_n = |\Delta|^{\frac{1}{2}}\varphi_n^{(1)} + |\Delta|\varphi_n^{(2)} + |\Delta|^{\frac{3}{2}}\varphi_n^{(3)} + \cdots\cdots \qquad (1.1.11)$$

将上式代入（1.1.10），比较方程两边 $|\Delta|^{\frac{1}{2}}$ 同次方幂的系数，可得到：

$|\Delta|^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}+(U_2+U_c)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\varphi_1^{(1)}+F(\varphi_2^{(1)}-\varphi_1^{(1)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x}(\beta+FU_c)=0 \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}+U_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\varphi_2^{(1)}+F(\varphi_2^{(1)}-\varphi_2^{(1)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x}(\beta-FU_c)=0 \end{cases} \qquad (1.1.12)$$

$|\Delta|$:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}+(U_2+U_c)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\varphi_1^{(2)}+F(\varphi_2^{(2)}-\varphi_1^{(2)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_1^{(2)}}{\partial x}(\beta+FU_c) \\ =-J\left[\varphi_1^{(1)},\ \nabla^2\varphi_1^{(1)}+F(\varphi_2^{(1)}-\varphi_1^{(1)})\right]-\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\nabla^2\varphi_1^{(1)}+F(\varphi_2^{(1)}-\varphi_1^{(1)})\right] \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}+U_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\varphi_2^{(2)}+F(\varphi_1^{(2)}-\varphi_2^{(2)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_2^{(2)}}{\partial x}(\beta-FU_c)=- \\ J\left[\varphi_2^{(1)},\ \nabla^2\varphi_2^{(1)}+F(\varphi_1^{(1)}-\varphi_2^{(1)})\right]-\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\nabla^2\varphi_2^{(1)}+F(\varphi_1^{(1)}-\varphi_2^{(1)})\right] \end{cases} \qquad (1.1.13)$$

$|\Delta|^{\frac{3}{2}}$:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial t}+(U_2+U_c)\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\varphi_1^{(3)}+F(\varphi_2^{(3)}-\varphi_1^{(3)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_1^{(3)}}{\partial x}(\beta+FU_c)= \\ -\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\nabla^2\varphi_1^{(2)}+F(\varphi_2^{(2)}-\varphi_1^{(2)})\right]-\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\nabla^2\varphi_1^{(1)}+F(\varphi_2^{(1)}-\varphi_1^{(1)})\right]\dfrac{\Delta}{|\Delta|}-\dfrac{\partial\varphi_1^{(1)}}{\partial x} \\ (F\dfrac{\Delta}{|\Delta|})-J\left[\varphi_1^{(2)},\nabla^2\varphi_1^{(1)}+F(\varphi_2^{(1)}-\varphi_1^{(1)})\right]-J\left[\varphi_1^{(1)},\nabla^2\varphi_1^{(2)}+F(\varphi_2^{(2)}-\varphi_1^{(2)})\right] \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial t}+U_2\dfrac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2\varphi_2^{(3)}+F(\varphi_1^{(3)}-\varphi_2^{(3)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_2^{(3)}}{\partial x}(\beta-FU_c= \\ -\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\nabla^2\varphi_2^{(2)}+F(\varphi_1^{(2)}-\varphi_2^{(2)})\right]+\dfrac{\partial\varphi_2^{(1)}}{\partial x}(F\dfrac{\Delta}{|\Delta|})-J\left[\varphi_2^{(2)},\nabla^2\varphi_2^{(1)}+F\right. \\ \left.(\varphi_1^{(1)}-\varphi_2^{(1)})\right]-J\left[\varphi_2^{(1)},\nabla^2\varphi_2^{(2)}+F(\varphi_1^{(2)}-\varphi_2^{(2)})\right] \end{cases} \qquad (1.1.14)$$

对齐次方程组（1.1.12），设其满足（1.1.5）的波动解是：

$$\begin{cases} \varphi_1^{(1)} = \mathrm{Re}A(T)e^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y) \\ \varphi_2^{(1)} = \mathrm{Re}\gamma A(T)e^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y) \end{cases} \tag{1.1.15}$$

将它们代入(1.1.12) 可得到：

$$C = U_2 + \frac{U_c}{2} - \frac{\beta(k_m^2+F}{k_m^2(k_m^2+2F)} \tag{1.1.16}$$

$$\gamma = \frac{k_m^2+F}{F} - \frac{\beta+FU_c}{F(V_2+V_c-C)} \tag{1.1.17}$$

由此可知：此阶问题，在两层的波动之间没有位相漂移。

下面，考察非齐次方程组（1.1.13）和（1.1.14），我们的注意力主要集中于方程右端的非齐次项。由于它们的存在，可能使方程解的渐近展开式中出现大期项，从而导致展开式非均匀有效。显然，为了保持展开式的均匀有效性，必须从非齐次项中，消除那些可能产生长期项的项，即诱发项。这也是扰动方法，特别是多尺度方法的关键和核心。

对于方程组（1.1.13）的右端，第一项稚可比项为零，这是上下层波动之间无位相漂移的反映。至于第二项的影响，我们可以通过设特解的方法来解决。设（1.1.13）的一特解为：

$$\varphi_n^{(2)} = \mathrm{Re}A_n^{(2)}(T)e^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y) \tag{1.1.18}$$

将上式代入（1.1.13）得到：

$$\begin{aligned} \gamma A_1^{(2)} - A_2^{(2)} &= -\left(\frac{1}{i\alpha F}\right)\frac{dA}{dT}\left[\frac{\beta+FU_c}{(V_2+V_c-C)^2}\right] \\ -A_1^{(2)} - \gamma^{-1}A_2^{(2)} &= -\left(\frac{\gamma}{i\alpha F}\right)\frac{dA}{dT}\left[\frac{\beta+FU_c}{(V_2-C)^2}\right] \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

由于 $A_1^{(2)}$、$A_2^{(2)}$ 的系数行列式为零，要使方程组有解，显然有：

$$\frac{dA}{dT}\left[\frac{\beta+FU_c}{(V_2+V_c-C)^2} + \gamma^2\frac{\beta-FU_c}{(V_2-C)^2}\right] = 0 \tag{1.1.20}$$

对于$\frac{dA}{dT} \neq 0$，应用较高深的代数知识，可证明方括里的项为零。根据（1.1.19）解出：

$$A_2^{(2)} = \gamma A_1^{(2)} + \left(\frac{1}{i\alpha F}\right)\frac{dA}{dT}\left\{\frac{\beta+FV_c}{(V_2+V_c-C)^2}\right\} \qquad (1.1.21)$$

这一式表明：这一阶问题，在两层的波动之间存在位相漂移。这里，我们取$A_1^{(2)}=0$，而且对特解（1.1.18）增加几乎是不重要的（但实际上是必要的）齐次解：$\varphi_n^{(2)} = \Phi_n^{(2)}(y, T)$。它表示对初始平均流动，其$O(|\Delta|)$阶的一个纬向流动修正。此时，总流动数是：

$$\begin{cases} \psi_1 = -U_1 y + |\Delta|^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re} A e^{i\alpha(x-ct)} \sin(m\pi y) + |\Delta| \Phi_1^{(2)}(y, T) + O(|\Delta|^{\frac{3}{2}}) \\ \psi_2 = -U_2 y + |\Delta|^{\frac{1}{2}} \mathrm{Re}\, \gamma A e^{i\alpha(x-ct)} \sin(m\pi y) + |\Delta| [\Phi_2^{(2)}(y, T) \\ \qquad + X_2^{(2)}(x, y, t, T)] + O(|\Delta|^{\frac{3}{2}}) \end{cases} \qquad (1.1.22)$$

这里，$X_2^{(2)} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i\alpha F}\right)\frac{dA}{dT}\left[\frac{\beta+FU_c}{(V_2+V_c-c)^2}\right] e^{i\alpha(x-ct)} \sin(m\pi y)$

将$\varphi_1^{(1)}$、$\varphi_2^{(1)}$、$\varphi_1^{(2)}$、$\varphi_2^{(2)}$代入方程组（1.1.14）右端，则得到：

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (V_2+U_c)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2 \varphi_1^{(3)} + F(\varphi_2^{(3)} - \varphi_1^{(3)})\right] + \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial x}(\beta + FU_c) = \\ \mathrm{Re}\, i\alpha A e^{i\alpha(x-ct)} \sin(m\pi y)\left\{\frac{\beta+FU_c}{(V_2+V_c-C)}\frac{\Delta}{|\Delta|} - F\frac{\Delta}{|\Delta|} - \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial y} \right. \\ \left. \frac{\beta+FU_c}{(V_2+U_c-C)} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial y^2} + F(\Phi_2^{(2)} - \Phi_1^{(2)})\right] + \frac{1}{\alpha^2 A}\frac{d^2A}{dT^2}\frac{\beta+FU_c}{(V_2+V_c-C)^2}\right\} \\ + \left[\frac{\beta+FU_c}{4(V_2+V_c-C)^2}\right] \times \frac{d|A|^2}{dT} \cdot m\pi \cdot \sin(2m\pi y) - \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{\partial^2 \Phi_1^{(2)}}{\partial y^2} + F(\Phi_2^{(2)} - \Phi_1^{(2)})\right\} \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_2\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\nabla^2 \varphi_2^{(3)} + F(\varphi_1^{(3)} - \varphi_2^{(3)})\right] + \frac{\partial \varphi_2^{(3)}}{\partial x}(\beta - FU_c) = \mathrm{Re}\, i\alpha\gamma A \\ e^{i\alpha(x-ct)} \sin(m\pi y)\left\{F\frac{\Delta}{|\Delta|} - \frac{\partial \Phi_2^{(2)}}{\partial y}\frac{\beta-FU_c}{(U_2-C)} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \Phi_2^{(2)}}{\partial y^2} + F(\Phi_1^{(2)} - \right.\right. \\ \left.\left. \Phi_2^{(2)})\right] - \frac{1}{\alpha^2 A}\frac{d^2A}{dT^2} \times \frac{\beta+FU_c}{(V_2+V_c-C)^2}\left(\frac{k_m^2+F}{F}\right)\right\} - \left\{\frac{\beta+FU_c}{4(V_2+V_c-C)^2}\right\} \times \frac{d|A|^2}{dT} \cdot m\pi \end{cases}$$

$$\sin(2m\pi y) - \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{\partial^2 \Phi_2^{(2)}}{\partial y^2} + F(\Phi_1^{(2)} - \Phi_2^{(2)})\right\} \qquad (1.1.23)$$

其中，$|A|^2=A\cdot A^*$，A^*为A的共轭表示。

由于上方程组，左端是一个与x、t有关的线性算子，而右端最后两项只与y、T有关，相对于x和t为"常数"，因而必须为零。我们得到：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial^2\Phi_1^{(2)}}{\partial y^2}+F(\Phi_2^{(2)}-\Phi_1^{(2)})\right]=\dfrac{\beta+F_c}{4(U_2+V_c-C)^2}\,\dfrac{d|A|^2}{dT}\cdot m\pi\cdot\sin(2m\pi y)\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\partial\Phi_2^{(2)}}{\partial y^2}+F(\Phi_1^{(2)}-\Phi_2^{(2)})\right]=-\dfrac{\beta+FU_c}{4(V_2+V_c-c)^2}\,\dfrac{d|A|^2}{dT}\cdot m\pi\cdot\sin(2m\pi y)\end{cases}\tag{1.1.24}$$

在上式中，$\Phi_1^{(2)}$关于$-\Phi_2^{(2)}$（或$\Phi_2^{(2)}$关于$-\Phi_1^{(2)}$）对于方程是对称的。设纬向流动的初始修正为零，则满足（1.1.6）的解是：

$$\Phi_1^{(2)}=-\Phi_2^{(2)}=-\frac{[|A|^2-|A(0)|^2]}{8(2m^2\pi^2+F)}\,\frac{\beta+FU_c}{(U_2+U_c-C)^2}\cdot m\pi\cdot\Big[\sin(2m\pi y)-\frac{\sinh[\sqrt{2F}(y-\frac{1}{2})]}{\cosh\sqrt{F/2}}\Big(\frac{m\pi}{\sqrt{F/2}}\Big)\tag{1.1.25}$$

相应有：

$$U_1^{(2)}-U_2^{(2)}=\frac{\partial}{\partial y}(\Phi_2^{(2)}-\Phi_1^{(2)})=\frac{[|A(T)|^2-|A(0)|^2]}{2(2m^2\pi^2+F)}\,\frac{m^2\pi^2(\beta+FU_c)}{(U_2+U_c-C)^2}\Big[\cos(2m\pi y)-\frac{\cosh[\sqrt{2F}(y-\frac{1}{2})]}{\cosh\sqrt{F/2}}\Big]\tag{1.1.26}$$

由此可知：对平均场的修正即使是微小的，但也同样是不稳定所需要的超过临界值的基本场切变增量。

这里，我们要着重指出：为了使包含$\varphi_\pi^{(3)}$的渐近展开式保持均匀有效性，显然必须对方程组（1.1.23）的右端非齐次项进行适当限制。由于方程组右端，分别包含$\mathrm{Re}\,i\alpha Ae^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y)$与$\mathrm{Re}\,i\alpha\gamma Ae^{i\alpha(x-ct)}\sin(m\pi y)$，这些项与齐次方程的特解成比例，均为使展开式中产生大期项的诱发项。应用E交化法，消除非齐次右端产生大期项的诱发项，也就是非齐次

项与非齐次方程的伴随齐次方程之解必须正交。参照（1.1.5），则可得振辐A的平衡方程：

$$\frac{d^2A}{dT^2}=\alpha^2C_{oi}^2A-\alpha^2NA\left[|A(T)|^2-|A(0)|^2\right] \qquad (1.1.27)$$

其中，$N=(2m^2\pi^2+F)^{-1}\left[\frac{(\beta+FU_c)m^2\pi^2U_c}{8(k_m^2+2F)(U_2+U_c-C)^2}\right]\Big[k_m^2$

$$(2F-k_m^2)+4m^2\pi^2(k_m^2-F)+(2F-k_m^4)\frac{4\tanh\sqrt{F/2}}{\sqrt{F/2}}\left(\frac{2m^2\pi^2}{2m^2\pi^2+F}\right)\Big]$$

，$C_{oi}^2=\left[\frac{2\beta^2F^2}{k_m^4(k_m^2+2F)^2}\right]\left[\frac{\Delta}{|\Delta|U_c}\right]$。

振辐方程（1.1.27）是二阶的，它与弹簧振子运动方程可比拟。

将$A=R\cdot e^{i\theta}$代入（1.1.27）式，分离实部和虚部得到：

$$\frac{d^2R}{dT^2}=\alpha^2C_{oi}^2R-\alpha^2NR\left[R^2-R^2(0)\right]+\frac{L^2}{R^3} \qquad (1.1.28)$$

其中，$L=R^2\left(\frac{d\theta}{dT}\right)$为一常数。

假定A的位相θ不随时间变化，且$\frac{d\theta}{dT}=0$，显然$L=0$。

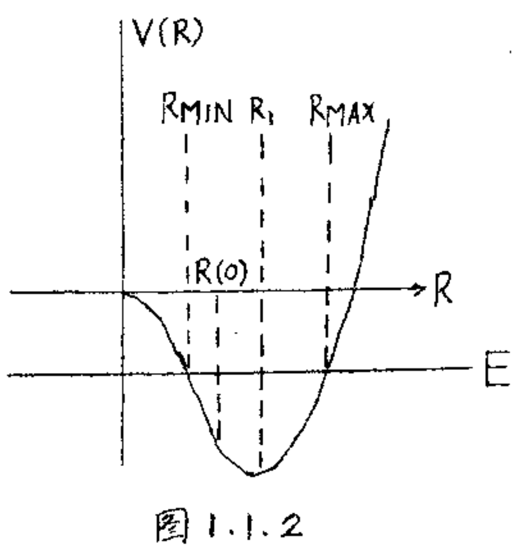

图1.1.2

则（1.1.28）成为：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2+V(R)=E \qquad (1.1.29)$$

与质点的能量类似，这里$V(R)=-\frac{\alpha^2}{2}\left[C_{oi}^2+NR^2(0)\right]R^2+\alpha^2N\cdot\frac{R^4}{4}$是坐标$R$所居的势能，$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2$相当于动能，$E=-\frac{1}{2}\left[Q_o^2-\alpha^2C_{oi}^2R^2(0)-\right.$