TONGBU DAOXUE 新课程

同步导学

必修4

高中数学

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

目 录

第 1 章　三 角 函 数

1.1.1　任　意　角

【新知导读】

1. 下列命题中正确的是　　　　　　　　　　　　(　　)

A. 终边相同的角相等

B. 相等的角终边相同

C. 第二象限角比第一象限角大

D. 若 $0° < \alpha < 180°$，则 α 为第一象限角或第二象限角

2. 已知 α 是锐角，那么 2α 是　　　　　　　　　　　　(　　)

A. 第一象限角　　　　　　B. 第二象限角

C. 小于 180°的角　　　　　D. 不大于直角的角

3. 根据图形填空：

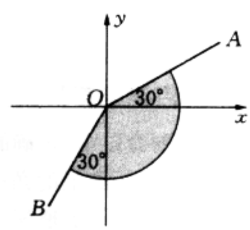
(1) 以 OA 为终边的角的集合：________________；

(2) 以 OB 为终边的角的集合：________________；

(3) 终边落在阴影部分(包含边界)的角的集合：________；

(4) 终边落在阴影部分(不包含边界)，且在 0°到 360°的角的集合：________________；

(5) 终边落在阴影部分(不包含边界)，且在 −360°到 0°的角的集合：________________.



(第 3 题)

【范例点睛】

例 1　根据角 α 的终边所在位置，写出角 α 的集合：

(1) 在第二象限：________________；

(2) 在 y 轴的非负半轴上：________________；

(3) 在 y 轴上：________________；

(4) 在第二象限的角平分线上：________________；

(5) 在一、三象限的角平分线上：________________；

(6) 在坐标轴上：________________.

思路点拨：准确地写出符合条件的各种角的集合表示是本节基本要求.

例 2　若 $-360° < \alpha < 360°$，且 α 与 $-40°$ 角终边相同，求 α.

思路点拨：本题的关键在于对终边相同的角的概念的理解与把握.

例 3　若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则角 α 与角 β 的关系为________________；类似地，若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，则角 α 与角 β 的关系为________________；若角 α 与角 β 的终边互为反向延长线，则角 α 与角 β 的关系为________________.

思路点拨：掌握角的终边之间关系得到角度之间关系是解决问题的关键.

【课外链接】

1. 分别将角 $300°$, $540°$, $-675°$, $-750°$化为 $k\cdot360°+n°$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的形式,且使 $|n|$ 最小.

2. 若 $-360°<\alpha<360°$,且 α 与 $-70°$ 角终边相同,求 α.

【自我检测】

1. 下列命题中,正确的是 ( )

A. 第一象限的角一定不是负角　　B. 小于 $90°$的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限的角　　D. 第一象限的角一定是锐角

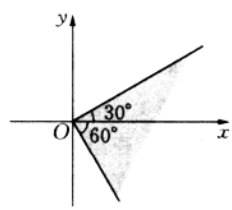
2. 如图,终边落在阴影处(包括边界)的角的集合是 ( )

A. $\{\alpha\,|-60°\leqslant\alpha\leqslant30°\}$

B. $\{\alpha\,|-60°+k\cdot180°\leqslant\alpha\leqslant30°+k\cdot180°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha\,|\,30°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant-60°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha\,|-60°+k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant30°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$



(第 2 题)

3. 若角的终边在一、四象限及 x 轴非负半轴,则角 α 的集合为( )

A. $\{\alpha\,|\,270°+k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha\,|-90°+k\cdot360°<\alpha<-270°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha\,|-90°+k\cdot360°<\alpha<90°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha\,|-90°+k\cdot720°<\alpha<90°+k\cdot720°,\ k\in\mathbf{Z}\}$

4. 在直角坐标系中,若角 α 与角 β 的终边互为反向延长线,则角 α 与角 β 的关系是 ( )

A. $\alpha=-\beta$　　B. $\alpha=\beta-k\cdot360°$ $(k\in\mathbf{Z})$

C. $\alpha=180°+\beta$　　D. $\alpha=180°+\beta+k\cdot360°$ $(k\in\mathbf{Z})$

5. 设 $A=\{\alpha\,|\,\alpha=45°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{\alpha\,|\,\alpha=225°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{\alpha\,|\,\alpha=45°+k\cdot180°,\ k\in\mathbf{Z}\}$, $D=\{\alpha\,|\,\alpha=-135°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$, $E=\{\alpha\,|\,\alpha=45°+k\cdot360°$ 或 $\alpha=225°+k\cdot360°,\ k\in\mathbf{Z}\}$,则相等的集合为____________.

6. 若 α 是第三象限的角,则 $180°-\alpha$ 是第________象限的角.

7. 若角 α 的终边在第一象限的角平分线上,则在$[-720°, 720°]$间的角为________.

8. 若角 β 的终边所在的直线经过点 $Q(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,且 $\beta \in (-360°, 360°)$,试求角 β 的值.

9. 写出与角 $60°$, $-21°$, $363°14'$ 终边相同的角的集合 S,并把 S 中在$[-360°, 720°]$间的角写出来.

10. 若 α 为第一象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 为第几象限角?

1.1.2 弧 度

【新知导读】

1. 若集合 $A=\left\{x \middle| x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$,集合 $B=\left\{x \middle| x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\right\}$,则集合 A 与 B 的关系为 ( )

A. $A \subsetneqq B$　　B. $A \supsetneqq B$

C. $A=B$　　D. 不确定

2. 将下列各角化成弧度:

(1) $18°=$________;　(2) $-120°=$________;

(3) $735°=$________;　(4) $1\,080°=$________.

3. 将下列各角化成度:

(1) $-\frac{7}{6}\pi=$________;　(2) $-\frac{8}{3}\pi=$________;

(3) $1.4=$________;　(4) $\frac{2}{3}=$________.

【范例点睛】

例 1 用弧度制表示下列角的集合：

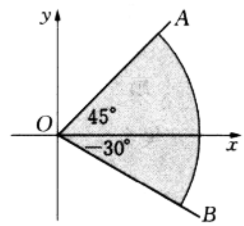
(1) 终边落在 y 轴非正半轴上的角的集合；

(2) 终边落在坐标轴上的角的集合；

(3) 终边落在第一象限的角平分线上角的集合；

(4) 终边落在四个象限的角平分线上角的集合；

(5) 终边落在右图阴影部分(包含边界)的角的集合.



(例 1)

思路点拨：熟练地掌握用弧度制表示特殊角的集合是解题关键.

例 2 指出下列各角所在的象限：

(1) $\frac{19\pi}{6}$； (2) $-\frac{7\pi}{3}$； (3) $-\frac{27\pi}{4}$.

思路点拨：关键在于将各个角表示成 $2k\pi+\alpha\ (0\leqslant\alpha<2\pi,\ k\in\mathbf{Z})$ 的形式.

例 3 已知 $4\pi<\alpha<6\pi$，且 α 的终边与 $-\frac{2\pi}{3}$ 的终边垂直，求 α 的值.

思路点拨：利用弧度制，根据角的终边，写出角的集合.

【课外链接】

1. 已知 $A=\{x\mid 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 4\}$，求 $A\cap B$.

2. 已知集合 $P=\left\{x\middle| x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{5},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$M=\{x\mid -\pi<x<\pi\}$，求 $P\cap M$.

【自我检测】

1. 若 $-6\pi<\alpha<-4\pi$，且 α 的终边与 $\frac{5\pi}{6}$ 的终边相同，则 α 的值为 ( )

A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $-\frac{7\pi}{6}$

C. $-\frac{25\pi}{6}$ D. $-\frac{31\pi}{6}$

2. 若 α 为第四象限的角，则角 $\pi-\alpha$ 所在的象限是 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 若圆的半径变为原来的 2 倍，而弧长也增加到原来的 2 倍，则下列结论中正确的是 ( )

A. 扇形的面积不变　　B. 扇形的圆心角不变

C. 扇形的面积增大为原来的 2 倍　　D. 扇形的圆心角增大为原来的 2 倍

4. 若集合 $P=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，$M=\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，则有 ( )

A. $P=M$　　B. $P\supsetneqq M$

C. $P\subsetneqq M$　　D. $P\cap M=\varnothing$

5. 在 $(-4\pi,\ 4\pi)$ 内与 $-\frac{58}{7}\pi$ 终边相同的角为________.

6. 与 $-\frac{8}{3}\pi$ 终边相同的角是________，它们是第________象限的角，其中最小正角为________，最大负角为________.

7. 把下列各角化成 0 到 2π 的角加上 $2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ 的形式：

(1) $-\frac{25}{6}\pi=$________；　　(2) $-5\pi=$________；

(3) $-45^\circ=$________；　　(4) $400^\circ=$________.

8. 直径为 20 cm 的轮子以 45 rad/s 的速度旋转，求轮周上一点经过 5 s 所转过的弧长.

9. 要在半径 $OA=100$ cm 的圆形金属板上截取一块扇形板，使 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 112 cm，求圆心角 $\angle AOB$ 是多少度(精确到 1°).

10. 1 弧度的圆心角所对的弦长为 2，求这个圆心角所对的弧长 l 和扇形的面积 S.

11. 已知扇形的面积为 S,当扇形的圆心角为多少弧度时,扇形的周长最小?此时最小值为多少?

1.2.1 任意角的三角函数

【新知导读】

1. 已知 θ 是第三象限的角, 且 $\cos\frac{\theta}{2}<0$,那么$\frac{\theta}{2}$ 所在的象限为 ( )

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 下列命题中,正确的是 ( )

A. 若 $\cos\theta<0$,则 θ 是第二或第三象限的角

B. 若 $\alpha<\beta$,则 $\cos\alpha<\cos\beta$

C. 若 $\sin\alpha=\sin\beta$,则 α 与 β 的终边相同

D. 若 α 是第三象限的角,则 $\sin\alpha\cos\alpha>0$, $\cos\alpha\tan\alpha<0$

3. 使 $\sin x\leqslant\cos x$ 成立的 x 的一个变化区间是 ( )

A. $\left[-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$　　C. $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $[0,\ \pi]$

【范例点睛】

例 1 已知角 α 终边上有一个点 $P(4t,\ -3t)(t\neq0)$,求 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值.

思路点拨:根据任意角的三角函数的定义,由终边上的异于端点的点 $P(x,\ y)$定义角的正弦、余弦、正切.

例 2 已知角 β 的终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上,试用三角函数的定义求 $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\tan\beta$.

思路点拨:回归定义,利用定义判断求值.

例 3 利用三角函数线解下列各题:

(1) 若$\frac{\pi}{6}\leqslant\theta<\frac{2\pi}{3}$,试确定 $\sin\theta$ 的范围;

(2) 若 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$,试确定 $\cos\theta$ 的范围;

(3) 若 $-30^\circ\leqslant\theta\leqslant60^\circ$,试确定 $\tan\theta$ 的范围.

思路点拨:掌握三角函数线的定义,并能利用它们解题.

【课外链接】

1. 若 θ 为第一象限的角,则能确定为正值的是 ( )

A. $\sin\frac{\theta}{2}$　　B. $\cos\frac{\theta}{2}$　　C. $\tan\frac{\theta}{2}$　　D. $\cos2\theta$

2. 若$\left(\frac{3}{4}\right)^{\sin 2\alpha}>1$，则$\alpha$在 ( )

A. 第一、三象限 B. 第二、四象限 C. 第三、四象限 D. 第一、二象限

【自我检测】

1. 与角$\frac{2\pi}{3}$终边相同的角是 ( )

A. $\frac{11\pi}{3}$

B. $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\ (k\in \mathbf{Z})$

C. $-\frac{10}{3}\pi$

D. $(2k+1)\pi+\frac{2\pi}{3}\ (k\in \mathbf{Z})$

2. 若角α终边上有一点$P(a, a)$，$a\in \mathbf{R}$，$a\neq 0$，则$\sin\alpha$的值为 ( )

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

3. 在$(0, 2\pi)$内，使$\sin x>\cos x$成立的x的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

4. 若点$P(\sin\alpha-\cos\alpha, \tan\alpha)$在第一象限，则在$[0, 2\pi]$内，$\alpha$的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

5. $\sin 100^\circ\cos 240^\circ$的符号为________.

6. 若$\frac{\tan(\cos\theta)}{\tan(\sin\theta)}>0$，则$\theta$是第________象限的角.

7. 设α是第二象限的角，其终边上有一点$P(m, \sqrt{5})$，且$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}m$，则$\sin\alpha$的值为________.

8. 函数$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{-\cos x}$的定义域是________________________.

9. 求下列各式的值：

(1) $\sin(-1\,380^\circ)$；

(2) $\sin(-1\,320^\circ)\cos 1\,110^\circ+\cos(-1\,020^\circ)\sin 750^\circ$；

(3) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\cos\frac{12\pi}{5}\cdot\tan 4\pi$.

10. 已知角 α 的始边在 x 轴的非负半轴上，终边在直线 $y=kx$ 上，若 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，且 $\cos\alpha<0$，求实数 k 的值.

11. 已知 $\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$.

(1) 求角 α 的集合；

(2) 求角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限；

(3) 判断 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的符号.

12. 已知 $|\cos\theta|=-\cos\theta$，且 $\tan\theta<0$.

(1) 试判断 $\frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$ 的符号；

(2) 化简 $\frac{|\sin\theta|}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}+\frac{|\tan\theta|}{\tan\theta}$.

1.2.2 同角三角函数关系

【新知导读】

1. 若 $\sin\alpha+3\cos\alpha=0$，则 α 所在的象限为 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第一、三象限　　D. 第二、四象限

2. 下列命题中，正确的命题是 (　　)

A. 若角 α 在第二象限，且 $\sin\alpha=m$，$\cos\alpha=n$，则 $\tan\alpha=-\frac{m}{n}$

B. 无论 α 为何角，都有 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

C. 一定不存在一个角 α，使得 $\sin\alpha+\cos\alpha=1$

D. 总存在一个角 α，使得 $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{1}{2}$

3. 若 $\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta}+\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta}=-1$ $\left(\theta\neq\frac{k}{2}\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)$，则 θ 所在象限是 ( )

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

【范例点睛】

例 1 已知 α 是第二象限角，且 $\tan(2\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$，求 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 的值.

思路点拨：正弦、余弦、正切间的几个三角关系式是三角化简中的常用公式.

例 2 已知 α 的终边在直线 $x+2y=0$ 上，化简 $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

思路点拨：切实掌握三角关系式，并能灵活运用.

例 3 化简：$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

思路点拨：注意各式的符号.

【课外链接】

1. 若 α 是第三象限角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是 ( )

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

2. 函数 $y=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}-\frac{\tan x}{\sqrt{\tan^2 x}}$ 的值域是 ( )

A. $\{-3,1\}$　B. $\{1,3\}$　C. $\{-3,-1,1\}$　D. $\{-1,1,3\}$

【自我检测】

1. 若 A 为三角形内角，且 $\sin A\cos A=-\frac{1}{8}$，则 $\sin A-\cos A$ 的值是 ( )

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

2. 如果 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，那么 $\sin\theta\cos\theta$ 的值等于 ( )

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{3}{10}$　C. $-\frac{3}{10}$　D. $\pm\frac{3}{10}$

3. 化简：$(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha=$ ________.

4. 若 $\sin\alpha\cos\alpha>0$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha<0$，则 $\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}=$ ________.

5. 若 θ 为锐角，则 $\log_{\cos\theta}(1+\tan^2\theta)=$ ________.

6. $\sqrt{1-2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}+\sqrt{1-\sin^2 440^\circ}=$ ________.

7. 化简：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$.

8. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$, 求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

9. 已知 $\tan\alpha=-2$, 求下列各式的值:

(1) $\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\sin\alpha+4\cos\alpha}$;

(2) $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

10. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ $\alpha\in(0,\pi)$, 求 $\sin\alpha-\cos\alpha$, $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$.

11. 已知 $\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$, $\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$, $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 求满足条件的实数 m 的值.

12. 已知 $\tan\alpha=m\ (m\neq 0)$, 求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值(用含 m 的代数式来表示).

1.2.3 三角函数的诱导公式

【新知导读】

1. 若 α,β 满足 $\alpha-\beta=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，则下列式子正确的是 ( )

A. $\sin\alpha=\sin\beta$　　B. $\cos\alpha=\cos\beta$　　C. $\tan\alpha=\tan\beta$　　D. $\cot\alpha=-\cot\beta$

2. 若 $\cos(\pi-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，则 $\sin(-2\pi-\alpha)$ 等于 ( )

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\pm\dfrac{1}{2}$

3. $\sin^2(\pi+\alpha)-\cos(\pi-\alpha)\cos(2\pi-\alpha)+1$ 的值是 ( )

A. 0　　B. 1　　C. $2\sin^2\alpha+1$　　D. 2

【范例点睛】

例1　已知 $\sin\alpha$ 是方程 $5x^2-7x-6=0$ 的根，求 $\dfrac{\sin\left(-\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan^2(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos^2(\pi-\alpha)}$ 的值.

思路点拨：要求熟练掌握几个常用的诱导公式.

例2　化简 $\dfrac{\sqrt{1+2\sin(3\pi-\alpha)\cos(\alpha-3\pi)}}{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}}$，其中 α 为第二象限角.

思路点拨：注意在角度、弧度两种形式下的诱导公式的形式及应用.

例3　若 $f(n)=\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}+\alpha\right)$，化简 $f(n)f(n+4)+f(n+2)f(n+6)$.

思路点拨：函数诱导公式在具体应用中，通过换元法来化简角度的表示形式，这样既快又省.

【课外链接】

1. 若锐角 α 的终边经过点 $P(2\sin 3,\ -2\cos 3)$，则角 α 等于 ( )

A. $\pi-3$　　B. 3　　C. $3-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}-3$

2. 若 $f(\cos x)=\cos 2x$，则 $f(\sin 15^\circ)$ 等于 ( )

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【自我检测】

1. 在函数值 ①$\sin(3\pi+\alpha)$，②$\sin(2n\pi\pm\alpha)(n\in\mathbf{Z})$，③$\sin(-\pi+\alpha)$，④$\sin(n\pi+\alpha)(n\in\mathbf{Z})$ 中，与 $-\sin\alpha$ 值相等的是 ( )

A. ①、②　　B. ②、③　　C. ③、④　　D. ①、③

2. 化简$\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi+\alpha)}{\sin(-\pi-\alpha)\cos(-\pi+\alpha)}$的结果只能是 ( )

A. 1　　B. -1　　C. $\tan^2\alpha$　　D. $\cot^2\alpha$

3. 若 $\sin(\pi-2)=a$,则 $\cos 2$ 的值为 ( )

A. $\pm\sqrt{1-a^2}$　　B. $-\sqrt{1-a^2}$　　C. $\sqrt{1-a^2}$　　D. $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

4. 若 $\tan(2\pi-\alpha)=-\dfrac{1}{3}$,则 $\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)$ 值为 ( )

A. $\dfrac{9}{10}$　　B. $\dfrac{3}{10}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

5. $\cos 225^\circ+\tan 240^\circ+\sin(-300^\circ)=$ __________.

6. 若 $\sin(\alpha+3\pi)=\lg\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}}$,则 $\tan(\pi+\alpha)=$ __________.

7. $\dfrac{\sin(k\pi-\alpha)\cos[(k-1)\pi-\alpha]}{\sin[(k+1)\pi+\alpha]\cos(k\pi+\alpha)}=$ __________ $(k\in\mathbf{Z})$.

8. 若 $\sin\alpha=\sin\dfrac{\pi}{7}$, $\alpha\in\mathbf{R}$,则 $\alpha=$ ____________________.

9. 化简:(1) $\sqrt{\sin^2 500^\circ+\sin^2 770^\circ-\cos^2(1\,620^\circ-x)}$ $(180^\circ<x<270^\circ)$;

(2) $\cos\dfrac{\pi}{8}+\cos\dfrac{2\pi}{8}+\cos\dfrac{3\pi}{8}+\cdots+\cos\dfrac{7\pi}{8}$;

(3) $\dfrac{\sin(k\pi-\alpha)\cos(k\pi+\alpha)}{\sin[(k+1)\pi+\alpha]\cos[(k-1)\pi-\alpha]}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

10. 已知 x, y 都是实数,且$(x-6)^2+(y+2)^2=0$,求 $x\cos\left(-\dfrac{25}{3}\pi\right)+y\tan\left(-\dfrac{15}{4}\pi\right)$的值.

11. 已知 $\sin(\pi+\theta)=\frac{4}{5}$,求 $\frac{\cos(\pi+\theta)}{\cos\theta[\cos(\pi-\theta)-1]}+\frac{\cos(\theta-2\pi)}{\cos\theta\cos(\pi-\theta)+\cos(\theta-2\pi)}$ 的值.

12. 已知 $\cos(\alpha+\beta)+1=0$, 求证: $\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta=0$.

1.3.1 三角函数的周期性

【新知导读】

1. 分别证明满足下列条件的函数 $f(x)$ 均为周期函数: (1) $f(x+1)=f(x+6)$; (2) $f(x+2)=-f(x)$; (3) $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$; (4) $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$; (5) $f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$; (6) $f(x+2)=f(-x)$, $f(x)$ 为奇函数(偶函数); (7) $f(1+x)=f(1-x)$, $f(x)$ 为奇函数(偶函数).

【范例点睛】

例 1 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, $f(1)=2$, $f(x+1)=f(x+6)$, 求 $f(24)$ 的值.

思路点拨:理解函数周期性的定义,并能利用它们解题.

例 2 若 $f(x+2)=f(x)$,且当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时, $f(x)=1-x^2$,求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上的解析式.

思路点拨:利用函数的周期性求函数的解析式.

例 3 设 $f(x)=\sin\left(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}\right)$,其中 $k\neq 0$, $k\in\mathbf{Z}$.

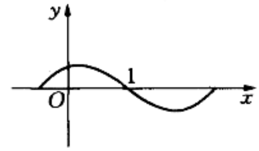
(1) 写出其最大值 M、最小值 m 和最小正周期 T;

(2) 试求最小正整数 k,使得当自变量 x 在任意两个整数间(包含整数本身)变化时,函数 $f(x)$ 至少有两个值分别是 M 和 m.

思路点拨:理解三角函数周期的意义,并能利用三角函数的周期解决具体问题.

【课外链接】

1. 如图是周期为 2π 的三角函数 $y=f(x)$ 的图象，那么 $f(x)$ 可以写成 (　　)



(第 1 题)

A. $\sin(1-x)$

B. $\sin(-x-1)$

C. $\sin(x-1)$

D. $\sin(x+1)$

2. 若 $y=|\sin\omega x|$ 的周期是 $y=\sin 4x$ 周期的 4 倍，则正数 ω 的值为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【自我检测】

1. 若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(x-3)$，则此函数是周期函数，下列属于它的一个周期的是 (　　)

A. 1　　B. 3　　C. -3　　D. 4

2. 函数 $y=3\cos\left(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 (　　)

A. $\frac{2\pi}{5}$　　B. $\frac{5\pi}{2}$　　C. 2π　　D. 5π

3. 在函数 $y=\sin|x|$, $y=|\sin x|$, $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, $y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 中，最小正周期为 π 的函数的个数有 (　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. 由函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[2n,\ 2n+1),\\ 1, & x\in[2n+1,\ 2n+2)\end{cases}$ $(n\in\mathbf{Z})$ 的图象可知，此函数的周期为 (　　)

A. $\frac{k}{2}$　　B. $\frac{3k}{2}$

C. k　　D. $2k$（以上 $k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 0$）

5. 若函数 $y=2\sin\left(kx+\frac{3\pi}{5}\right)$ 的周期为 $\frac{3\pi}{2}$，则 k 的值为________.

6. 函数 $y=\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 的周期为________.

7. 若函数 $y=3\sin\left(\frac{4}{k}x+\frac{\pi}{3}\right)+7$ 的最小正周期不小于 4，则正整数 k 的最小值为________.

8. 如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，且 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，那么 $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=$ ________.

9. 已知 $f(x+2)=-f(x)$，当 $x\in[4,\ 6]$ 时 $f(x)=2^x-1$，求 $f(x)$ 在 $[0,\ 2]$ 上的表达式.