



中西算學大成卷八十五

嘉善陳維祺纂

積分術二

第二十五款 求虛函數微分式之積方

凡微分式內之虛函數。若欲其項俱變為無窮。惟可令 $\frac{1}{x}$ 之各法求其積分。

如有微分式 $\frac{1}{x^2}$ 。觀此式。易可不見。因其倍數為0。故也。易開其方。因 $\frac{1}{x^2}$ 故可

$(\frac{1}{x^2})^2 = \frac{1}{x^4}$

變所設之微分式為 $\frac{1}{x^2}$ 。此所以可令公式中 $\frac{1}{x}$ 而從 $\frac{1}{x^2}$ 得分 $\frac{1}{x^3}$ 。再將人之

$\frac{1}{x^2}$ 六次

卯

卯

卯

卯

卯

同數 $\frac{1}{x}$ 代還之。即能以有天之各項求其積分。

$\frac{1}{x^2}$ 六次

第二十六款

茲專論微分內式之有虛函數。其形如 $\frac{1}{x^2}$ 者。此種虛函數。不外乎下兩式。一為

$\frac{1}{x^2}$ 卯

一為 $\frac{\text{甲}|\text{乙}|\text{天}|\text{丙}|\text{天}}{\text{吧}|\text{天}}$ 其吧為天之任何實函數。

惟此兩式亦可以一總式包括之。如將第一式以其根之次數自乘而以未乘之

虛函數為其分母。則可變之為

$$\frac{\text{甲}|\text{乙}|\text{天}|\text{丙}|\text{天}}{\text{吧}(\text{甲}|\text{乙}|\text{天}|\text{丙}|\text{天})|\text{天}}$$

而與第二式為同類。

其簡式

$$\frac{\text{甲}|\text{乙}|\text{天}|\text{丙}|\text{天}}{\text{吧}|\text{天}}$$

之形有兩種。一其分母內之丙為正。一其分母內之丙為負。

第二十七款

茲先論其第一種丙為正者。

設有微分式

$$\frac{\text{甲}|\text{乙}|\text{天}|\text{丙}|\text{天}}{\text{吧}|\text{天}}$$

求其積分。可令

$$\frac{\text{甲}|\text{乙}|\text{天}|\text{丙}|\text{天}}{\text{吧}|\text{天}} = \text{吧}|\text{天}$$

①此已午為未定之常數。乃將其左右兩邊

之數各自乘。而變為無根號之式。如 $\frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}}$ 若欲令此式之左邊變為正乘方式。必

將其第一項移至右邊。而兩邊俱以丙乘之。又各加 $\frac{丙^2}{丁}$ 。則式變為

邊之

$$\frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} = \frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} \quad \text{即} \quad \frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} = \frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}}$$

如此則左右兩邊皆變為正乘方式。

各開平方得

$$\sqrt{\frac{甲乙}{丙丁}} = \sqrt{\frac{甲乙}{丙丁}} \quad \text{②}$$

將此式求微分。得

$$\frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} = \frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} \quad \text{從此式又可得}$$

從此式又可得

$$\frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} = \frac{\sqrt{甲乙}}{\sqrt{丙丁}} \quad \text{③}$$

③乃將兩約②式。以與①式相

第二十八款

數之函數所不同者。惟在常數_(二)而已。

兩又為他常數所以

加得

$$\frac{\sqrt{丙}}{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{甲} \sqrt{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{天} = \sqrt{地}$$

配其對數即得

$$\log(地) - \log(乙) = \log(地) - \log(丙)$$

將此式與(三)(四)兩式相比得

$$\log\left(\frac{\sqrt{丙}}{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{甲} \sqrt{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{天}\right) = \log(地) - \log(乙)$$

④ 惟因

$$\log(地) - \log(乙) = \log(地) - \log(丙)$$

其兩為任何常數。故可令之為兩其

$$\frac{\sqrt{甲} \sqrt{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{天}}{\sqrt{天}} = \frac{\sqrt{丙}}{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{甲} \sqrt{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{天}$$

$$\frac{\sqrt{丙}}{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{甲} \sqrt{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{天} = \frac{\sqrt{丙}}{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{甲} \sqrt{乙} \sqrt{天} \sqrt{丙} \sqrt{天}$$

此式中各項對

$$\log = \log(地) - \log(乙)$$

茲論其第二種丙為負者。

如有微分式

$$\frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{依求其積分。}}$$

依求其積分。

可令式中之分母

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗}$$

其已為未定之常數斗為

變角則

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

依前款之法變之得

此式之左邊已為正乘方。若欲變其右邊亦

為正乘方可令

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

即

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

由此得

兩邊各開平方得

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

求其微分

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

如欲求其斗則從

而以丙約之得

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

所以

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

求其積分得

$$\text{甲乙天丙天} = \text{已正弦斗} - \text{已餘弦斗}$$

如欲求其斗則從

第二十九款

之角_{下亥}其較恒為正角。所以其較角為常數而兩角之積分不出乎此兩式之外。

式得

$$\frac{\text{餘弦}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}^2}{\text{乙}^2}$$

所以其積分之式或為

$$\frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}^2}{\text{乙}^2}$$

或為

$$\frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}^2}{\text{乙}^2}$$

此兩式因餘弦之角亥與正弦

如有微分式

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{甲} \cdot \text{丙}}{\text{乙}^2}$$

求其積分。

因其卯為任何整數故可令

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{甲} \cdot \text{丙}}{\text{乙}^2}$$

而

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{甲} \cdot \text{丙}}{\text{乙}^2}$$

則

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \cdot \frac{\text{丙}}{\text{乙}} = \frac{\text{甲} \cdot \text{丙}}{\text{乙}^2}$$

將

若欲將此式如第二十七八兩款之

$$\frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}} \quad \frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}} \quad \frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}}$$

兩式之法求其同數則因前兩款

之式其卯等于〇而此式不能如此求之若令

則卯入于各分數之分母內而

其項俱變為無窮惟可令

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 1$$

則式之右邊所有兩箇降等之積分式其末一箇

可不見因其倍數為〇故也

所以可令公式中

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 1$$

而從

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 0$$

得

$$\frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}} \quad \frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}} \quad \frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}}$$

之同數又可令公式中

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 2$$

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 3$$

而從

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 1$$

$$\frac{\text{卯}}{\text{卯}} = 2$$

之式得其同數如是推之可求至卯為任何數惟其卯必為正整之數

第三十款

若令卯為負數則其式可變為他形法以卯代其卯而將所得之各項從新排列

第三十一款

惟一者。則不能用前款之變式。因分母內凡有_一者。其項俱變為無窮。故

天甲乙丙天
從之

從之

積分必分求之。

天_一地_一
則
天_一地_一
扶_一抱_一

所以其

天	甲	乙	天	丙	天
徒					

丙	乙地	甲地
---	----	----

下地

惟此變式之微分。其積分之形有

之。則其式為

$$\begin{aligned} & \text{天}^{\text{卯}} / \text{甲}^{\text{乙}} \text{天}^{\text{丙}} = \frac{(\text{卯} - \text{甲})}{\text{天}} \cdot \frac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{天}^{\text{卯}} / \text{甲}^{\text{乙}} \text{天}^{\text{丙}}} \\ & \text{天}^{\text{卯}} / \text{甲}^{\text{乙}} \text{天}^{\text{丙}} = \frac{(\text{卯} - \text{甲})}{\text{天}} \cdot \frac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{天}^{\text{卯}} / \text{甲}^{\text{乙}} \text{天}^{\text{丙}}} \end{aligned}$$

而此式中之卵可以代之。

兩種視甲之正負而異。

如甲為正數。則依第二十七款之法得積分之式。為

其甲可任為正負之數。

如令之為負。則積分之式變為

以地之同數代還之。則得

惟須

勿忘其甲。或可為正。或可為負。

如甲為負數。則

依第二十八款。得其積分式。

以天代

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \text{乙} \text{天} \text{丙} \text{天}}}{\text{天}}$$

$$\frac{\text{丙} \text{乙} \text{地} \text{甲} \text{地}}{\text{地}}$$

$$\frac{\text{厘} \text{訥} (\text{乙} \text{甲} \text{地} \text{丙} \text{甲} \text{地} \text{甲} \text{地})}{\text{厘}}$$

$$\frac{\text{厘} \text{訥} (\text{乙} \text{甲} \text{地} \text{丙} \text{甲} \text{地} \text{甲} \text{地})}{\text{厘}}$$

$$\frac{\text{厘} \text{訥} (\text{乙} \text{甲} \text{地} \text{丙} \text{甲} \text{地} \text{甲} \text{地})}{\text{厘}}$$

$$\frac{\text{厘} \text{訥} (\text{乙} \text{甲} \text{地} \text{丙} \text{甲} \text{地} \text{甲} \text{地})}{\text{厘}}$$

$$\frac{\text{厘} \text{訥} (\text{乙} \text{甲} \text{地} \text{丙} \text{甲} \text{地} \text{甲} \text{地})}{\text{厘}}$$

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \text{乙} \text{天} \text{丙} \text{天}}}{\text{天}}$$

$$\frac{\text{厘} \text{訥} (\text{乙} \text{甲} \text{地} \text{丙} \text{甲} \text{地} \text{甲} \text{地})}{\text{厘}}$$

其地。即得

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{乙} \sqrt{\text{丙} \sqrt{\text{天}}}}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{乙} \sqrt{\text{丙} \sqrt{\text{天}}}}}{\text{甲} \sqrt{\text{天}}} \quad \text{兩}$$

第三十二款

以上五款之法。已足為多種微分式求積分之用。

即如從第二十七款之法。則可得

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{乙} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{乙} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{乙} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{乙} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

從三十一款之法。可得

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

若以 (甲) 約之。令 (甲) 兩為兩。則

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{甲} \sqrt{\text{天}}}}{\text{天}} \quad \text{兩}$$

此式又

第一百三十一款

第三十三款

能隨其所用之常數而有各種變形

凡對函數之積分。每類中各有相配之一幅積分數。可以角度或平圓之弧明之。

即如依第二十八款之法。可得

$$\frac{\sqrt{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}}}{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}} \quad \text{而} \quad \frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}} = \left(\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}} \right) \left(\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}} \right)$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}}}{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}} \quad \text{由此可見凡積分之式。每}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}}}{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}} \quad \text{及} \quad \frac{\sqrt{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}}}{\frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \frac{\text{丙}}{\text{天}}$$

又如依第三十款第二法可得

$$\begin{aligned} & \frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}} \\ &= \text{正割} \frac{\text{天} \text{甲}}{\text{天}} \text{兩} \\ &= \text{餘弦} \frac{\text{天} \text{甲}}{\text{天}} \text{兩} \end{aligned}$$

第三十四款

茲款特設一式以明微分式內有平方根號而欲求積分之法。

如有微分式 $\frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}}$ 求其積分。

則依已知之法變之得

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}} =$$

$$\frac{\text{天} (\text{甲} \sqrt{\text{天} \text{甲}} \sqrt{\text{天}})}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}} \quad \frac{\text{天} (\text{甲} \sqrt{\text{天} \text{甲}} \sqrt{\text{天}})}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}}$$

此兩項之微分

其第一項有他法可明之為

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}} =$$

所以得

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}} =$$

$$\frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}} = \frac{\text{天} \sqrt{\text{天} \text{甲}}}{\text{天} \text{甲} \sqrt{\text{天}}}$$

可見其兩項之式真為

相類。

如欲求其第一項之積分。可令其

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

則

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

而其

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

①

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

①

所以

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

又依

同法。令

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

則得

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

而其

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

③

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

④ 所以又得

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

總之。其斗并兩角

如能為

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

則其

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

③

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

④ 所以又得

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

此種微分式可用公式

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

明之。茲欲查出用何式能變其微分式為實函數。

如令

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

則

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

而

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

所以

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

而

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

則所設之微分式變為

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

此式如遇

即實能為整數者必為實函數。

設其微分式為

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

則此式合于前例。因其

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

故能變其形為

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

設其微分式為

$\frac{dx}{x}$ 天

則可變之。使其括弧中天之指數為負。

法將括弧內之數變為

$\frac{dx}{x^2}$ 天

又依前法變之。至其末式中

之^卯每遇能為整數之時。則微分式可為實函數。或可云。每遇^卯能為整數。則其微分式可變為實函數。

設有微分式

$\frac{dx}{x^3}$ 天

$\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{x^3} dx$

故可用此

諸數于

之式中。得^乙從此式化得

若徑將其

如法變之。則易知所

$\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{x^3} dx$

$\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{x^3} dx$

$\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{x^3} dx$

$\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{x^3} dx$

$\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{x^3} dx$