高等数学习题集解答

第 二 册

北 京 广 播 电 视 大 学

目　　录

第二篇　数学分析

第十章　函　　数

绝对值的运算

10-1　$|x|<5$　　$-5<x<5$

10-2　$|x-3|<4$　　$-4<x-3<4$　　$-1<x<7$

10-3　解一：　$x^2<9$　　$x^2-9<0$　　$(x-3)(x+3)<0$

x		-3		3	
$x+3$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
x^2-9	$+$		$-$		$+$

$\therefore$　不等式的解为　$-3<x<3$

解二：　$x^2<9$　　$\sqrt{x^2}<\sqrt{9}$　　$|x|<3$

$\therefore$　$-3<x<3$

10-4　$0<(x-2)^2\leqslant 4$　　$(x-2)^2>0$

$x<2$　或 $x<2$

又　$(x-2)^2\leqslant 4$　　$x(x-4)\leqslant 0$　　$0\leqslant x\leqslant 4$

$\therefore$　不等式组解是　$0\leqslant x<2$ 或 $2<x\leqslant 4$

10-5　$|x|<x$　　若 $x>0$　　$|x|=x$

若 $x<0$　　$-x>x$　　$\therefore$　　$x<0$

不等式的解为　$x<0$

10-6　　$$\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$$

若　$\frac{x}{1+x}>0$　　$\left|\frac{x}{1+x}\right|=\frac{x}{1+x}$

若　$\frac{x}{1+x}<0$　　$-\frac{x}{1+x}>\frac{x}{1+x}$

整理　$x(1+x)<0$

不等式的解为　$-1<x<0$

10-7　$|x^2-3x+2|>x^2-3x+2$

$-(x^2-3x+2)>x^2-3x+2$

整理得：　$(x-1)(x-2)<0$　　不等式的解是 $1<x<2$

求下列方程的实根：

10-8 $|x|=x+1$

依定义：$|x|=\sqrt{x^2}$

两边平方：$x^2=x^2+2x+1$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$

经验证 $x=-\frac{1}{2}$是原方程的解

10-9 $|x|=-x$

若 $x>0$ $|x|\neq -x$ 若 $x<0$ $|x|=-x$

方程的实根是 $x\leqslant 0$

10-10 $|\sin x|=\sin x+2$

若 $\sin x>0$，方程无解

若 $\sin<0$ $-\sin x=\sin x+2$

$\sin x=-1$

$\therefore$ $x=\pm 2K\pi-\dfrac{\pi}{2}$ $(K=0,1,2,3\cdots\cdots)$

10-11 $|2x+3|=x^2$

若 $2x+3>0$，$2x+3=x^2$ $(x-3)(x+1)=0$

$\therefore$ $x_1=3$ $x_2=-1$

若 $2x+3<0$ 方程无实根

函数值的求法

10-12 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求$f(2)$，$f(-2)$，$f(0)$，$f(a)$，$f(a+b)$

$f(2)=\dfrac{|2-2|}{2+1}=0$ $f(-2)=\dfrac{|-2-2|}{-2+1}=-4$

$f(0)=\dfrac{|0-2|}{0+1}=2$ $f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$ $f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+1}$

10-13 若$\varphi(x)=2^{x-2}$求$\varphi(2)$，$\varphi(-2)$，$\varphi(0)$，$\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)$

$\varphi(2)=2^{2-2}=2^0=1$ $\varphi(-2)=2^{-4}=\dfrac{1}{16}$

$\varphi(0)=2^{0-2}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$ $\varphi\left(\dfrac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}-2}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

10-14 若$\varphi(t)=t^3+1$ 求$\varphi(t^2)$ $[\varphi(t)]^2$

$\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$，$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1$

10-15 若 $f(x)=x^2-3x+7$， 求$f(x+\Delta x)$， $f(x+\Delta x)-f(x)$

$f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)+7=x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x^2)-3x-3\Delta x+7$

$=x^2-3x+7+(2x-3)(\Delta x)+(\Delta x)^2$

$f(x+\Delta x)-F(x)=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+7-(x^2-3x+7)$

$=(2x-3)(\Delta x)+(\Delta x)^2$

$=(2x-3+\Delta x)\Delta x$

10-16　若$F(x)=\frac{1}{x}$　　求$F(x+\triangle x)-F(x)$

$$F(x+\triangle x)-F(x)=\frac{1}{x+\triangle x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\triangle x}{x(x+\triangle x)}=\frac{-\triangle x}{x(x+\triangle x)}$$

10-17　若$\psi(x)=\ln x$　　证明：$\psi(x)+\psi(x+1)=\psi[x(x+1)]$

证明：$\psi(x)+\psi(x+1)=\ln x+\ln(x+1)=\ln[x(x+1)]$

$\therefore\quad \psi(x)+\psi(x+1)=f[x(x+1)]$

10-18　$f(z)=az$　　证明：(a)　$f(-z)\cdot f(z)-1=0$

(b)　$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$

证明：(a)　$f(-z)\cdot f(z)-1=a^{-z}\cdot a^{z}-1=a^{0}-1=0$

$\therefore\quad f(-z)\cdot f(z)-1=0$

(b)　$f(x)\cdot f(y)=a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$

$\therefore\quad f(x)f(y)=f(x+y)$

10-19　若$\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$证明：$\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$

证明：$\varphi(y)+\varphi(z)=\ln\frac{1-y}{1+y}+\ln\frac{1-z}{1+z}$

$$=\ln\frac{1+yz-(y+z)}{1+yz+(y+z)}=\ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}}$$

$\therefore\quad \varphi(y)+\varphi(z)=\varphi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)$

10-21　若　$F(t)=2t^{2}+\frac{2}{t^{2}}+\frac{5}{t}+5t$

证明：$F(t)=F\left(\frac{1}{t}\right)$

证：$F\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^{2}+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^{2}}+\frac{5}{\left(\frac{1}{t}\right)}+\frac{5}{t}$

$$=2t^{2}+\frac{2}{t^{2}}+\frac{5}{t}+5t$$

$\therefore\quad F(t)=F\left(\frac{1}{t}\right)$

10-23　若$F(x)=x^{2}+\cos x$

证明：$F(x)=F(-x)$

证：$F(-x)=(-x)^{2}+\cos(-x)=x^{2}+\cos x$

$\therefore\quad F(x)=F(-x)$

10-24 若$\varphi(z)=\sin z-5z^3$

证明：$\varphi(-z)=-\varphi(z)$

证：$\varphi(-z)=\sin(-z)-5(-z)^3$

$$=-\sin z+5z^3=-(\sin z-5z^3)$$

$\therefore\quad \varphi(-z)=-\varphi(z)$

10-25 若$\psi(x)=2\sin x-3\cos x$

证明：$\psi(x+2n\pi)=\psi(x)$　　其中n为整数。

证：$\psi(x+2n\pi)=2\sin(x+2n\pi)-3\cos(x+2n\pi)$

$$=2\sin x-3\cos x$$

$\therefore\quad \psi(x+2n\pi)=\psi(x)$

10-27 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

求 $\varphi(3),\varphi(2),\varphi(0),\varphi(0.5),\varphi(-0.5)$。

解：$\varphi(3)=3-1=2,\varphi(2)=2-1=1$

$\varphi(0)=2$　　　　$\varphi(0.5)=2$

$$\varphi(-0.5)=2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{2}}$$

10-28 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

求 $\varphi(1),\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)\quad \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

解：

$$\varphi(1)=0\qquad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\varphi(-2)=0\qquad \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{2}}$$

函数的定义域

10-29

$$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$$

解 $\because\quad x^2-3x+2\neq 0\quad x\neq 1\quad x\neq 2$

y 的定义域为$(-\infty,1)(1,2)\ (2,\infty)$

10-33

$$y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$$

$x\neq 0$　又　$1-x^2\geqslant 0\quad |x|\leqslant 1$

y 的定义域为$[-1,0)(0,1]$

10-36

$$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$$

$x\geqslant 0\qquad x-2\neq 0\qquad x\neq 2$

y 的定义域为$(0,2),(2,\infty)$

10-38
$$y=\frac{1}{\lg(1-x)}$$

$\lg(1-x)\neq 0 \quad x\neq 0 \quad 1-x>0 \quad x<1$

y 的定义域为$(-\infty, 0)(0, 1)$

10-39
$$y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$$

$x+2\geqslant 0 \qquad x\geqslant -2$

$1-x>0 \qquad x<1$

$\therefore$ y 的定义域为$(-2, 1)$

10-40
$$y=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}>0$$

解分式不等式得：$-1<x<1$

y 的定义域为$(-1, 1)$

10-41 $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\log a(2x-3) \qquad (a>1)$

$x-2\neq 0 \qquad x\neq 2$

又$2x-3>0 \qquad x>\frac{3}{2}$

y的定义域为$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$，$(2, \infty)$

10-42 $y=\lg(\sqrt{x-4})+\sqrt{6-x})$

$x-4\geqslant 0 \qquad x\geqslant 4$

$6-x\geqslant 0 \qquad x\leqslant 6$

y的定义域为$(4, 6)$

10-43
$$y=\sqrt{\lg\left(\frac{5x-x^2}{4}\right)}$$

$\lg\frac{1}{4}(5x-x^2)\geqslant 0 \qquad \frac{1}{4}(5x-x^2)\geqslant 1$

整理得：$x^2-5x+4\leqslant 0$

$(x-4)(x-1)\leqslant 0$

解不等式得：$1\leqslant x\leqslant 4$

函数的定义域为$[1, 4]$

10-44 $y=\log_2(\log_2 x)$

$\log_2 x>0 \qquad x>2^0 \qquad x>1$

y的定义域为$(1, \infty)$

10-45 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

$\sin x\geqslant 0$，……$-2\pi\leqslant x\leqslant-\pi$，$0\leqslant x\leqslant\pi$……

$16-x^2\geqslant 0$ $\quad -4\leqslant x\leqslant 4$

y的定义域：$[-4,-\pi]$，$[0,\pi]$

10-46

$$y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$$

∴ $\sin x-\cos x\neq 0$ $\quad \mathrm{tg}x\neq 1$

$x\neq n\pi+\frac{\pi}{4}$ $\quad (n=0, \pm 1, \pm 2\cdots\cdots)$

y的定义域为$x\neq n\pi+\frac{\pi}{4}$ $\quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\cdots)$

10-47 $y=\mathrm{tg}(x+1)$

$x+1\neq\frac{2n+1}{2}\pi$ $\quad (n=0, \pm 1, \pm 2\cdots\cdots)$

$x\neq\frac{2n+1}{2}\pi-1$ $\quad (n=0, \pm 1, \pm 2\cdots\cdots)$

y 的定义域为 $x\neq\frac{2n+1}{2}\pi-1$

10-48 $y=\mathrm{tg}\sqrt{x}$

$x>0$ $\quad x\neq(n\pi)^2$ $\quad (n=1, 2, 3\cdots\cdots)$.

y 的定义域为：$x>0$ 且 $x\neq(n\pi)^2$ $\quad (n=1, 2, 3\cdots\cdots)$

10-49

$$y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$$

$\cos x>0$ $\quad 2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad (k=0\pm 1, \cdots\cdots)$

y 的定义域为$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad (k=0, \pm 1\pm 2\cdots\cdots)$

10-50 $y=arc\ \cos\sqrt{2x}$

解：$-1\leqslant\sqrt{2x}\leqslant 1$

解不等式组得：$x\leqslant\frac{1}{2}$

又 $2x\geqslant 0$ $\quad\therefore\quad x\geqslant 0$

定义域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

10-52 $y=arc\ \sin(2+3^x)$

解：$-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$，$\quad -3\leqslant 3^x\leqslant-1$

$\because\quad 3^x>0$ $\quad\therefore y$无意义

10-53 $y=\lg\sin x$

解 $\sin x>0$ $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0\pm1\pm2\cdots\cdots)$

定义域为：$2k\pi,(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)$

10-54 $y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$

解 $\because$ $x+\sqrt{x^2+1}>0$

定义域为 $(-\infty,\infty)$

10-55 $y=\sqrt{3-x}+\arccos\dfrac{x-2}{3}$

解 $3-x\geqslant0$，$x\leqslant3$

又 $-1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant1$ 解不等式组得：$-1\leqslant x\leqslant5$

定义域为 $[-1,3]$

10-56 $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$

解：定义域为：$(0,1)(1,\infty)$

10-58 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$

解定义域 $(-\infty,0)$ $(0,2)$

10-59 设$y=f(x)$的定义域是(0.1)，问：

(a) $f(x^2)$ (b) $f(\sin x)$

(c) $f(x+a)(a>0)$ (d) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$

解：(a) $f(x^2)$

$0\leqslant x^2\leqslant1$ $\therefore$ $0\leqslant x\leqslant1$

定义域是 $[0,1]$

(b) $f(\sin x)$ $0\leqslant\sin x\leqslant1$

定义域为 $\left[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ $(k=0,\pm1\pm2\cdots\cdots)$

(c) $f(x+2)$ $(a>0)$ $0\leqslant x+a\leqslant1$ $-a\leqslant x\leqslant1-a$

定义域为 $(-a,-a+1)$

(d) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$

$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant1\\ 0\leqslant x-a\leqslant1\end{cases}$ $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant-a+1\\ a\leqslant x\leqslant a+1\end{cases}$

解 $-a+1$ 得 $a=0.5$

$\therefore$ 当$0\leqslant a\leqslant0.5$时定义域为$(a,1-a)$

当$a>0.5$时定义域不存在。

10-60 已知从高 h 处落下的重物所经过的路程由公式：

$S=\frac{1}{2}gt^2$来确定，问：

(a) 此函数的定义域如何？

(b) 解析式$S=\frac{1}{2}gt^2$的定义域如何。

解：(a) $S=\frac{1}{2}gt^2$ $\quad h=\frac{1}{2}gt^2$ $\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

定义域为 $\left[0 \quad \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$

(b) $S=\frac{1}{2}gt^2$ $\quad S\geqslant 0$ $\quad \therefore \ -\infty<t<\infty$ $\quad$ 定义域为$(-\infty,\infty)$

在61—64中$f(x)$与$\varphi(x)$是否表同一函数？说明其理由，并在哪一个区间内，它们是相同的。

10-61 $f(x)=\frac{x}{x}$ $\quad \varphi(x)=1$

解：因为$f(x)$在$f(0)$时不存在，所以$f(x)$与$\varphi(x)$的定义域不同，故$f(x)$与$\varphi(x)$不表示同一函数。

但在$x\neq 0$时在$(-\infty,0)$，$(0,\infty)$内它们是相同的。

10-62 $f(x)=\lg x^2$ $\quad \varphi(x)=2\lg x$

解：因为$f(x)$的定义域为$(-\infty,\infty)$而$\varphi(x)$的定义域为$(0,\infty)$，它们不表示同一函数，但在$(0,\infty)$内它们是相同的（可以互化）。

10-63 $f(x)=x$ $\quad \varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

解：因为$f(x)$的定义域为$(-\infty,\infty)$。而$\varphi(x)$的定义域为$(0,\infty)$它们不表示同一函数。但在$(0,\infty)$内它们是相同。

10-64 $f(x)=x$ $\quad \varphi(x)=\sqrt{x^2}$

建 立 函 数 关 系

解：它们不表示同一函数，因为它们的对应关系不同。

但在$[0,\infty]$内$f(x)$与$\varphi(x)$是相同的。建立函数关系：

10-65 温度计上摄氏 0 度对应华氏32度，摄氏100度对应华氏212度，试求将摄氏温标为华氏温标的函数。

解：设摄氏为y度对应华氏为x度

$\because \ \frac{y}{x-32}=\frac{100}{212-32}$ $\quad \therefore \ y=\frac{5}{9}(x-32)$

10-66 设M函密度不均匀细杆OB上的一点，若OM的质量与OM的长度平方成正比，又知$OM=4$寸，其质量为 8 单位，试求OM的质量与长度间的关系？

解 设$OM=x$ $\quad OM$的质量为m

由题意得：$m=Kx^2$， $\quad K=\frac{1}{2}$

关系式为 $\quad m=\frac{1}{2}x^2$

10-67 一物体作直线运动，已知阻力大小与物体运动的速度成正比，但方向相反，当物体以1米/秒速度运动时阻力为2克，建立阻力与速度间的关系。

解：设物体所受的阻力为F，速度为V。

由题意得：$F=-KV$

因为$V=1$米/秒　　$F=2$克　　$\therefore\ K=2$

关系式为　$F=-2V$

10-68 电压在某电路上等速下降，在实验开始时电压为12伏特，经过8秒后电压下降到6.4伏特，试把电压V表示时间t的函数。

解：设在某一时刻t的电压为Vt。

由题意知：$Vt=V_0-at$

因为　$Vt=6.4$伏特，　$V_0=12$伏特　　$t=8$秒

所以　$6.4=12-8a$　　$a=0.7$　　关系式为$Vt=12-0.7t$　$(t\geqslant 0)$

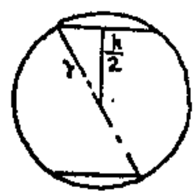
10-69 已知三角形中有边长分别为a和b，设r为两边的夹角，试将三角形的面积成r的函数。并求其定义域。

解：设三角形的面积为S

由题意得：$S=\frac{1}{2}a.b\sin r$

因为　$S>0$　　$\therefore$　$\sin r>0$　　定义域为$(0,\pi)$

10-70 在半径为的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积表为其高的函数，并求此函数的定义域。



10.70图

解：设球内接圆柱的体积为V，其高为h。

$$V=\pi\left(r^2-\frac{h^2}{4}\right)h$$

$$V>0\qquad h>0\ r^2-\frac{h^2}{4}>0$$

$h<2r$

此函数的定义$(0,2r)$

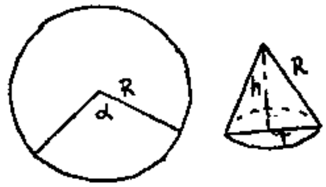
10-72 一物体受压缩弹的推力而运动，如这弹簧一端面定于原点，原长$2l$，压缩后长度为l，弹簧系数为K，试将物体所受之力表为距离之函数，（只考虑弹簧长度由l变至$2l$的过程）。

解：由虎克定律得

$$F=K(2l-x)$$

定义域为：$l\leqslant x\leqslant 2l$

10-73 把一圆形铁片，自中心处剪去中心角为α的一扇形后围成一无底圆锥，试将这圆锥的体积表为α的函数。



10.73图

解：如图：

$2\pi R-\alpha R=2\pi r$

$$r=\frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi}$$

$h=\sqrt{R^2-r^2}$

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(2\pi-\alpha)^2R^2}{4\pi^2}\sqrt{R^2-\frac{(2\pi-\alpha)^2R^2}{4\pi^2}}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi^2-(2\pi-\alpha)^2}$$

$$=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}$$

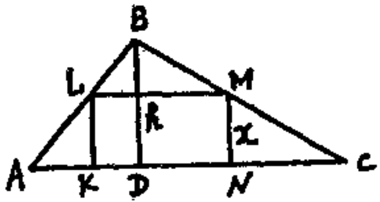
$$\therefore\quad V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}\qquad(0<\alpha<2\pi)$$

10-74 底$AC=b$，高$BD=h$的三角形ABC中（如下图）内接矩形$KLMN$。其高记为x，将矩形之周长P和面积S表为x的函数

解：如图：

(1) 求周长P

在$\triangle BLM$，$\triangle BAC$中 $\triangle BLM\sim\triangle BAC$



10.74图

$$\frac{h-x}{h}=\frac{ML}{b}\qquad ML=\frac{b(h-x)}{h}$$

$$P=2x+\frac{2b(h-x)}{h}=\frac{2}{h}[bh+(h-b)x]$$

(2) 面积S
$$S=x\cdot ML=x\cdot\frac{b(h-x)}{h}=\frac{b}{h}(h-x)x\qquad 0<x<h$$

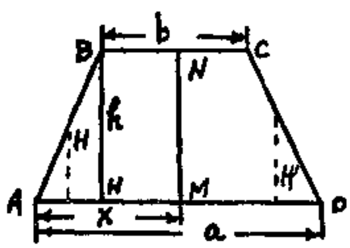
10-75 在$\triangle ABC$中，$AB=6$厘米，$AC=8$厘米，$\angle BAC=x$，试将边$BC=a$表为变量x的函数。

解：由余弦定理得：

$$a=\sqrt{6^2+8^2-2\times6\times8\cos x}=\sqrt{100-96\cos x}\qquad 0<x<\pi$$

10-76 等腰梯形$ABCD$(如图)，其两底分别为$AD=a$，和$BC=b$（$a>b$）高为$HB=h$，引直线$MN=BH$，MN与顶点A的距离$AM=x$，($0\leqslant x\leqslant a$)将梯形位于直线MN之左的面积S表为x的函数。

解：如图所示：



10.76图

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$时

$$H:h=x:\frac{a-b}{2}$$

$$H=\frac{2hx}{a-b}$$

$$S=\frac{1}{2}x\frac{2hx}{a-b}=\frac{h}{a-b}x^2\quad 当\quad \frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$$

$$S=\left[x-\frac{a-b}{2}+x\right]h\cdot\frac{1}{2}=\left(x-\frac{a-b}{4}\right)h$$

当 $\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$

$$\left(a-\frac{a+b}{a}\right):h=(a-x):H \qquad H=\frac{2h(a-x)}{a-b}$$

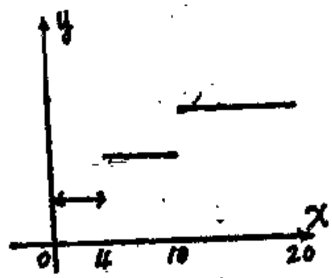
$$S=\frac{h(a+b)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2h(a-x)}{(a-b)}(a-x)=h\left(\frac{(a+b)}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right)$$

10-78 某公共汽车路线全长为20里，票价规定如下，乘座4里以下者收费5分，乘座4－10里收费1角，10里以上收费1角5分，试将票价表成路程的函数并作图。

解：设乘座的路程为 x，票价为 y，那么 y 与 x 间的相依关系由公式：

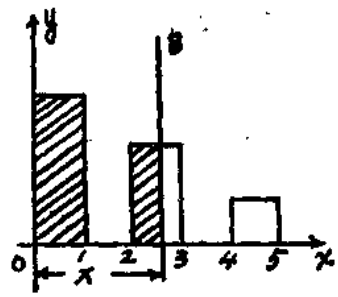
$$y=\begin{cases}0.05(\text{元}),\ 0<x<4\\ 0.1(\text{元}),\ 4\leqslant x\leqslant 10\\ 0.15(\text{元}),\ 10<x\leqslant 20\end{cases}$$

给定



10.78图

10-79 有三个矩形，其高分别等于3米，2米，1米，而底皆为1，彼此相距1米放着（如图）假定 x（$-\infty<x<\infty$）连续变动，（即直线 AB 连续地平行移动），试将阴影部分的面积 S 表为距离 x 的函数。



10.79图

$$S=\begin{cases}0 & -\infty<x\leqslant 0\\ 3x & 0<x\leqslant 1\\ 3 & 1<x\leqslant 2\\ 3+2(x-2)=2x+1 & 2<x\leqslant 3\\ 5 & 3<x\leqslant 4\\ 5+(x-4)=x+1 & 4<x\leqslant 5\\ 6 & 5<x\leqslant\infty\end{cases}$$

10-80 在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上有3克重的物质均匀分布着，此外又有一克重的物质集中在 $x=3$ 处，设 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内变化，试将区间 $(-\infty, x)$ 一段的质量 M 变为 x 的函数。

解：

$$M=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{3}{2}x & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 3 & 2<x<3\\ 4 & x\geqslant 3\end{cases}$$

函数性质的讨论

10-81 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶的函数（在各函数中 $a>1$）。

a) $y=x^4-2x^2 \qquad f(x)=x^4-2x^2$

$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$ 偶函数

b) $y=x-x^2 \qquad f(x)=x-x^2$

$f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2=-(x+x^2)$ 非奇非偶函数

d) $y=2^x \qquad f(x)=2^x$

$f(-x)=2^{-x}$ 非奇非偶函数

e) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{125} \qquad f(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{125}$

$$f(-x)=(-x)-\frac{(-x)^3}{6}+\frac{(-x)^5}{125\text{函}}=-\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{125}\right]$$

$=-f(x)$ 奇函数

g) $y=\sin x-\cos x \qquad f(x)=\sin x-\cos x$

$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$

$=-(\sin x+\cos x)$ 非奇非偶函数

h) $y=\operatorname{tg}x \qquad f(x)=\operatorname{tg}x$

$$f(-x)=\operatorname{tg}(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\operatorname{tg}x=-f(x)$$ 奇函数

i) $y=e^{-x^2} \qquad f(x)=e^{-x^2}$

$f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$ 偶函数

j) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2} \qquad f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$$ 偶函数

k) $y=\frac{a^x-a^{-x}}{2} \qquad f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^{-x}-a^x}{2}=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

$=-f(x)$ 奇函数

l) $y=\frac{x}{a^x-1}, \qquad f(x)=\frac{x}{a^x-1}$

$f(-x)=\frac{-x}{a^{-x}-1}$ 非奇非偶函数

m) $y=\frac{a^x+1}{a^x-1} \quad f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{\frac{1}{a^x}+1}{\frac{1}{a^x}-1}=\frac{1+a^x}{1-a^x}=\frac{a^x+1}{a^x-1}$$

$=-f(x)$ 奇函数

n) $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　　$f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$

$$f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-1}{a^x+1}=-x\cdot\frac{1-a^x}{a^x+1}=x\frac{a^x-1}{a^x+1}$$

$=f(x)$　　偶函数

10-82　证明函数 $y=\log a(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数

证明：$y=\log a(x+\sqrt{x^2+1})=f(x)$

$$f(-x)=\log a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log a(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\log a\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\log a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\log a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以　$y=\log a)x+x^2+1)$　　为奇函数

10-83　假设下面所考虑的函数都是定义在$(-l,l)$内，证明 a）两个偶函数的和是偶函数两个奇函数的和是奇函数，b）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

证明：a）① 设$f(x)$　$g(x)$为偶函数，则$f(-x)=f(x)$，

$g(-x)=g(x)$作，$h(x)=f(x)+g(x)$

$h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$

$h(x)$　　是偶函数

② 设$f(x)$，$g(x)$为奇函数，则$f(-x)=-f(x)$

$g(-x)=-g(x)$作 $h(x)=f(x)+g(x)$

$h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)+[-g(x)]$

$=-h(x)$　　$h(x)$是奇函数

b）① 设$f(x)$，$g(x)$是偶函数，则$f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$

作$h(x)=f(x)$、$g(x)$

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=h(x)$　　$h(x)$是偶函数

② 设$f(x)$，$g(x)$是奇函数，则$f(-x)=-f(x)$

$g(-x)=-g(x)$作$h(x)=f(x)g(x)$

$h(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)][-g(x)]$

$=f(x)g(x)=h(x)$　　$h(x)$是偶函数

③ 设$f(x)$是偶函数$g(x)$是奇函数，则$f(-x)=f(x)$

$g(-x)=-g(x)$　作　$h(x)=f(x)g(x)$

$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)$

$=-h(x)$　　$h(x)$是奇函数

10-84　证明：不论$f(x)$是定义在$(-l,l)$内的什么样的函数$f(x)+f(-x)$是偶函数。$f(x)-f(-x)$是奇函数？

证：设 $h(x)=f(x)+f(-x)$

$h(-x)=f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=h(x)$

$\therefore$ $f(x)+f(-x)$ 为偶函数

设 $h(x)=f(x)-f(-x)$

$h(-x)=f(-x)-f[-(-x)]=f(-x)-f(x)$

$=-[f(x)-f(-x)]=-h(x)$

$\therefore$ $f(x)-f(-x)$ 是奇函数

10-85 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其周期：

a） $y=\sin^2 x$

$f(x+\pi)=\sin^2(x+\pi)=(-\sin x)^2=\sin^2 x=f(x)$ 周期为 π

b） $y=\sin x^2$ 用反证法证

设周期为$T>0$ 对任 x 应有$\sin(x+T)^2=\sin x^2$

$(x+T)^2=x^2+K\pi \qquad (K=0, \pm1, \pm2\cdots\cdots)$

$T^2+2xT-K\pi=0$

例如取$K=1$，$T^2+2xT-\pi=0$

T值与x有关，即不存在一个T，对任意x使上式成立，所以 $y=\sin x^2$ 无周期

d） $y=\cos 2x$

$f(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)=\cos(2\pi+2x)$

$=\cos 2x=f(x)$ 周期为 π

e） $y=\sin\pi x$

$f(x+2)=\sin\pi(x+2)=\sin(\pi x+2\pi)=\sin\pi x=f(x)$ 周期为 2

g） $y=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x$

$f(x+4)=1+\cos\dfrac{\pi}{2}(x+4)=1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x+2\pi\right)$

$=1+\cos\dfrac{\pi}{2}x=f(x)$ 周期为 4

h） $y=\sin(x+1)$

$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+1=\sin(x+1+2\pi)$

$=\sin(x+1)=f(x)$ 周期为2π

i） $y=\cos(x-2)$

$f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)-2=\cos(x-2+2\pi)$

$=\cos(x-2)=f(x)$ 周期为2π

j） $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$

$f(x+\pi)=\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(x+\pi)]=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=f(x)$ 周期为 π

10-86 验证下列函数在区间 $(-\infty,\infty)$ 内是单调增加的

a） $y=3x-6$ 若 $x_1<x_2$ 即 $x_2-x_1>0$

$f(x_2)-f(x_1)=(3x_2-6)-(3x_1-6)=3(x_2-x_1)>0$