矩阵分析

数学教研室　杨克劭 编

哈尔滨工业大学

前　　言

日本、须田信英等著的《自动控制中的矩阵理论》一书内容较新、取材针对性强、有具体应用，但用它来作为我国工科研究生的教材有以下几个不便之处：

一、该书不是按教材特点编写的，例如，在 B—1—5（向量和矩阵的范数）中已较多的应用了在 B—1—11（特征值、特征向量）中才介绍的内容；

二、与我国工科研究生已经具备的《线性代数》的基础知识不相适应，例如线性空间、矩阵的 Jordan 标准形等，有的讲得很略，有的干脆只给结论，而应用这些知识的场合是很多的，不补充这些基础知识，学习起来困难较大；

三、不少的重要结果没有证明；

四、该书篇幅过大，故只能选用其主要部分；

五、习题数量太少。

为了适应目前研究生教材奇缺的急需，在该书的基础上改编成了这本讲义，作为在我校工科电类等专业研究生中开设《矩阵分析》课的教材，共授 60 学时，由于编者学识水平的局限，教学经验又不足，书中错误或不妥之处一定不少，请同志们批评指正，书稿承蒙龙文庭副教授审阅，在此表示感谢。

杨　克　劭

一九八二年十二月于哈尔滨工业大学

目　　录

第一章　线性空间与线性变换

在大学《线性代数》课里，n维向量空间 R^n 或 C^n 中关于向量的加，数与向量的积的运算所具有的性质，对于 $R^{m\times n}$ 的矩阵集合；低于n次的多项式的集合 $\dot{P}[x]_n$；闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的集合 $F[f(x)]=\{f(x)\,|\,f(x)\in c[a,b]\}$；线性齐次方程组 $Ax=\theta$ 的解的集合；……等的元素，关于它们的“加法”与“数乘”运算也具有类似的性质。因此，有必要对具有此类特性的集合的共性作进一步研究。为此，我们首先建立线性空间的概念及其有关的性质，这里充分注意到课程本身的任务而不追求其完整性，接着介绍线性变换的基本知识和 Euclid 空间。

第一节　群、环、体的概念

为了今后叙述和理解方便起见，我们先引入群、环、体的概念。

定义一　当集合 G 满足下列公理时，称 G 为**群**（group）。

a.　对于 G 的任意两个元素 α,β（今后简记为 $^\forall\alpha,\beta\in G$），可以定义某一种运算“o”，使得 $\alpha\text{o}\beta\in G$，且唯一（自闭性、唯一性）；

b.　$(\alpha\text{o}\beta)\text{o}\gamma=\alpha\text{o}(\beta\text{o}\gamma)$ $^\forall\alpha,\beta,\gamma\in G$（结合律成立）；

c.　G 中存在元素 e，使得

$$\alpha\text{o}e=e\text{o}\alpha=\alpha \qquad {}^\forall\alpha\in G.$$

并称 e 为 G 关于运算“o”的**单位元**；

d.　对于 G 的任意元素 α，均有元素 $\alpha^{-1}\in G$，使得

$$\alpha^{-1}\text{o}\alpha=\alpha\text{o}\alpha^{-1}=e$$

并称 α^{-1} 为元素 α 关于运算“o”的**逆元素**。

如果群 G 中的元素，关于运算“o”还满足交换律，即

$$\alpha\text{o}\beta=\beta\text{o}\alpha \qquad {}^\forall\alpha,\beta\in G$$

则称此**群为可换群或** Abel **群**。

当运算“o”是加法时，则称G**为加法可换群**，简称**为加群**（因一般加法运算均具可交换性）。加群中的单位元e即**零元** θ（采用θ作零元，以免与数 0 相混），逆元α^{-1}即**负元** $-\alpha$。

例 1　实数集 R 是加群，在 R 中除掉 0 后的集合，是关于乘法的可换群。

定义二　当集合$\tilde{R}$满足下列公理时，称$\tilde{R}$为**环**（ring），（采用$\tilde{R}$是由于习惯用R表示实数集）。

a.　若在$\tilde{R}$中定义加法“+”与乘法“·”，

$$\alpha+\beta\in\tilde{R},\alpha\cdot\beta\in\tilde{R} \qquad {}^\forall\alpha,\beta\in\tilde{R}$$

且 $\alpha+\beta$，$\alpha\cdot\beta$ 是唯一的（自闭性，唯一性）；

a.　$\tilde{R}$是加群；

c.　对于乘法“·”，结合律成立，即

$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma) \qquad \forall\alpha,\beta,\gamma\in\widetilde{R}$

d． 对于加法“+”与乘法“·”满足分配律

$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \qquad \forall\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\in\widetilde{R}$

$(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma \qquad \forall\alpha,\beta,\gamma\in\widetilde{R}$。

如果在环$\widetilde{R}$中，乘法“·”是可交换的，即

$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha \qquad \forall\alpha,\beta\in\widetilde{\in}$

则称环$\widetilde{R}$为**可换环**。

例 2 全体整数的集合

$$Z\{0.\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$$

是关于普通数的加法，乘法的可换环；

多项式全体 $P[x]$ 关于多项式的加法与乘法构成可换环。

例 3 设$\widetilde{R}$为任意环，将$\widetilde{R}$中的元排列成 nxn 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

这样的矩阵全体的集合，记为$\widetilde{R}^{n\times n}$。它关于矩阵的加法和乘法运算也构成环。并称$\widetilde{R}^{n\times n}$为**矩阵环**。但即使$\widetilde{R}$是可换环，$\widetilde{R}^{n\times n}$也不一定是可换环。

定义三 当集合 F 满足下列公理时，称 F 为**体** (field)。

a． F 是可换环；

b． F 中除零元 θ 以外的元，对乘法构成可换群。

例 4 全体有理数的集合，全体实数的集合，全体复数的集合，对于数的加法和乘法运算均构成体。

设p为质数，有限集合 $\{0.1,2,\cdots,p-1\}$ 一般记为 $GF(p)$，在其上定义mod$p$运算，即当 $\alpha—\beta$ 是 p 的倍数时。认为 $\alpha=\beta$。$GF(p)$ 构成体，并称为**伽罗瓦体** (Galois field)。

例 5 在 $GF(3)$ 上的 mod3 加法和乘法如下：

加　法

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

乘　法

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

例 6 对于 $Z^{2\times2}$ 上的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

虽然 $\det A=2\neq 0$，但在 $Z^{2\times 2}$ 上，A 是不可逆的，因为，通常的

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overline{\in} Z^{2\times 2}。$$

一般，若矩阵 $A\in\widetilde{R}^{n\times n}$ 为可逆元，则称 A 为**么模阵**。体 F 上矩阵 A 可逆的充要条件为 $\det A\neq 0$，并称为**正则矩阵**。

第二节 线性空间的定义与简单性质

定义四 当非空集合 V 与数体 F 满足下述公理时，称 V **为体 F 上的线性空间或向量空间**记为 $V(F)$：

a. 对于 $^{\forall}x,y\in V$，$x+y$ 有意义，V 是加群；

b. 当体 F 给定时，对于 $^{\forall}\alpha\in F$，$^{\forall}x\in V$，αx 有意义，而且 $\alpha x\in V$ 是唯一确定的；

c. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x\quad {}^{\forall}x\in V, {}^{\forall}\alpha,\beta\in F$；

d. 对于 F 的单位元 1，$1x=x$，$^{\forall}x\in V$；

e. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，$^{\forall}x$，$y\in V$，$^{\forall}\alpha\in F$；

f. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，$^{\forall}x\in V$，$^{\forall}\alpha$，$\beta\in F$。

例 7 n 维向量空间是线性空间；

$R^{n\times n}$ 关于矩阵的加法或数乘运算是线性空间；

多项式集合 $P[x]$，关于多项式的加法与数的乘法运算是线性空间；

实轴上定义的实连续函数的全体，是体 R 上的线性空间（关于函数的加法与数乘运算）。

线性空间 $V(F)$ 具有以下性质：

性质一 零元素是唯一的。

事实上，设 θ_1，θ_2 均为 $V(F)$ 的零元素，则

$$\theta_1=\theta_1+\theta_2=\theta_2+\theta_1=\theta_2$$

性质二 逆元素是唯一的。

事实上，设 x_1，x_2 均为 $x\in V(F)$ 的逆元素，θ 表示 $V(F)$ 的零元素，则

$$\begin{aligned}x_1&=x_1+\theta=x_1+(x+x_2)=(x_1+x)+x_2\\&=\theta+x_2=x_2\ 。\end{aligned}$$

若将 $V(F)$ 的元素 x 称为"**向量**"，则 x 的逆元素记为 $-x$ 也可称为**负向量**，并可定义

$$x-y=x+(-y)$$

性质三 $0x=\theta$，$\alpha\theta=\theta$，$(-1)x=-x$ 。

事实上

$$x+0x=1x+0x=(1+0)x=1x=x。$$

故 $0x=\theta$；又

$$\begin{aligned}\alpha\theta&=\alpha(x-x)=\alpha x-\alpha x=(\alpha-\alpha)x\\&=0x=\theta;\end{aligned}$$

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=(1-1)x$$
$$=0x=\theta$$

故 $(-1)x=-x$；

性质四 $\alpha x=\theta$ 则 $\alpha=0$ 或 $x=\theta$。

事实上，若 $\alpha\neq 0$，$x\neq\theta$，则

$$x=1x=\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x=\frac{1}{\alpha}(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}\theta=\theta$$

这与 $x\neq\theta$ 矛盾，故 $\alpha\neq 0$，$x\neq\theta$ 是不能同时成立的，于是性质四得证。

第三节 维数、基与坐标

定义五 设 x_1，x_2，…，$x_n\in V(F)$；若存在不全为零的数 k_1，k_2，…，$k_n\in F$，使得

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=\theta \tag{1.1}$$

则称向量 x_1，x_2，…，x_n 是**线性相关**的，否则称向量 x_1，x_2…，x_n 是**线性无关**的，此时（1，1）式只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时才成立；

线性空间 $V(F)$ 中线性无关向量的最大个数 n，称为**线性空间 V(F) 的维**，记为 $\dim V(F)=n$，此时称 $V(F)$ 为 **n 维线性空间**；

n 维线性空间 $V(F)$ 中任意一组（n个）线性无关的向量 e_1，e_2，…，e_n 称为 $V(F)$ 的一组**基**，若 $x\in V(F)$，则 x，e_1，e_2，…，e_n 是线性相关的，故 x 可唯一地由 e_1，e_2，…，e_n 线性表示

$$x=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n$$

其中 a_1，a_2，…$a_n\in F$ 称为向量 x 关于基 e_1，e_2，…，e_n 的**坐标**。并可记为

$$x=(a_1,\ a_2\cdots,\ a_n)$$

这样一来，我们就建立了 n 维线性空间与 n 维向量空间 R^n 或 C^n 的元素及运算之间的对应关系（同构关系），从而可以将 n 维线性空间中的问题的讨论，转化到讨论特殊的 n 维线性空间 R^n 或 C^n 中的相应问题，而后者我们是比较熟悉的，它也是比较简单的，这种化难为易，一般性的问题转化到特殊性问题来研究的方法，在数学中是常常被采用的，问题是不要将这两种空间混淆了。

例 8 已知 $P[x]_n$ 表示次数低于 n 次的多项式集合，显然

$$e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2,\ \cdots,\ e_n=x^{n-1}$$

是线性无关的，且 $^{V}f(x)\in P[x]_n$ 均可表示为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

可见 a_0，a_1，a_2，‥，a_{n-1} 就是 $f(x)$ 关于基 e_1，e_2，…，e_n 的坐标（即多项式的系数），如果我们选取基为

$$e_1'=1,\ e_2'=(x-a),\ e_3'=(x-a)^2,\ \cdots,\ e_n'=(x-a)^{n-1}$$

则由 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

因此，$f(x)$ 在基 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 下的坐标为 $f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$。

由此例可见，所有多项式的集合 $P[x]$ 是无穷维的线性空间；线性空间的基并不唯一，且线性空间中元素的坐标是取决于基的，当基改变后，向量的坐标也将随之改变，由于两组基之间的关系是容易知道的，下面我们来研究如何从两组基之间的关系去推断相应的坐标之间的关系。

设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$；$e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 为 n 维线性空间 $V(F)$ 的两组基，并设其间有如下关系：

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{cases} \tag{1.2}$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则（1，2）式可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

或

$$(e_1'\ e_2' \cdots e_n') = (e_1,\ e_2,\ \cdots e_n)A \tag{1.3}$$

其中 A 称为由基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到基 $e_1', e_2', \cdots, e_n$ 的**过渡矩阵**，它是正则的。设 $x \in V(F)$，且 x 关于这两组基可表示为

$$\begin{aligned} x &= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \\ &= x_1'e_1' + x_2'e_2' + \cdots + x_n'e_n' \end{aligned}$$

于是有

$$x = (e_1e_2\cdots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e_1'e_2'\cdots e_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$= (e_1e_2\cdots e_n)A\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

由坐标表示的唯一性，有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

由于A是可逆的，故有

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

此即由基的关系（1.3）所导出的相应坐标之间的关系。

例 9 设

$$\begin{cases} e_1 = (1,\ 0,\ \cdots,\ 0), \\ e_2 = (0,\ 1,\ \cdots,\ 0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n = (0,\ 0,\ \cdots,\ 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1' = (1,\ 1,\ \cdots,\ 1), \\ e_2' = (0,\ 1,\ \cdots,\ 1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' = (0,\ 0,\ \cdots,\ 1) \end{cases}$$

为n维向量空间 R^n 的两组基，易知有

$$(e_1'\ e_2' \cdots e_n') = (e_1\ e_2 \cdots e_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 1 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots -1 & 1 \end{pmatrix}$$

代入（1.4）有

$$x_1' = x_1,\quad x_2' = x_2 - x_1,\quad x_3' = x_3 - x_2,\quad \cdots,\quad x_n' = x_n - x_{n-1}.$$

第四节　线性子空间

定义六　线性空间 $V(F)$ 的一非空子集 W，如果关于 $V(F)$ 中的加法和数乘运算也构成线性空间，则称 **W 为 V(F) 的线性子空间**。

例10　$V(F)$ 的零元素 θ 组成的单元素集是 $V(F)$ 的线性子空间，并称为 $V(F)$ 的**零子空间**；

$V(F)$ 本身也是 $V(F)$ 的线性子空间。

$V(F)$ 的这两种特殊线性子空间，称为 $V(F)$ 的**平凡线性子空间**，除此以外，$V(F)$ 的其它线性子空间，均称为 $V(F)$ 的**非平凡线性子空间**；

$P[x]_n$ 是 $P[x]$ 的 n 维线性子空间；

齐次线性方程组

$$Ax=\theta \qquad A\in R^{m\times n},\ x\in R^n$$

的解的全体，当 $\operatorname{rank}A=r\leqslant n$ 时，是 n 维向量空间 R^n 的 $n-r$ 维线性子空间。

设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 是线性空间 $V(F)$ 的一组向量，不难验证，这组向量的所有可能的线性组合

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

所组成的集合是非空的，而且对 $V(F)$ 中所定义的加法和数乘运算是封闭的，且可验证它是 $V(F)$ 的一个线性子空间. 这个线性子空间称为是 **V(F) 的由 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 生成的线性子空间**，记为

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)$$

下面来讨论线性子空间的性质。

定理一　1°，两个向量组生成相同线性子空间的充要条件是这两个向量组等价（相互线性表示）；

2°，　$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)$ 的维数等于向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 的秩（向量组中线性无关向量的最大个数）。

证　1°，设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$；$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\beta_s$ 是线性空间的两个向量组，且

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2\cdots,\ \alpha_r)=L(\beta_1,\ \beta_2\cdots,\ \beta_s)$$

则每个 $\alpha_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 作为 $L(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s)$ 的向量均可被 $\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s$ 线性表示，同理 $\beta_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 作为 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)$ 的向量均可被 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 线性表示，所以向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$；$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s$ 等价；

反之，如果向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$；$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s$ 等价，则凡是能由向量组$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_s$ 线性表示的向量，均可由向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r$ 线性表示，反之亦然，故

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)=L(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots\beta_s)$$

2°，　设向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2\cdots,\ \alpha_r$ 的秩为 $m\ (\leqslant r)$，不妨设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 为其极大线性无关组，由于向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_r$ 与向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 等价，故

$$L(\alpha_1,\ \alpha_2\cdots,\ \alpha_r)=L(\alpha_1,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha_m)$$

而向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 是 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m)$ 的一组基，因而也是 $L(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r)$ 的一组基，故

$$\dim L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = m.$$

定理二 设 W 是 n 维线性空间 $V(F)$上的一 m 个维线性子空间 $(m\leqslant n)$，α_1，α_2，$\cdots$，α_m 是 W 的一组基，则这组基必可扩充为 $V(F)$ 的基。即在 $V(F)$ 中必可找到 $n—m$个向量α_{m+1}，α_{m+2}，$\cdots$，α_n，使得α_1，α_2，$\cdots$，α_m，α_{m+1}，α_{m+2}，$\cdots$，α_n是 $V(F)$ 的基。

证 对维数差 $n-m$ 用数学归纳法。

第一步 当 $n-m=0$ 即 $m=n$ 时，定理的结论是显然成立的；

第二步 设 $n-m=k$ 时，定理的结论成立；

第三步 证明 $n-m=k+1$ 时，定理的结论也成立。

事实上，既然 α_1，α_2，$\cdots$，α_m 还不是 $V(F)$ 的基，而它又是线性无关的，那么在 $V(F)$ 中必定有一个向量 α_{m+1}，不能被 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 线性表示，于是 α_1，α_2，$\cdots$，α_m，α_{m+1} 必定线性无关，由定理一、线性子空间 $L(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$是 $m+1$ 维的，因为 $n-(m+1)=(n-m)-1=1=k+1-1=k$，故由归纳法假设，线性子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ 的基 α_1，α_2，$\cdots$，α_m，α_{m+1} 可以扩充为 $V(F)$ 的基，故W的基 α_1，α_2，$\cdots$，α_m 可以扩充为 $V(F)$ 的基。

定理三 设 $V_1(F)$，$V_2(F)$ 是线性空间 $V(F)$ 的两个线性子空间，则它们的交 $V_1\cap V_2$ 也是 $V(F)$ 的线性子空间。

证 由于 $\theta\in V_1$，$\theta\in V_2$，故 $\theta\in V_1\cap V_2$，即 $V_1\cap V_2$ 非空。其次，设α，$\beta\in V_1\cap V_2$，则 α，$\beta\in V_1$，$\alpha,\beta\in V_2$，又由于 V_1，V_2 是 $V(F)$ 的线性子空间，故

$$\alpha+\beta\in V_1, \quad \alpha+\beta\in V_2$$

因此$\alpha+\beta\in V_1\cap V_2$，同理，$k\alpha\in V_1$，$k\alpha\in V_2$，$(k\in F)$，所以$k\alpha\in V_1\cap V_2$，可见$V_1\cap V_2$也是 $V(F)$ 的线性子空间。

定义七 设 $V_1(F)$，$V_2(F)$ 是线性空间$V(F)$ 的线性子空间，若$\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2$，则由一切 $\alpha_1+\alpha_2$ 所构成的 $V(F)$ 的子集合，记为 V_1+V_2，并称为$V(F)$的线性子空间 V_1 与 V_2 的**"和"**。

定理四 设 $V_1(F)$，$V_2(F)$ 是线性空间 $V(F)$ 的线性子空间，则它们的和 V_1+V_2 也是 $V(F)$ 的线性子空间。

证 由于 $V_1\subset V_1+V_2$，故 V_1+V_2 显然是非空的，其次，如果，α，$\beta\in V_1+V_2$，则有

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \text{ 且 } \alpha_1\in V_1, \ \alpha_2\in V_2$$

$$\beta=\beta_1+\beta_2 \text{ 且 } \beta_1\in V_1, \ \beta_2\in V_2$$

又因假设 V_1，V_2 均为 $V(F)$ 的线性子空间，所以

$$\alpha_1+\beta_1\in V_1, \qquad \alpha_2+\beta_2\in V_2$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\\&=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)\in V_1+V_2\end{aligned}$$

同理，设 $k\in F$，由于 $k\alpha_1\in V_1$，$k\alpha_2\in V_2$，故

$$k\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2)=k\alpha_1+k\alpha_2\in V_1+V_2$$

因此 V_1+V_2 也是 $V(F)$ 的线性子空间。

定理五 设 $V_1(F)$，$V_2(F)$ 是线性空间 $V(F)$ 的线性子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

证 设 $\dim V_1=n_1$，$\dim V_2=n_2$，$\dim(V_1\cap V_2)=m$，且 α_1，α_1，…，α_m 为 $V_1\cap V_2$ 的一组基，则由于 $V_1\cap V_2$ 也是 V_1，V_2 的线性子空间，故根据定理二，向量组 α_1，α_2，…，α_m 可分别扩充为 V_1，V_2 的基

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_{n_1-m};$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{n_2-m}.$$

今证

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n_1-m},\ r_1,\ \cdots,\ r_{n_2-m} \tag{1.5}$$

是 V_1+V_2 的一组基。

事实上，由于

$$V_1=L(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n_1-m});$$

$$V_2=L(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\ r_1,\ \cdots,\ r_{n_2-m})$$

所以，显然有

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n_1-m}r_1,\ \cdots,\ r_{n_2-m})$$

故只须证向量组（1.5）是线性无关的。

设有等式

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+q_1r_1+\cdots+q_{n_2-m}r_{n_2-m}=\theta \tag{1.6}$$

令

$$\begin{aligned}\alpha&=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_2-m}\beta_{n_1-m}\\&=-q_1r_1-\cdots-q_{n_2-m}r_{n_2-m}\end{aligned} \tag{1.7}$$

可见 $\alpha\in V_1$，$\alpha\in V_2$，因而 $\alpha\in V_1\cap V_2$，于是 α 可由 α_1，α_2，…，α_m 线性表示，记为

$$\alpha=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$$

则由（1.7）有

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m+q_1r_1+\cdots+q_{n_2-m}r_{n_2-m}=\theta$$

由于 α_1，α_2，…，α_m，r_1，…，r_{n_2-m}为 V_2 的基，是线性无关向量组，所以

$$l_1=l_2=\cdots=l_m=q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$$

将 $q_1=\cdots=q_{n_2-m}=0$ 代入（1.6)式，有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=\theta$$

而 α_1，α_2，…，α_m，β_1，…，β_{n_1-m} 是 V_1 的基，是线性无关向量组，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=p_1=\cdots=p_{n_1-m}=0$$

于是向量组（1.5）线性无关，定理证毕。

推论 设 $V_1(F)$，$V_2(F)$ 是 n 维线性空间 $V(F)$ 的两个线性子空间，

$$\dim V_1+\dim V_2<n$$

则 V_1，V_2 必含有非零的公共向量。

证 由定理五，此时

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$
$$=\dim V_1+\dim V_2>n$$

而 V_1+V_2 为 $V(F)$ 的线性子空间，显然

$$\dim(V_1+V_2)\leqslant n.$$

于是

$$\dim(V_1\cap V_2)>0$$

故 $V_1\cap V_2$ 含有非零向量。

设 $V_1(F)$，$V_2(F)$ 是线性空间 $V(F)$ 的线性子空间，且 $V_1\cap V_2=\{\theta\}$，则称和 V_1+V_2 为**直和**，并记为 $V_1\dot{+}V_2$ 以资区别。由此可见，和 V_1+V_2 为 $V(F)$ 的直和的充要条件为 $\dim(V_1\cap V_2)=0$。

定理六 设 $U(F)$ 是线性空间 $V(F)$ 的一个线性子空间，则一定存在 $V(F)$ 的另一线性空间 $W(F)$，使得

$$V=U\dot{+}W$$

证 设 $\dim U=m$，$\dim V=n$，α_1，α_2，…，α_m 为 U 的一组基，今将它扩充成$V(F)$的一组基 α_1，…，α_m，α_{m+1}，…，α_n，令

$$W=L(\alpha_{m+1},\ \cdots,\ \alpha_n)$$

则 $\qquad V=U\dot{+}W$。

第五节 线性变换

设 M，M' 是两个集合，如果存在某个法则 σ，能使 $a\in M$ 与 $a'\in M'$ 相对应，则称 σ 为由 M 到 M' 的**映射**，记为

$$\sigma(a)=a'$$

a' 称为 a 在映射 σ 下的**象**，而 a 则称 a' 在映射 σ 下的**原象**。

例11 若函数 $y=f(x)$ $x\in[a,\ b]$ 的值域为$[c,\ d]$，则它是数集$[a,\ b]$，$[c,\ d]$之间的一个映射；

$$\sigma(A)=\det A \qquad A\in R^{n\times n};$$
$$\sigma(f(x))=f'(x) \qquad f(x)\in P[x];$$
$$\sigma(\alpha)=\alpha_0; \qquad \forall\ v_0,\ \alpha\in V(F);$$
$$\sigma(\alpha)=\alpha; \qquad \forall\ \alpha\in V(F);$$
$$\cdots\cdots$$

都是映射。

线性空间 $V(F)$ 到自身的映射称为**变换**。

定义八 如果线性空间 $V(F)$ 的变换A满足

$$A(\alpha+\beta)=A(\alpha)+A(\beta) \qquad \forall\ \alpha,\ \beta,\ \in V$$
$$A(k\alpha)=kA(\alpha) \qquad \forall\ \alpha\in V,\ k\in F$$

则称变换A为线性空间 $V(F)$ 的**线性变换**。

例12 二维向量空间的旋转变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

是一线性变换；

$x = Ay$ 是一线性变换，$A \in R^{n\times n}$，x，$y \in R^n$；

恒等变换 $\sigma(\alpha) = \alpha$，零变换 $O(\alpha) = \theta$ 是线性变换；

$\sigma(f(x)) = f'(x)$，$f(x) \in P[x]$ 是线性变换；

设 $f(x) \in C[a, b]$，其全体记为 $F[f(x)]$，则

$$J[f(x)] = \int_a^x f(t)dt \qquad x \in [a, a]$$

是 $F[f(x)]$ 的线性变换。

根据线性变换的定义，以下事实是显然成立的。

1° $A(\theta) = \theta$

事实上 $A(\theta) = A(0\alpha) = 0A(\alpha) = \theta$；

2° $A(-\alpha) = -A(\alpha)$；

3° 若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r$，则

$A(\beta) = k_1A(\alpha_1) + k_2A(\alpha_2) + \cdots\cdots + k_rA(\alpha_r)$

4° 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = \theta$，则

$k_1A(\alpha_1) + k_2A(\alpha_2) + \cdots + k_rA(\alpha_r) = \theta$

即线性变换将线性相关的向量组变为线性相关的向量组，但其逆不成立。例如零变换。

设 e_1，e_2，…，e_n 是 n 维线性空间 $V(F)$ 的一组基，则由

$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_nc_n \quad x \in V$

有

$A(\alpha) = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \cdots + x_nAe_n$

由此可见，只要知道基的象 Ae_1，Ae_2，…，Ae_n，则任一向量 α 的象 $A\alpha$ 也就知道了。

5° 如果 $V(F)$ 的线性变换 A，$\mathbf{B}$ 对基的作用相等，即

$$Ae_i = \mathbf{B}e_i \qquad (i = 1.2, \cdots, n)$$

则 $A = \mathbf{B}$。

事实上设 $\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ 是 $V(F)$ 的任一向量，则由于

$$\begin{aligned} A\alpha &= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \cdots + x_nAe_n \\ &= x_1\mathbf{B}e_1 + x_2\mathbf{B}e_2 + \cdots + x_n\mathbf{B}e_n = \mathbf{B}\alpha \end{aligned}$$

即 A，$\mathbf{B}$ 对 $V(F)$ 的任一向量作用相等，故 $A = \mathbf{B}$。

6° 设 e_1，e_2，…，e_n 是 n 维线性空间 $V(F)$ 的一组基，α_1，α_2，…，α_n 为 $V(F)$ 的任一组向量，则一定有 $V(F)$ 的一个线性变换 A 存在，使得

$$Ae_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, u)$$

事实上，设 $\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in V(F)$，定义 $V(F)$ 的一个变换。

$$A\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \tag{1.8}$$

现证 A 是 $V(F)$ 的线性变换。

设在 $V(F)$ 中任取两个向量

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$$

于是

$$\beta+\gamma = \sum_{i=1}^{n} (y_i+z_i)e_i$$

因此有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\beta+\gamma) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i+z_i)\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} z_i\alpha_i = A\beta + A\gamma;\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(k\beta) = \sum_{i+1}^{n} (ky_i)\alpha_i = k\sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i = kA\beta$$

故 A 是 $V(F)$ 的线性变换。

又记

$$e_i = 0e_1+\cdots+0e_{i-1}+1e_i+0e_{i+1}+\cdots+0e_n \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

则由线性变换 A 的定义（1.8）式有

$$\mathbf{A}e_i = \alpha_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

证毕。

定义九 设 e_1，e_2，$\cdots e_n$ 是 n 维线性空间 $V(F)$ 的一组基，$\mathbf{A}$ 是 $V(F)$ 的一个线性变换，且

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A}e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2+\cdots+a_{n1}e_n \\ \mathbf{A}e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2+\cdots+a_{n2}e_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}e_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2+\cdots+a_{nn}e_n \end{aligned}\right. \tag{1.9}$$

若记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

则（1.9）可用矩阵表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(e_1,\ e_2,\ \cdots,e_n) &= (\mathbf{A}e_1,\ \mathbf{A}e_2,\ \cdots,\ \mathbf{A}e_n) \\ &= (e_1e_2\cdots e_n)A\end{aligned}$$

称矩阵 A 为线性变换 $\mathbf{A}$ 在基 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 下的矩阵。

定理七 设 $\alpha\in V(F)$，$\mathbf{A}$ 是 $V(F)$ 的一线性变换且

$$\mathbf{A}(e_1,\ e_2\cdots e_n)=(e_1e_2\cdots e_n)A$$

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\qquad \mathbf{A}\alpha=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$$

则

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\tag{1.10}$$

证 由于

$$\alpha=(e_1e_2\cdots e_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\alpha=\mathbf{A}(e_1\ e_2\cdots e_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=(e_1\ e_2\cdots e_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

另一方面

$$\mathbf{A}\alpha=(e_1e_2\cdots e_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

由坐标表示的唯一性，故

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

证毕。

由于线性变换 $\mathbf{A}$ 对应的矩阵 A 是由基 e_1，e_2，$\cdots$，e_n 所决定的，故若基改变了，$\mathbf{A}$ 所对应的矩阵亦将随之而变。并可由基之间的关系导出相对应的矩阵之间的关系。

定理八 设 e_1，e_2，$\cdots$，e_n；e_1'，$e_2'\cdots$，e_n' 分别为 n 维线性空间 $V(F)$ 的两组基，$\mathbf{A}$ 为 $V(F)$ 的一线性变换，若

$$\mathbf{A}(e_1e_2\cdots,\ e_n)=(e_1e_2\cdots e_n)A$$

$$\mathbf{A}(e_2'\cdots e_n')=(e_1'e_2'\cdots e_n')B$$