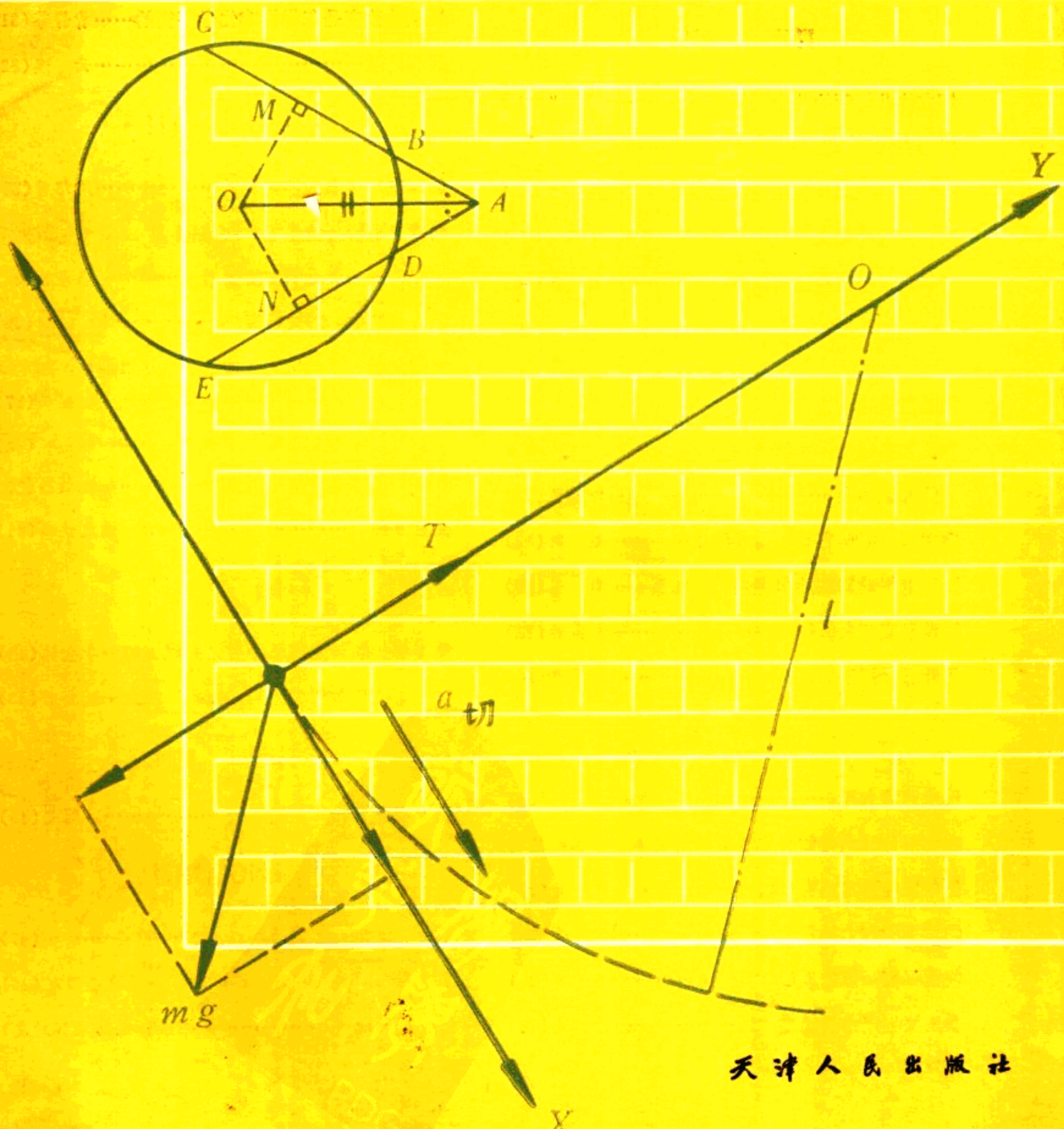
5

GAOZHONG KECHENGFUDAO

高中课程辅导



天津人民出版社

E xercises

I. Some letters are missing in each of these words. Put the words in full:

1. won_erf_l 2. phys_c_l 3. h_lls_de 4. sm_ke
5. stup_d 6. s_pport 7. gr_in 8. em_ty
9. hap_en 10. pr_udly

II. Fill in the blanks with the words given:

to, by, on, at, of, in, for, out, off, into

1. I can find___which is right and which is wrong.
2. Please put___more clothes. It's cold outside.
3. All the students are ready ___ the exam after a month of revision.
4. That interesting book was written ___ Edgar Snow.
5. The street lights are usually turned on at seven p.m. ___ summer.

III. Change the following into indirect speech:

1. Mary said, "My brother is doing his homework now."
2. "I have to finish this today." said Henry.
3. The teacher asked, "Do you understand?"
4. He said, "What will you do tomorrow?"
5. Mother said, "Don't make such noise, Tom."

IV. Change the following into passive voice:

1. We'll build a large modern hospital here next year.
2. People speak English in many countries.
3. Have you looked the word up in the dictionary?
4. You must pay attention to spelling.
5. The boss made her work long hours.

V. Put them into English:

1. 我不知道他们的工作进行得怎样了。
2. 不去看电影的可以看电视。
3. 这本书是用英文写的。
4. 到学校去大约需要半个小时。
5. 情况越来越糟了。

(王树凯供稿)

高中课程辅导 第五辑〔高一下学期〕

编辑出版 天津人民出版社
(天津市赤峰道124号)
1981年4月第一版
统一书号：7072·1210

印 刷 天津新华印刷二厂
发 行 天津市新华书店
1932年4月第二版第二次印刷
定价：0.26元

高中课程辅导

第五辑

〔高一下学期〕

目录

数学

解立体几何题的几个要领

门 树 慧

我们要学好立体几何，提高解题能力，应该先学好这门学科的基础知识，牢牢掌握住基本概念、公理、定义和定理，搞清定理之间的逻辑关系；同时，还要多看图，多画图．可以自己动手制作简易模型，从不同角度加以观察，画出它的各种位置的草图．这样不断的练习，画图能力和空间想象能力就可以逐步提高．但要较快提高解题能力，还应抓住以下几个要领．

重视基本练习题

提高解题能力，必须从作基本练习开始，要不断提高解这些题的准确性和速度；还要养成一个习惯，每解完一道题以后，小结一下："这个题应用了哪些概念和定理？用了哪些数学方法？"这样作，不但可以巩固所学过的知识，还可以提高运用多种数学方法解题的技巧，为解较复杂的题目打好基础．

例1 如图1，$ABCD—A'B'C'D'$为一长方体，A_1，B_1，C_1，D_1分别为侧棱中点，$AD=4$，$DC=3$，$AA'=8$．标出下列各题的位置．

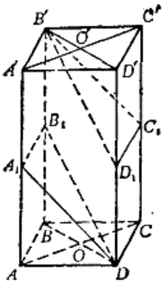


图1

(1) A_1D和平面ABC所成的角；

〔可以表示为$(A_1D,\widehat{\ }ABC)$〕

(2) DD'和BC所成的角；

(3) 平面$B'C'C$和平面$A'C'C$所成的角；

(4) $B'D_1$在平面ABC上的射影；

(5) 若$XY \parallel BB'D'$，求XY；

(6) 若$(XY,\widehat{\ }BCA)<90°$，求XY；

(7) 最大面积的矩形；

(8) 若XY和$X'Y'$关于平面A_1DC对称，求XY和$X'Y'$；

(9) 若XY到平面A_1DC的距离等于$X'Y'$到平面A_1DC的距离，求XY和$X'Y'$，

(10) 若$(XY,\widehat{\ }B'BC')=(XY,\widehat{\ }C'D'C)$，求$XY$．

〔**本题**答案〕

(1) $\angle ADA_1$；(2) 直角（如$\angle BB'C'$）；(3) $\angle ACB$；(4) BD；(5) AA'、CC'；(6) $B'D_1$、B_1D、A_1D；(7) $BDD'B'$；(8) D_1C_1和AB；(9) D_1C_1和AB；(10) AA'和CC'．

〔**本题小结**〕

(1) 解题时应用了直线和平面平行、异面直线所成的角、直线和平面所成的角、射影和对称等概念；

(2) 本题应用了平移法．

还可以解一些灵活性强的小题，以提高分析能力．

例2 如图2，一个半球装满水，把球转45°后，还剩多少水？

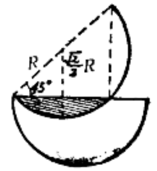


图2

〔**分析**〕半球转45°后，剩下的水应装在一个球缺中，若半球半径为R，则球缺的高为$R-\frac{\sqrt{2}}{2}R$，球缺的底为$\sqrt{2}R$，于是便可计算出球缺的体积．

还可以进一步思考：若半球转30°，60°，n°后，还剩多少水？这样反复思考，将有助于提高解题能力．

证明、计算、作图相互配合

许多立体几何题往往不单纯是计算或证明题，而是证明中有计算，计算时又需证明，在证明或计算过程中又常常需要辅以作图．这里应注意，空间作图不同于平面作图，作图过程主要是根据作图公法把逻辑层次表达出来．如作辅助平面时，要根据决定平面的公理；在解计算题时，要特别注重证明，以保证计算的合理性．

例3 如图3 直角三角形ABC在平面M内，$AC=18cm$若P点在M外，且$PA=PB=PC$，P到平面M的距离为40 cm求P点到直角边BC的距离．

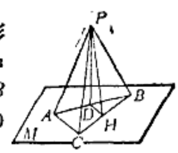


图3

〔**分析要点**〕

由P点向平面M作垂线，垂足D在什么位置？因为$PA=PB=PC$，所以$DA=DB=DC$，于是D点应为三角形ABC的外心．又因为三角形ABC为直角三角形，所以D应为斜边AB的中点．

由以上分析可以看出，先要通过推证确定D点位置，并作必要的辅助线$PH\perp BC$于H，连DH，进而利用有关定理计算出$PH=41$cm．解题过程中，计算、证明、作图是互相交错，密切配合的．

注重利用截面

许多立体几何题目和截面有关．在柱、锥、台、球的常见截面中，主要有轴截面、平行于底的截面、对角面、过顶点的截面、过某一棱或某一对角线的截面、和轴平行或和某一棱平行的截面等．

我们应利用常见截面把立体几何问题转化为平面几何问题，也就是利用截面中线段和角之间的关系把已知元素和未知元素联系起来，进而运用平面几何有关定理去解题．

要熟练运用某些截面中的基本关系式．如图4表示一正棱锥，设底面有n条边，边长为a，侧棱长为b．高为h，斜高为m，底面外接圆半径为R，底面边心距为r．则应熟记以下关系式：

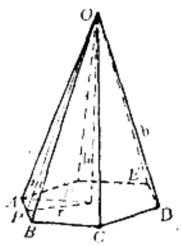


图4

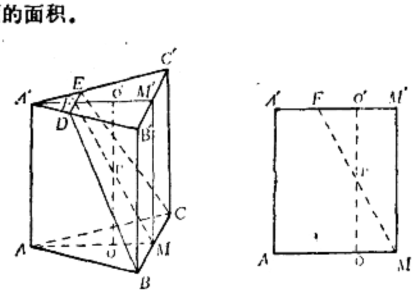
$b^2=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$；

$b^2=R^2+h^2$；

$m^2=r^2+h^2$；　　$R^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$；

$a=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$；　　$a=2r\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$．

例4　如图5，正三棱柱棱长是a，过它的底的一边和上下底中心连线的中点作一截面，求这截面的面积．



（1）　　　　（2）

图5

〔解法要点〕

（1）截面是什么图形？（答：梯形．）

（2）欲求梯形高FM，把角平分面$A'M'MA$画出〔如图5（2）〕，则可根据平面几何定理进行计算FM．（答：$FM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$．）

（3）F为$A'M'$的三等分点，则截面梯形面积可以求出．（答：$S_{梯}=\frac{4}{9}\sqrt{3}a^2$）

例5　如图6，经过正方体的对角线作截面，这截面在什么位置时面积最小？

〔分析要点〕

（1）截面为矩形（如图6，为什么？），

$S_{截面}=AB\cdot MK$；

（2）当MK为AB和CD的公垂线时，面积取最小值，这时M和K应分别在什么位置？（答：M，K分别为CD和AB中点时，

$$S_{最小}=\frac{\sqrt{6}}{2}a^2．）$$

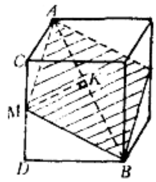


图6

要注意运用代数和三角知识

在学习立体几何时，也应特别注意运用多种数学方法以及代数、三角知识解题，这样才能使所学到的数学知识融汇贯通，不断提高自己综合运用数学知识的能力．

例6　如图7，圆锥内有一内接圆柱，它的高等于圆锥底半径．已知圆柱全面积和圆锥底面积的比为3：2，求圆锥的轴和它的母线所成的角．

〔略解〕圆锥轴截面积如图7所示．

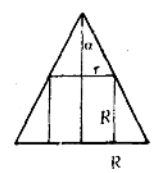


图7

由已知　$\frac{2\pi r^2+2\pi rR}{\pi R^2}=\frac{3}{2}$，

$\therefore\quad 2\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R}=\frac{3}{2}$．　　①

又　　$\frac{R-r}{R}=\mathrm{tg}\alpha$．　　②

由①，②得　$4\mathrm{tg}^2\alpha-12\mathrm{tg}\alpha+5=0$，

$\therefore\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{2}$　或　$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$．

$\because\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{R-r}{R}<1$，

故　$\mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{2}$不合题意，所以$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$，

$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$．

例7 半径为R的球内切于一个圆台，已知圆台和球的全面积之比为m，求圆台上下底的半径．

解：设S为圆台全面积，S_1为球面积，r_1，r为圆台上、下底半径，l为圆台母线的长．作圆台轴截面，如图8所示，$CMDH$为截面梯形，O为球心，A，B，F为切点，连AB，OF．则

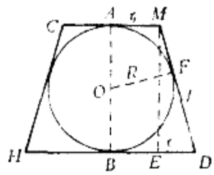


图8

$AB\perp HD$，$OF\perp MD$．

$$\therefore\quad \frac{S}{S_1}=\frac{\pi(r+r_1)l+\pi r^2+\pi r_1^2}{4\pi R^2}=m. \quad ①$$

又 $AM=MF$，$BD=FD$．

$\therefore\quad l=r+r_1$． ②

②代入①得 $l^2+r_1^2+r^2=4mR^2$， ③

由$\triangle MED$得 $l^2=(r-r_1)^2+4R^2$． ④

由②，④解得 $rr_1=R^2$． ⑤

将⑤，②代入③得 $r^2+r_1^2=4mR^2-(r^2+r_1^2+2R^2)$，

即 $r^2+r_1^2=R^2(2m-1)$． ⑥

由⑤，⑥ $\begin{cases} rr_1=R^2, \\ r^2+r_1^2=R^2(2m-1). \end{cases}$

解得 $r=\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1}+\sqrt{2m-3})$；

$r_1=\frac{R}{2}(\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-3})$．

在$m<\frac{3}{2}$时有解，在$m=\frac{3}{2}$时为圆柱．

射影在截面作图与计算中的应用

夏圣亭

射影在立体几何中有着广泛的应用，特别在截面作图与计算中更是这样，本文在这方面作些探讨，供同学们参考．

射影的概念

从图形上所有各点作一平面的垂线，其垂足的集合称为这个图形在此平面上的正射影，简称射影．平面称为射影面，垂线称为投射线．

若图形就在射影面上，则此图形即为它本身的射影．

定理1 若线段l与射影面N的交角为α，那末l在平面N上的射影l'满足下列关系

$$l'=l\cdot\cos\alpha \quad ①$$

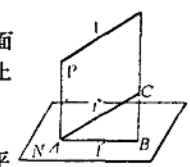


图1

证 过l作平面N的垂直平面P．

在平面P上，将l平移到l''的位置，使其一端与l'端点A重合．

在由l'，l''所组成的$Rt\triangle ABC$中，可知

$\angle CAB=\alpha$，$AB=AC\cdot\cos\alpha$，

即 $l'=l\cdot\cos\alpha$． ①式成立．

定理2 若一平面封闭图形其所在平面与射影面的二面角的平面角为α，则此封闭图形的面积Q与其射影面积Q'间满足下列关系

$$Q'=Q\cdot\cos\alpha. \quad ②*$$

证 这里只证平面图形为直线形的情况．**

先证平面图形为三角形的情况．

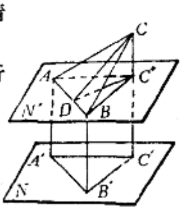


图2

若$\triangle ABC$有一边AB平行射影面N．过AB作平面N'使面N'∥面N．

设投射线AA'，BB'，CC'交平面N'于A、B、C''，在N'内作$C''D\perp AB$，D为垂足，连CD，按三垂线定理有

$CD\perp AB$，

且CD的射影为$C''D$，按定理1，有

$C''D=CD\cdot\cos\alpha$．

推出 $Q'=S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle ABC''}$

$=\frac{1}{2}AB\cdot C''D=\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\cos\alpha$

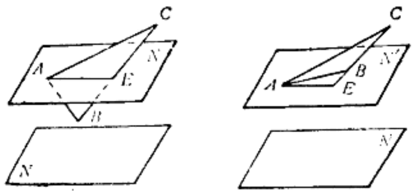
$=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\alpha=Q\cdot\cos\alpha$．

若设$\triangle ABC$有一边平行射影面N，那末过A点

可作平面N'使

面$N' \parallel$面N，

此时平面N'与$\triangle ABC$所在平面必有交线AE，于是成为下图(1)，(2)二种状况之一.（图3）（$\triangle ABC$在面N与面N'间的情况与(2)类似.）



(1)　　　　(2)

图 3

在此二种情况下都可按前法，利用三角形面积的加减来证明

$Q' = Q \cdot \cos\alpha$.

从三角形的情况容易推广到平面凸多边形，或平面凹多边形.因为这些图形都可以分割成三角形，用三角形面积的代数和推证②式成立.

射影在截面作图与计算中的应用

有关截面的作图与计算，经常用到射影的知识，本文以下面二题为例，对此作一简略的介绍.

例1 一截面截长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱AA_1，B_1C_1，CD于点E,F,G. 试作出截面与长方体表面的交线.

由于E,F,G三点中，任何二点都不共一个侧面，因此用一般方法是不能完成作图的.

取E,F,G三点在底面$A_1B_1C_1D_1$的射影A_1，F，G_1，由$EA_1 = GG_1$可知EA_1G_1G四点共面.延长GE，G_1A_1交于H，则H既在截面上，又在底面$A_1B_1C_1D_1$上，故H为截面与底面的一个交点.（图4）

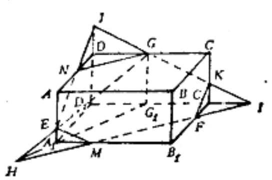


图 4

连HF，设HF交A_1B_1于M，延长MF，D_1C_1交于I，连IG交CC_1于K，延长KG，D_1D交于J，连JE交AD于N.再连EM，FK，GN得六边形$EMFKGN$即是截面与长方体表面的交线.

例2 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，过底面上相邻二边AB．BC的中点E，F作与底面成α角的截面Q，求这个截面的面积.

设截面Q的面积为S，它在底面上的射影面积为S'，二面角$Q-EF-\triangle BEF$的平面角为α.

由于α可在（0，π）内变动，因此S是α的函数.除去$\alpha=0$外，这是一个连续的分段函数，在各段上其对应法则是各不相同的，一般可运用射影定理推出

$$S = \frac{S'}{|\cos\alpha|}.\ (\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})\quad (\frac{\pi}{2}, \pi))$$

今分别予以讨论：

1．$\alpha = 0$

此时截面Q就是正方体的底面.

$S = a^2$

2．$0 < \alpha \leq \operatorname{arc\ ctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$

（图5）

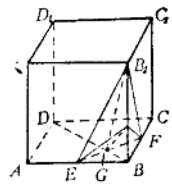


图 5

这是当$\alpha > 0$，截面Q与侧棱BB_1相交时的情况，设EF与BD交于G，由$GB = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ 得

$\alpha \leq \angle B_1GB = \operatorname{arc\ ctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$，为此段分界角.

此时截面Q是等腰三角形，它在底面上的射影为$\triangle BEF$，

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a,$$

于是　$S = \dfrac{a^2}{8\cos\alpha}$.

3．$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

（图6）

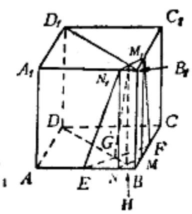


图 6

此时截面Q与上底面$A_1B_1C_1D_1$相交，设交线为M_1N_1，Q为等腰梯形，在底面上的射影为等腰梯形$MNEF$，MN与BD的交点为H，显然

$$S' = S_{\triangle BEF} - S_{\triangle BMN} = GB^2 - HB^2 = (GH+HB)^2 - HB^2.$$

其中　$GH = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$，$HB = \frac{\sqrt{2}}{4}a - a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$，

$$\therefore\ S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)a^2.$$

4．$\alpha = \frac{\pi}{2}$

截面Q为矩形

$$S=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2.$$

5. $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$（图7）

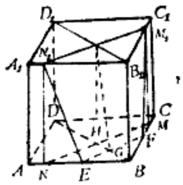


图7

此时截面Q为等腰梯形，同3设置，

$$S'=S_{\triangle BMN}-S_{\triangle BEF}=HB^2-GB^2$$
$$=HB^2-(HB-GH)^2.$$

又 $GH=-a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$,

$$HB=\frac{\sqrt{2}}{4}a-a\operatorname{ctg}\alpha,\quad(\operatorname{ctg}\alpha<0)$$

因此

$$S=\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)a^2.$$
$$(\cos\alpha<0)$$

6. $\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{2}}{4}<\alpha<\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}$（图8）

分界角$\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}$是$\angle D_1GB$.

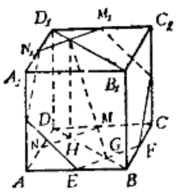


图8

此时截面Q为六边形，在底面上的射影为六边形$NAEFCM$.仍设MN与DB的交点为H.

$$S'=S_{\square ABCD}-S_{\triangle BEF}-S_{\triangle DMN}$$
$$=a^2-GB^2-DH^2.$$

由 $GH=-a\cdot\operatorname{ctg}\alpha$，$HD=GD-GH$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}a+a\cdot\operatorname{ctg}\alpha,$$

得 $S=\dfrac{1+6\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha+4\operatorname{ctg}^2\alpha}{4\cos\alpha}\cdot a^2$.

7. $\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}\leqslant\alpha<\pi$

截面Q与棱DD_1相交是个五边形，同前，用射影公式推出 $S=-\dfrac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

利用导数对本题作进一步研究后可知，当$\alpha=\pi-\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$时，截面积达到极大值

$$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

此时截面Q为正六边形.

---

* $\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.若$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，

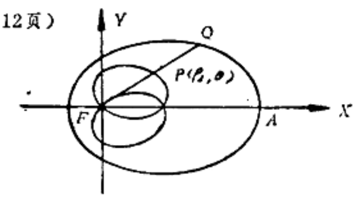
$Q'=Q\cdot|\cos\alpha|$.

又正棱锥，正棱台，园锥，园台的侧面积Q与侧面在底面上的射影面积Q'间，也有关系

$Q'=Q\cdot\cos\alpha$.

** 应用定积分可以证明②式在平面封闭图形为曲线形时也是成立的.

（上接12页）



后，去求其极坐标方程，常使问题变得简单.利用极坐标法求轨迹方程，其步骤与直角坐标系里的方法基本相同，但必须注意所选公式、方程变形、分析轨迹等在极坐标系中的特殊性.

例9 在椭圆$\rho=\dfrac{6}{2-\cos\theta}$的一焦点半径$FQ$上，从$Q$向$F$截取线段$QP$等于其半长轴长．求$P$的轨迹.

解 由椭圆方程可知其半长轴长为4，其一焦点为极点，其长轴在极轴上.

设P的极坐标为$(\rho_1,\ \theta)$，则

$\rho_1=|FP|=|FQ|-|QP|$.

但$|FQ|=\rho=\dfrac{6}{2-\cos\theta}$，$|QP|=4$，

$$\therefore\quad\rho_1=\frac{6}{2-\cos\theta}-4=\frac{4\cos\theta-2}{2-\cos\theta},$$

∴ 所求轨迹方程为

$$\rho=\frac{4\cos\theta-2}{2-\cos\theta}.$$

最后还应说明：现阶段对轨迹的证明虽不予以要求，但对轨迹方程的讨论，检查轨迹方程所代表之轨迹与题意要求的轨迹是否吻合等情况，还是应当注意的，这里不多赘述.

解题研究

用反证法证明立体几何题

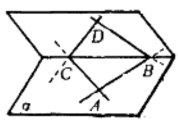
王 剑 英

反证法是一种重要的数学证明方法，它是通过证明结论的反面是错误的，从而肯定结论的正确性（也即通过证明原命题的逆否命题成立来证明原命题成立）．它是间接证法之一，当某些命题不易或不能从原命题直接证明时，常采用反证法加以证明．反证法在立体几何题的证明中运用较广，下边仅就这个问题谈些粗浅的看法．

证明异面直线

证明两条直线是异面直线，常常采用反证法．其方法是：先否定结论——假定它们在同一个平面；然后经过推理引出矛盾；最后否定假定，从而证明了结论成立．

例1．求证和两条异面直线AB，CD同时相交的两条直线AC，BD也是异面直线．



已知 AB、CD是异面直线，AC、BD同时和AB，CD相交．

求证 AC和BD也是异面直线．

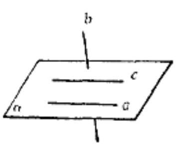
分析 这个题直接从题设条件，推出结论AC和BD是异面直线是困难的．此时，我们就改证它的逆否命题，否定AC，BD是异面直线$\Rightarrow$否定AB，CD不是异面直线成立，从而证明原命题成立．

证明 假设AC，BD不是异面直线，即它们一定在同一个平面α内，这时四点A，B，C，D都在α内，根据公理1，AB，CD就在平面α内，这与已知条件AB和CD是异面直线相矛盾，因此，AC，BD不是异面直线是不可能的．所以，AC，BD也是异面直线．

例2 已知a，b是异面直线，直线$c\parallel a$，且c不与b相交．

求证 c与b是异面直线．

分析 欲证直线c，b是异面直线，直接证有困难，还用反证法，那只要证明$c\nparallel b$且c不与b相交即可．



证明 假设c，b不是异面直线，那么$c\parallel b$或与b相交．如果c与b相交，这与已知条件c与b不相交相冲突，因此，这不可能；如果$c\parallel b$，$\because c\parallel a$，$\therefore a\parallel b$，a，b在同一个平面内．这与已知条件a，b是异面直线相矛盾．所以，$c\parallel b$也是不可能的．故c，b是异面直线．

证明直线与平面重合、相交、平行

直线与平面的位置关系有重合（即直线在平面内或平面经过直线）、相交和平行三种情况．利用反证法证明其中某种情况时，应先否定这种情况，否定后其反面一定是另外两种情况然后必须把这两种情况一一加以否定，从而证明原命题成立．

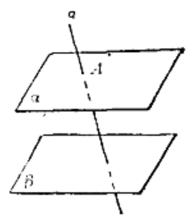
例3 一条直线如果与两个平行平面中的一个相交，那么必定和另一个也相交．

已知 $\alpha\parallel\beta$、$a\cap\alpha=A$．

求证 α和β相交．

分析 欲证a和β相交，只要能设法证明$a\nparallel\beta$和$a\not\subset\beta$即可，仍用反证法证明．

证明 假设a和β不相交，则$a\subset\beta$或$a\parallel\beta$．①如果$a\subset\beta$，$\because a\cap\alpha=A$，$\therefore A\in c$，β，α与β相交于过A的一条直线．这与已知$\alpha\parallel\beta$相矛盾．$\therefore a\subset\beta$是不可能的；②如果$a\parallel\beta$，



$\because\alpha\parallel\beta$，$\therefore a\parallel\alpha$或$a\subset\alpha$．这都与已知$a\cap\alpha=A$相矛盾，$\therefore a\parallel\beta$也不可能．$\therefore a$与$\beta$相交．

关于证明直线与平面重合、平行其方法类似．应注意用反证法常证明一些结论部分"只含有""必定"等语句的命题．

证明平面与平面平行、相交

例4 如果a，b是异面直线，那么过a且平行于b的平面必平行于过b且平行于a的平面．

已知 a，b是异面直线，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$b\parallel\alpha$．

求证 $\alpha\parallel\beta$．

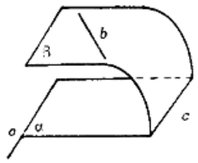
证明 假设$\alpha\cap\beta=c$．

$\because a\subset\alpha$，$a\parallel\beta$，$\therefore a\parallel c$．同理，$b\parallel c$．

于是$a\parallel b$．而这与已知a，b是异面直线相矛盾．$\therefore\alpha$和β相交是不可能的．因此，$\alpha\parallel\beta$．

证明此问题，否定平行则反面是相交；否定相交则反面是平行．因为我们所研究的平面与平面的位置关系是不重合的情况，而不重合的两个平面的

位置关系只有平行和相交两种情况．



从以上四例，我们不难归纳出用反证法证题的步骤：①否定结论，也就是假定结论的反面成立；②推出矛盾，就是依假设出发，经过一系列正确的推理得出明显的矛盾结果；③否定假设，从而肯定原结论成立．

在否定结论的反面时，因结论的反面有的是一种情况（如例１，例４）亦有的是多种情况，（如例２，例３）对于后者就得逐一加以否定，才能证明结论是正确的．

最后请同学们试证：

1．如果一条直线与一个平面平行，那么经过这条直线且平行于这个平面的平面只有一个．

2．如果一个平面和两个平行平面中的一个相交，那么也必定和另一个相交．

圆锥曲线的定义

齐家祥

圆锥曲线的分述定义是：平面内到两个定点F_1、F_2的距离的和等于常数的点的轨迹叫做椭圆，这两个定点叫做椭圆的焦点，焦点间的距离$|F_1F_2|=2c$叫做焦距，这个常数（$2a$）是椭圆的长轴长．（$a>c$）

平面内到两个定点F_1，F_2的距离差的绝对值是常数的点的轨迹叫做双曲线，这两个定点叫做双曲线的焦点，焦点间的距离$|F_1F_2|=2c$叫做焦距，这个常数（$2a$）是双曲线的实轴长．（$a<c$）

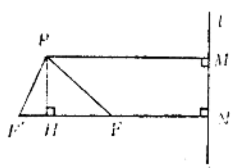
平面内到一个定点F和一条直线l的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，点F叫做抛物线的焦点，直线l叫做抛物线的准线．

它们的统一定义是平面内到一个定点F和一条直线l的距离的比是一常数的点的轨迹是圆锥曲线．这个常数e是圆锥曲线的离心率．

当$e<1$时是椭圆；当$e=1$是抛物线；当$e>1$时是双曲线．

我们可以证明这两种定义是等价的，抛物线的等价性是明显的，现在证明对椭圆这两种定义的等价性．

先证明椭圆定义也符合统一定义．



椭圆上任一点P与两个焦点F，F'距离的和为常数$2a$，

$|FF'|=2c$

即$|FP|+|F'P|=2a$

在$F'F$延长线上取一点N，使$|FN|=\dfrac{a^2-c^2}{c}$，过N作直线l，使$l\perp F'F$．

$$\because\ |FF'|=2c,\ |FN|=\frac{a^2-c^2}{c},$$

$$\therefore\ |F'N|=\frac{a^2+c^2}{c}.$$

作$PM\perp l$于M．$PH\perp F'F$于H．
在两个直角$\triangle PF'H$和$\triangle PFH$中

$$|PF'|^2-|F'H|^2=|PF|^2-|FH|^2=|PH|^2,$$

$$\therefore\ (2a-|PF|)^2-\left(\frac{a^2+c^2}{c}-|PM|\right)^2=|PF|^2-\left(|PM|-\frac{a^2-c^2}{c}\right)^2,$$

$$(2a-|PF|)^2-|PF|^2=\left(|PM|-\frac{a^2+c^2}{c}\right)^2-\left(|PM|-\frac{a^2-c^2}{c}\right)^2,$$

$$2a(2a-2|PF|)=-2c\left(2|PM|-\frac{2a^2}{c}\right),$$

$$\therefore\ 可得\ |PF|:|PM|=\frac{c}{a}.$$

再证明当$e<1$的圆锥曲线的统一定义也符合椭圆定义．

曲线上任一点P到焦点F的距离$|PF|$和到准线l的距离$|PM|$之比是e（$e<1$），$|PN|$是焦点

到准线的距离，是常数p。

延长NF至F'，使$|FF'|=\frac{2e^2p}{1-e^2}$，

∴ $|F'N|=\frac{1+e^2}{1-e^2}p$。

∵ P是曲线上任一点，

∴ $|PM|=\frac{|PF|}{e}$。

在两个直角$\triangle PF'H$及$\triangle PFH$中，

$$|PF'|^2-|F'H|^2=|PF|^2-|FH|^2$$
$$=|PH|^2$$

∴ $$|PF'|^2-\left(\frac{1+e^2}{1-e^2}p-\frac{|PF|}{e}\right)^2$$
$$=|PF|^2-\left(\frac{|PF|}{e}-p\right)^2,$$

∴ $|PF'|+|PF|=\frac{2ep}{1-e^2}$ 是常数。

由以上证明得知椭圆的这两种定义是等价的。

对双曲线我们同样能证明这两个方式的定义是等价的。

当我们要证明圆锥曲线的某些性质时，利用它们的定义有时比用曲线的方程更为简便。

例1 过焦点F的直线与圆锥曲线交于A，B二点，求证$\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}$是一常数。

证明 据圆锥曲线的统一定义，曲线上任一点到焦点F和准线l的距离的比是常数e，F到l的距离$|FN|=p$。

如图过A，B，F作准线l的垂线AA'，BB'及FN，

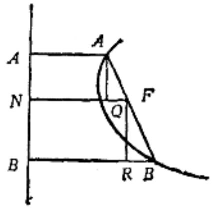
由定义可知

$$\frac{|AF|}{|AA'|}=\frac{|BF|}{|BB'|}=e$$

∴ $|AA'|=\frac{|AF|}{e}$，

$|BB'|=\frac{|BF|}{e}$。

过A作$AQ\perp FN$于Q，过F作$FR\perp BB'$于R。



∵ $\triangle AQF\sim\triangle FRB$，

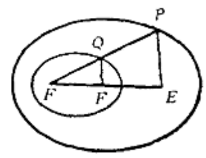
∴ $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|QF|}{|RB|}$，

$|AF|\cdot|RB|$
$=|QF|\cdot|BF|$，

∴ $|AF|\left(\frac{|BF|}{e}-p\right)$
$=|BF|\left(p-\frac{|AF|}{e}\right)$，

∴ $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{ep}$。

例2 椭圆焦点F与椭圆上任一点Q连线，并延长FQ至P使$|QP|=|FQ|$，试证P的轨迹是以另一焦点F'为中心的椭圆。



证 ∵ $|FQ|=|QP|$

延长FF'至E，使$|FF'|=|F'E|$，连QF'，PE，

∴ $PE\mathbin{/\mkern-5mu/}QF'$， 且$|PE|=2|QF'|$

∵ $|FP|+|PE|$
$=2(|FQ|+|QF'|)$，

又 $|FQ|+|QF'|=2a$，

∴ $|FP|+|PE|=4a$，且F'是FE的中点。

由此可知P的轨迹是以F'为中心的椭圆。

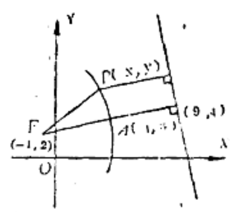
在求曲线方程的时候常常需要平移，旋转，作起来比较麻烦，这时可直接用曲线的定义。

例3 求顶点在（4，3），焦点在（−1，2）的抛物线的方程。

解 先求抛物线的准线方程。

∵ 抛物线的对称轴过（4，3），（−1，2），

∴ 对称轴的斜率是$\frac{1}{5}$。



∵ 对称轴与准线垂直，

∴ 准线的斜率是-5。

由于对称轴与准线的交点和焦点的中点是顶点。

∴ 这交点是（9，4）。

根据点斜式求得准线方程为$5x+y-49=0$，

由抛物线的定义，曲线上任一点$P(x,y)$到焦点$F(-1,2)$和准线l的距离相等，得

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$
$$=\left|\frac{5x+y-49}{\sqrt{26}}\right|.$$

整理可得抛物线的方程

$x^2-10xy+25y^2+542x-6y-2271=0$。

如果所求的曲线符合圆锥曲线的定义，那么，

按所给的条件可直接写出曲线方程.

例4 求和 $x^2+y^2+4x=0$ 相切，且过(2，0)点的圆的圆心的轨迹.

解 已知圆 $x^2+y^2+4x=0$ 的圆心O'(−2，0)，半径是2.

对任意一圆，圆心$P(x,y)$是轨迹上的一点，和定点(2，0)的距离是动圆半径r，和已知圆的圆心(−2，0)的距离等于$r\pm2$.（相外切是"+"相内切是"−"）

∴ P和(2，0)，(−2，0)两点距离的差的绝对值是常数2，

所求的轨迹是以(2，0)，(−2，0)为焦点，实轴长$2a=2$的双曲线.

中心是原点，半焦距$c=2$，半实轴长$a=1$可求半虚轴长$b=\sqrt{3}$，

∴ 双曲线的方程是

$$\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$$

即 $3x^2-y^2=3$.

例5 求过$A(0,6)$，$B(6,-2)$二点，且与直线$x+2=0$相切的圆的方程.

解 所求圆的圆心我们把它看成是两个轨迹的交点.

其一与A，B距离相等，那么圆心在AB的垂直平分线上.

∵ AB的中点是(3，2)，斜率是$-\frac{4}{3}$，

∴ AB的垂直平分线过(3，2)点，斜率等于$\frac{3}{4}$.

∴ 垂直平分线的方程为$3x-4y=1$.

另一轨迹圆心和直线$x+2=0$，及$A(0,6)$的距离相等，轨迹是抛物线，它的准线是$x+2=0$，焦点是$A(0,6)$，

∴ 顶点是(−1，6)，焦点到准线的距离是$p=2$，

∴抛物线的方程是$(y-6)^2=4(x+1)$.

解方程组

$$\begin{cases}(y-6)^2=4(x+1),\\ 3x-4y=1.\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=\frac{187}{9},\\ y=\frac{46}{3}.\end{cases}$$

∴ 圆心的坐标是(3，2)或$(\frac{187}{9},\frac{46}{3})$

半径是5或$\sqrt{205}/9$.

∴ 圆的方程是

$$(x-3)^2+(y-2)^2=25,$$

或者是

$$(x-\frac{187}{9})^2+(y-\frac{46}{3})^2=42025/81.$$

在求圆锥曲线的一些参数时，直接使用定义也是很方便的.

例6 双曲线上一点A和这双曲的两个焦点的距离分别是$|FA|=16$，$|F'A|=10$，$\angle FAF'=60°$.求双曲线的离心率，焦点和相应准线的距离.

解 ∵A是双曲线上的一点，$|FA|=16$，$|F'A|=10$.

∴实轴长$2a=|FA|-|F'A|=6$.

在$\triangle AFF'$中$\angle A=60°$，$|FA|=16$，$|F'A|=10$.可用余弦定理求$|FF'|=2c$，

$$(2c)^2=16^2+10^2-2\cdot16\cdot10\cdot\cos60° =196.$$

∴ $2c=14$，

离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{7}{3}$.

∵ 中心到准线的距离是$\frac{a^2}{c}=\frac{9}{7}$，半焦距$c=7$，

∴ 焦点和相应准线的距离是

$$c-\frac{a^2}{c}=7-\frac{9}{7}=\frac{40}{7}.$$

解析几何中的轨迹问题

柏 均 和

轨迹问题，是解析几何所研究的基本问题，它的重点又是求轨迹方程，本文将列举探求轨迹方程的一些基本方法及有关规律.

一 翻译法：物理学家牛顿曾说：所谓列方程，即为将普通语言翻译为数学语言.

在设曲线上动点P的坐标为（x，y）后，根据题目的已知条件，将普通语言变换成表达流动坐标x与y的函数关系式的数学语言，从而得到方程$F(x,y)=0$或$y=f(x)$的方法称为翻译法。它是探求轨迹方程时首先考虑的方法，教材中求直线以及圆锥曲线的轨迹方程均普遍采用了这种方法，亦叫直接法。

例1 一直线这样移动，它与坐标轴围成的三角形面积为定值s，求内分于包含在坐标轴间的线段为已知比λ（$\lambda>0$）的点的轨迹.

解 设直线与坐标轴交于$A(x_1,0)$，$B(0,y_2)$动点为$P(x,y)$.

根据已知条件，动点P必须满足以下两个条件

$$\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=s, \qquad ①$$

$$\frac{BP}{PA}=\lambda. \qquad ②$$

由①式得$\frac{1}{2}|x_1\cdot y_2|=s$. ③

由②式根据线段的定比分点公式解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{(1+\lambda)x}{\lambda}, \\ y_2=(1+\lambda)y. \end{cases}$$

并代入③得

$$\frac{1}{2}\left|\frac{(1+\lambda)x}{\lambda}\cdot(1+\lambda)y\right|=s,$$

因为$\lambda>0$，所以上式可化简为

$$|xy|=\frac{2s\lambda}{(1+\lambda)^2},$$

这里如x与y同号，则

$$xy=\frac{2s\lambda}{(1+\lambda)^2};$$

如x与y异号，则

$$xy=-\frac{2s\lambda}{(1+\lambda)^2}.$$

显然该方程所代表的轨迹为双曲线.

二 转化法：当采用翻译法困难时，常将动点$P(x,y)$的坐标转化到已知条件里给定的轨迹方程中，借助这给定的等量关系，从而求得所要求的动点$P(x,y)$的轨迹方程，称为转化法. 采用转化法的轨迹题目的特点是，显存或隐存一已知的轨迹方程，该方程流动坐标（x'，y'）与动点$P(x,y)$的对应关系能以解析式表达.

例2 $\triangle ABC$的两个顶点A，B是椭圆$\begin{cases} x=2+13\cos\theta, \\ y=5\sin\theta-1. \end{cases}$ 的两个焦点，C点在抛物线$y=x^2+1$上移动，求$\triangle ABC$的的重心轨迹方程.

解 由

$$\begin{cases} x=2+13\cos\theta, & ① \\ y=5\sin\theta-1. & ② \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{13}=\cos\theta, & ③ \\ \dfrac{y+1}{5}=\sin\theta. & ④ \end{cases}$$

将③^2+④^{2}得$\dfrac{(x-2)^2}{13^2}+\dfrac{(y+1)^2}{5^2}=1$，

∴椭圆中心为$C'(2,-1)$，$a=13$，$b=5$，$c=12$.

∴焦点坐标为$F_1(-10,-1)$，$F_2(14,-1)$.

设$M(x,y)$为$\triangle ABC$的重心，C点坐标为(a,b).

∵M内分$O'C$为$\frac{1}{2}$，

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{2+\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{2}}, \\ y=\dfrac{-1+\frac{1}{2}b}{1+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=3x-4, \\ b=3y+2. \end{cases}$$

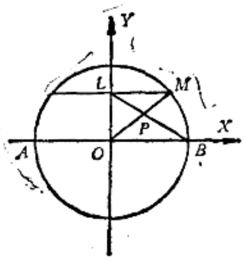
将C点坐标$((3x-4),(3y+2))$代入$y=x^2+1$，即可求得所要求的轨迹方程为

$$y=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{3}.$$

三　参数法：当运用"翻译法"，"转化法"难于奏效时，常利用题设条件，恰当选取一个中间变量（所选中间变量的条件是，能以含这中间变量的式子分别表示动点的坐标x和y），从而建立起间接把坐标x和y联系起来的一个参数方程，

$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$（$t$为参数），再消参即可得普通方程。

例3　图中LM为圆内平行于直径AB之一弦之半，求BL与OM交点P之轨迹方程。



解：设圆O半径为a，$\angle MOX=\theta$，

则$M(a\cos\theta, a\sin\theta)$，$L(0, a\sin\theta)$，$B(a,0)$。

OM所在直线方程为$y=\mathrm{tg}\theta\cdot x$。

BL所在直线方程为$y=\sin\theta(a-x)$。

由此可见BL与OM之交点P的坐标可由方程组

$$\begin{cases}y=x\cdot\mathrm{tg}\theta, & ①\\ y=(a-x)\sin\theta. & ②\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{a\cos\theta}{1+\cos\theta}, & ③\\ y=\dfrac{a\sin\theta}{1+\cos\theta}. & ④\end{cases}$$

由③可得$x+x\cos\theta=a\cos\theta$，

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{x}{a-x}.$$

将④平方得$y^2=\dfrac{a^2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$，　⑤

$$\because\ 1+\cos\theta=1+\frac{x}{a-x}=\frac{a}{a-x},$$

$$\therefore\ (1+\cos\theta)^2=\frac{a^2}{(a-x)^2}.$$

由 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{x^2}{(a-x)^2}$

$$=\frac{a^2-2ax}{(a-x)^2},$$

将它们分别代入⑤化简后可得

$$y^2=a^2-2ax.\qquad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right)$$

$\therefore$点P之轨迹为圆内抛物线之段弧。

例4　ABP为一刚性等边三角形，A点在y轴上移动，B点在x轴上移动，试求顶点P的轨迹。

解　设$P(x,y)$是边长为a的等边三角形顶点的一个位置。

过P作$PM\perp OX$，取$\angle ABO=\theta$为参数，

则$OB=a\cdot\cos\theta$，

$$\angle PBM=180^\circ-60^\circ-\theta=120^\circ-\theta,$$

$$\therefore BM=a\cdot\cos\angle PBM=a\cdot\cos(120^\circ-\theta),$$

$$MP=a\cdot\sin\angle PBM=a\cdot\sin(120^\circ-\theta),$$

$$\therefore\begin{cases}x=OM=OB+BM\\ \quad=a\cos\theta+a\cos(120^\circ-\theta),\\ y=MP=a\cdot\sin(120^\circ-\theta).\end{cases}$$

即为顶点P的轨迹的参数方程。

上述两例，反映了两种建立参数方程的基本方法，一是通过解方程组建立参数方程，另一是通过直接分析主变量与参变量的数量关系而建立参数方程。

在建立参数方程后，常常需要将其变为普通方程，这样方程所对应的轨迹特征才能表面化，这里顺便介绍一下消参的两种基本方法。

1．三角法：

接上例，

由 $x=a[\cos\theta+\cos(120^\circ-\theta)]$

$$=a\cdot2\cos\frac{120^\circ-\theta+\theta}{2}\cdot\cos\frac{120^\circ-\theta-\theta}{2}$$

$$=2a\cdot\cos60^\circ\cdot\cos(60^\circ-\theta)$$

$$=2a\cdot\frac{1}{2}(\cos60^\circ\cdot\cos\theta+\sin60^\circ\cdot\sin\theta)$$

$$=a\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right),\qquad ①$$

由$y=a\sin(120^\circ-\theta)$

$$=a(\sin120^\circ\cdot\cos\theta-\cos120^\circ\cdot\sin\theta)$$

$$=a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right).\qquad ②$$

将$\sqrt{3}$①－②得$\sqrt{3}x-y=a\sin\theta$，　③

$\sqrt{3}\cdot$②－①得$\sqrt{3}y-x=a\cos\theta$，　④

将③²＋④²得

$$(\sqrt{3}x-y)^2+(\sqrt{3}y-x)^2=a^2$$

$$4x^2-4\sqrt{3}xy+4y^2=a^2$$

$$x^2-\sqrt{3}xy+y^2=\frac{a^2}{4},$$

$\because A=1$，$B=-\sqrt{3}$，$C=1$，
$B^2-4AC=-1<0$，

$\therefore$其轨迹为椭圆.

在三角法中特别要注意利用三角函数与1的特殊关系，除上例外，再举例：

例5 若θ为参数，将$\begin{cases}x=t\cdot\mathrm{tg}\theta-t^2\mathrm{ctg}\theta, & ①\\ y=t\cdot\mathrm{ctg}\theta+t^2\mathrm{tg}\theta. & ②\end{cases}$

化为普通方程.

解 将①+②·t得 $x+ty=(t+t^3)\mathrm{tg}\theta$，
将①×$(-t)$+②得
$-tx+y$
$=(t+t^3)\mathrm{ctg}\theta$，

即 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{x+tg}{t+t^3}$，$\mathrm{ctg}\theta=\dfrac{-tx+y}{t+t^3}$.

由$\mathrm{tg}\theta\cdot\mathrm{ctg}\theta=1$，
$\therefore\ (x+ty)(-tx+y)=(t+t^3)^2$.

2．代入法：

例6 若t为参数，将

$\begin{cases}x=t^2+t, & ①\\ y=t^2-t. & ②\end{cases}$ 化为普通方程.

解 将①－②得$x-y=2t$，

$\therefore t=\dfrac{x-y}{2}$并代入①得

$$x=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$\therefore 2(x+y)=(x-y)^2$.

此外还有借助于公式的代入法.

例7 若α为参数，将

$\begin{cases}x=\sin\alpha+\sin2\alpha,\\ y=\cos\alpha+2\cos^2\alpha.\end{cases}$ 化为普通方程.

解 由$\dfrac{x}{y}=\mathrm{tg}\alpha$，

$$\therefore\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sin2\alpha=\frac{2\cdot\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}},$$

$$\therefore x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

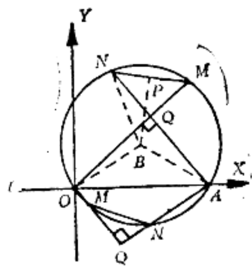
$\therefore x=0$，及$(x^2+y^2)=\sqrt{x^2+y^2}+2y$，
即为$(x^2+y^2-2y)^2=x^2+y^2$.

四 几何法：运用平面几何知识分析轨迹形成的条件，将隐伏着的等量关系表面化，然后直接求出该曲线方程的方法称为几何法.

例8 已知圆B的方程为

$$x^2+y^2-10\sqrt{3}x-10y=0,$$

它与x轴交于O，A两点，动点Q与这两点的连线$OQ\perp AQ$，OQ，AQ与圆的另一公共点为M，N，求线段MN的中点轨迹.



解 这里用“翻译法”、“转化法”、“参数法”均可，但仔细分析就会发现：

圆B的方程为

$$(x-5\sqrt{3})^2+(y-5)^2=100,$$

圆心为$(5\sqrt{3},5)$，半径为10，

$\angle OBA=120°$，$\overset{\frown}{OA}=120°$，

Q点的轨迹为以OA为直径的圆（不含O，A），

如Q在OA上侧时，则Q在圆B内，

$\angle OQA=90°$，$\dfrac{\overset{\frown}{OA}+\overset{\frown}{MN}}{2}$的度数$=90°$，

$\therefore\overset{\frown}{MN}$为$60°$；

如Q在OA下侧时，则Q在圆B外，此时亦有$\overset{\frown}{MN}$为$60°$，

因此P点到B点的距离为：

$BP=BN\cdot\cos30°$，

$BN=R=10$，

$\therefore BP=5\sqrt{3}$，

由此可以看出P点的轨迹是以B为圆心，$r=5\sqrt{3}$为半径的圆.

其方程为

$$(x-5\sqrt{3})^2+(y-5)^2=75,$$

即 $x^2+y^2-10\sqrt{3}x-10y+25=0$.

五 极坐标法：有些轨迹问题，用直角坐标系方法不容易求得其方程，但建立适当的极坐标系

（下转5页）

物理

判断和描述物体作简谐振动的几点体会

刘 惠 国

一个物体在任何相等的时间间隔内重复进行的运动都称为周期运动。象人造地球卫星的运动，匀速圆周运动，单摆和扭摆的振动等，就是一些周期运动的例子。如果把一个物体在某个位置的两侧的一定范围内作往复运动叫做振动，那么它显然与匀速圆周运动是不同的。所以，振动必定是周期运动，但周期运动不一定就是振动。那么，如何判断一个往复运动是否为简谐振动呢？若能够确定是简谐振动，又如何来描述它呢？

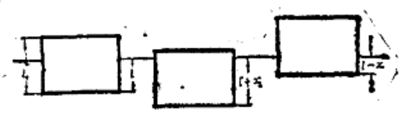
一、弹性回复力和回复力

弹簧振子的回复力F跟位移x成正比而方向相反，它们之间的关系可用下式表示：

$$F=-kx \qquad ①$$

式中k是比例常数，对弹簧振子来说，就等于弹簧的倔强系数。式中的负号表示回复力跟位移方向相反。但回复力不一定是弹性力，所以从广义说①式中的F系指振子所受到各力的合力，因此①式中的k就不一定是弹簧的倔强系数了，那么，把k叫做“回复系数”就比较恰当。从①式还可知道当物体位于平衡位置时（即$x=0$）则回复力为零，（$F=0$）；或者是当物体在某处受到各力的合力为零时（即$F=0$）则此处必为平衡位置（$x=0$）。这是在确定简谐振动的平衡位置时应该注意到的一个特点。

判断一个物体的运动是否为简谐振动，就要分析物体在运动过程中所受到的力是否遵从①式。例如一个横截面为s、长为l_0的木块浮在水面，如图1（a）所示，当把木块用手按下一段距离x后，撒开手如图1（b），在不考虑水对木块的摩擦阻力时木块将怎样运动？



(a)　(b)　(c)

图1

首先要对木块进行受力分析；设木和水的密度分别为$d_木$和$d_水$则木块受到重力$G=d_木\cdot l_0\cdot s\cdot g$和水对它的浮力$F_浮=d_水\cdot l\cdot s\cdot g$的作用，当物体静止时这两个力的合力为零，即有：$d_木\cdot l_0\cdot s\cdot g=d_水\cdot l\cdot s\cdot g$　　②

图1（a）所示的位置就是物体的平衡位置。当木块从被按下的位置运动至图1（b）所示的位置时，木块浸没于水中的部份的体积由$l\cdot s$变为（$l+x$）$\cdot$ s，此时浮力必将大于重力，因此木块受到的合力为：

$$F=d_木\cdot l_0\cdot sg-d_水\cdot(l+x)\cdot sg \qquad ③$$

将②式代入③式，得：

$$F=-d_水\cdot sgx \qquad ④$$

由于$d_水$，s，g均为定量，故可令$k=d_水\cdot s\cdot g$

则　$$F=-kx \qquad ⑤$$

⑤式中x为木块离开平衡位置的位移，方向是竖直向下的，而F的方向是竖直向上的，即指向平衡位置，在量值上且与x成正比，所以我们可以得到木块将绕平衡位置作简谐振动的结论（读者可以自行证明木块运动至图1（c）所示的位置时，它受到的合力仍然遵从①式）。

从上述的分析可知，要判定一个物体是否做简谐振动，大体上要按以下四个步骤去做：

1．分析物体受到的各力，并写出表示式；

2．确定各力的合力为零时（即各力平衡时）物体的位置——平衡位置；

3．设想物体离开平衡位置的位移为x时，求物体受到的合力F，并分析F和x的方向是否永远相反；

4．在合力的表达式中除去x外，其余各量是否均为定量，如若是定量则可将合力写成弹性恢复力的形式，并由此判定物体将做简谐振动，若各量中有变量，则物体不能做简谐振动。

二、简谐振动位移方程中各物理量间的关系

简谐振动的位移方程可以表示为：

$$x=A\cdot\cos(\omega t+\phi) \qquad ⑥$$

⑥式表明位移是时间t的余弦函数。

振幅A从⑥式可以看出，它是振子的最大位移，$\because \cos(\omega t+\phi)$的最大值为1，$\therefore A=x_{max}$，振幅$A$与振子的频率无关，它取决于供给振动系统的总能量。

ϕ也是与频率无关的一个物理量，它可以用来间接表征振子在开始计时时刻的位置。因此，它是一个表征简谐振动初始状态的一个物理量。当一个物体被判定是作简谐振动以后，要写出振子在某个时刻t的位移方程，就必须先确定出A、ω和ϕ。

如果振动系统的总机械能E为已知，则根据 $E=\frac{1}{2}kA^2$就可以确定A。

如果振子的质量m与振动系统的回复系数k已知，则根据

$\omega^2=k/m$， 就可以确定ω.

ϕ值的确定是比较困难的，它取决于振子的初始位置与初始速度。

例如图2所示的弹簧振子，是由质量为M的沙箱系于一水平放置的回复系数为k的弹簧上，而沙箱则位于一光滑的水平面上，

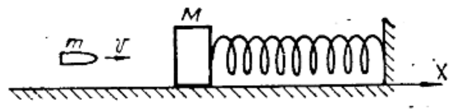


图 2

如有一质量为m，速度为v的子弹水平地射入沙箱并停留于其中，试写出它的位移方程。

由$F=-kx$可以判断沙箱将作简谐振动。所以它的位移方程可写成

$$x=A\cdot\cos(\omega t+\phi),$$

其振幅A可由下式确定：对子弹和沙箱说，

$$\because \Sigma F_x=0.$$

$$\therefore mv=(m+M)u,$$

$$\therefore u=\frac{m}{m+M}v,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(m+M)u^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{m+M}v^2,$$

$$\because \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{m+u}v^2,$$

$$\therefore A=\sqrt{\frac{1}{k(m+u)}}\cdot mv,$$

$$而\omega=\sqrt{k/(m+M)}.$$

那么如何确定ϕ呢？要依据振子的初始条件来确定。

因为沙箱是从平衡位置时开始以速度u向右运动的，所以它在$t=0$时刻的位移$x=0$，那么由$x=A\cos(\omega t+\phi)$知$A\cos\phi=0$，

由于$A\neq 0$，因而 $\cos\phi=0$．因此，

$\phi=\pm\frac{\pi}{2}$，因为初速度u的方向向右，所以在参考圆上作匀速圆周运动的质点必自$-\frac{\pi}{2}$位置开始以角速度ω逆时针方向旋转。

所以$\phi=-\frac{\pi}{2}$，

$$\because x=A\cdot\cos(\omega t+\phi),$$

$$\therefore x=\sqrt{\frac{1}{k(m+u)}}\cdot mv \cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m+u}}\cdot t-\frac{\pi}{2}\right).$$