

研究生讲义

连续介质力学引论

(下 册)

杜 珣

目 录

第五章 理想弹性体

§1 弹性体的平衡问题	1
§2 纯弯曲和纯扭转	6
§3 平面变形问题	10
§4 轴对称和球对称的变形问题	18
§5 理想弹性介质中波的传播	19

第六章 理想流体

§1 定常运动和伯努利积分	25
§2 无旋运动和拉格朗日积分	29
§3 定常无旋运动	31
§4 声 波	37
§5 等速活塞引起的气体一维运动	43

第七章 牛顿粘性流体

§1 重力下流体的平衡	49
§2 流线为直线的平行流动	51
§3 流线为圆周的平行流动	55
§4 小球低速定常绕流	59
§5 平板边界层流动	63
§6 粘性气体一维定常运动	68

附录一 柱坐标和球坐标 73

附录二 易学理论 85

第五章 理想弹性体

§1 弹性体的平衡问题

1. 理想弹性体的各参数

理想弹性体的本构方程为

$$T = \lambda e_{kk} I + 2\mu E, \text{ 即 } T_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1)$$

其中

T 为应力张量, $E = \{e_{ij}\}$ 为变形张量, $I = \{\delta_{ij}\}$ 为单位张量, λ 和 μ 为 Lamé 系数

由 (1) 可解出

$$T_{ij} = (3\lambda + 2\mu) e_{kk} \delta_{ij} \quad (2)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (3)$$

称 $\bar{\sigma} = \frac{1}{3} T_{kk}$ 为平均法应力。

$e_{kk} = \text{div } \underline{u}$ 为体积变化率 ($\underline{u}$ 为位移), 由 (2) 得

$$K = \frac{\bar{\sigma}}{e_{kk}} = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

称 K 为弹性体的体积模量。由于物体受压则体积缩小, 因此恒有 $K > 0$

$$\text{记 } \gamma = \frac{3K\mu}{\lambda + \mu} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} \quad (5)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (6)$$

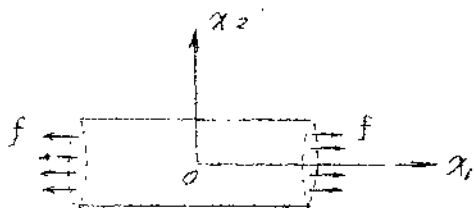
称 γ 为弹性模量 (柏氏模量), ν 为泊松 (Poisson) 比。

为说明 γ 和 ν 的物理意义, 可考虑弹性体的简单伸缩变形。取一物体, 侧面为自由面 (纵向取为 x_1 轴), 两端截面

受均匀的拉力。(单位面积上的拉力为 f)。这时的应力

为

$$\tau = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



即 $\tau_{11} = f$ ，而其余的分量皆为零。以此应力 τ 代入(3)，得

$$e_{11} = \frac{(\lambda + \mu)f}{\mu(3\lambda + 2\mu)} = \frac{f}{Y}$$

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda f}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} = -\frac{\nu f}{Y}$$

即 $f = Y e_{11}$ ， Y 就是拉伸实验中虎克定律的比例常数。显然恒有 $Y > 0$ 。

而 $\nu = -\frac{e_{22}}{e_{11}}$ ，这就是泊松比 ν 的物理意义。在此纵

向拉伸实验中，物体横向将缩短，因此 e_{22} 与 e_{11} 反号，故恒有 $\nu > 0$ 。

由(5)和(6)，可解出

$$\lambda = \frac{\nu Y}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (7)$$

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \nu)} \quad (8)$$

因 Y 和 ν 都为正值，由(8)知 $\mu > 0$ ，从而由

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad \text{知} \quad \lambda + \mu > \frac{1}{3}\mu > 0$$

再由(6)，即知 $\lambda > 0$ ，和 $\nu < \frac{1}{2}$ 。

以(7)：(8)代入(3)，可得

$$e_{ij} = \frac{1}{V} [(1+\nu) T_{ij} - \nu T_{kk} \delta_{ij}] \quad (9)$$

即

$$e_{11} = \frac{1}{V} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})], \quad e_{22} = \frac{1}{V} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})], \\ e_{33} = \frac{1}{V} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})], \quad e_{ij} = \frac{1+\nu}{V} T_{ij} \quad (i \neq j \text{ 时}).$$

2. 弹性势:

$$\text{标量 } f = \frac{1}{2} T_{ij} e_{ij} \quad (10)$$

称为理想弹性体的弹性势。以本构方程(9)代入得

$$2f = (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) e_{ij} \quad (10) \\ = \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + 2\mu [e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{13}^2 + 2e_{23}^2]$$

因 λ 和 μ 都为正数, 故由此知 f 是关于 e_{ij} 的正定二次型, 即恒有 $f \geq 0$, 且有 $\frac{\partial f}{\partial e_{ij}} = T_{ij}$.

同理, 以(9)代入(10), 知 f 是关于 T_{ij} 的正定二次型, 且有 $\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} = e_{ij}$.

3. 理想弹性体平衡问题

设弹性体 Ω 积为 V , 其周界面为 σ , $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 是 σ 的外单位法向量, 理想弹性体在外力(体力密度为 $\underline{b}$, 作用于 σ 上的外面力密度为 $\underline{F}\underline{n}$)作用下平衡, 则有下述边值问题:

在体积 V 中满足平衡方程

$$\rho \underline{b} + \text{div } \underline{T} = 0 \quad (11)$$

在表面 σ 上满足边条件:

$$\underline{T} \cdot \underline{n} = T_{ik} n_k = \underline{F}\underline{n} \quad (12)$$

($\underline{b}$, $\underline{F}\underline{n}$ 和密度 ρ 是给定的量)

如在边界 σ (或 σ 的一部分) 上, 不是给定外力 $\underline{F}\underline{n}$, 而

与给定位移 $\underline{u} = \underline{U}$ ，则边条件 (2) (或其一部分) 将换成

$$\underline{u} = \underline{U} \quad (12')$$

4. 平衡问题关于应力解的唯一性.

设有两个应力场 $T^{(1)}$ 和 $T^{(2)}$ (其相应的位移场为 $\underline{u}^{(1)}$ 和 $\underline{u}^{(2)}$) 都满足边值问题 (11), (12) 或 (12'), 下面证明 $T^{(1)} = T^{(2)}$.

$$\text{令 } T = T^{(1)} - T^{(2)}, \quad \underline{u} = \underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(2)}$$

由于方程 (11), 边条件 (12) 和 (12') 都是线性的, 因此 T 和 $\underline{u}$ 将满足齐次的方程和边条件, 即:

$$\operatorname{div} T = 0 \quad \text{即} \quad \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (13)$$

在 $\bar{B}$ 上满足自由面条件

$$T_{ik} n_k = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (14)$$

$$\text{或} \quad u_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (14')$$

(13), (14) 的解 T , 就是理想弹性体在不受外力的自然状态下平衡时的应力场, 下面证明此 T 是零张量, 即 $T = 0$ (也称零应力).

以位移 u_i 乘 (13) 式, 并在体积 V 中积分, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V u_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (u_i T_{ik}) - T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dV \\ &= \int_B u_i T_{ik} n_k dS - \int_V T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV. \end{aligned}$$

$$\text{由 (14) 或 (14') 知} \quad \int_B u_i T_{ik} n_k dS = 0.$$

$$\text{从而得} \quad \int_V T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV = 0 \quad (15)$$

由于 $T_{ik} = T_{ki}$, 而 $\{e_{ik}\}$ 是 $\left\{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right\}$ 的对称部分, 故有

$$T_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = T_{ik} e_{ik} = 2f \geq 0.$$

(15) 给出 $\int_V 2f dV = 0$, 也即 $f = 0$. 再由弹性势 f 的表达式

(10') 知变形张量 $E = \{e_{ij}\} = 0$. 从而再由本构方程 (1)

知应力 $T = 0$, 从而

$T^{(1)} = T^{(2)}$, 这就证明了平衡问题应力解的唯一性.

5) 零应力所对应的位移只能是刚体运动.

证 $T = 0$ 则 $E = \{e_{ij}\} = 0$

由 $e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$ 得 $u_1 = f_1(x_2, x_3)$. 同理 $e_{22} = e_{33} = 0$ 给出 $u_2 = f_2(x_1, x_3)$, $u_3 = f_3(x_1, x_2)$.

再由 $e_{12} = 0$ 给出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad (16)$$

右边和 x_2 无关, 从而 f_1 是 x_2 的一次式, 同理由 $e_{13} = 0$ 知 f_1 又是 x_3 的一次式, 因此 f_1 的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_2, x_3) &= a_1 x_2 x_3 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 \\ \text{同知 } f_2(x_1, x_3) &= a_2 x_1 x_3 + b_2 x_1 + c_2 x_3 + d_2 \\ f_3(x_1, x_2) &= a_3 x_1 x_2 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + d_3 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中参数 a_i, b_i, c_i, d_i 皆常数

以 (17) 代入 (16) 得 $a_1 = -a_2$, $b_1 = -b_2$. 同理以 (17) 代入 $e_{13} = 0$ 和 $e_{23} = 0$ 的表达式中可得

$$a_1 = -a_3, c_1 = -b_3, a_2 = -a_3, c_2 = -c_3$$

由此知 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

记 $w_1 = c_3 = -c_2$, $w_2 = c_1 = -b_3$, $w_3 = b_2 = -b_1$, 则

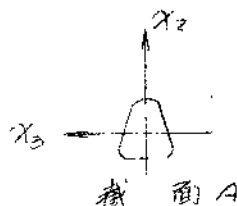
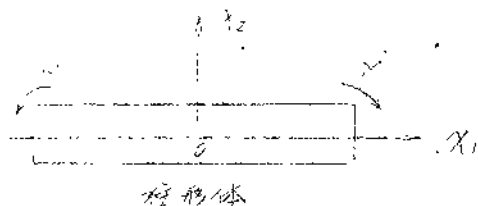
(17) 变为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= w_2 x_3 - w_3 x_2 + d_1 \\ u_2 &= w_3 x_1 - w_1 x_3 + d_2 \\ u_3 &= w_1 x_2 - w_2 x_1 + d_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{也即 } \underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{r} + \underline{d}$$

这正好是刚体运动. ($\underline{d}$ 表示平移, $\underline{\omega}$ 表示旋转角).

§2 纯弯曲和纯扭转

1. 柱体的纯弯曲



设如图所示的柱状物体， x_1 轴通过截面的重心， $x_1 = 0$ 为中性截面。截面形状关于 x_2 轴是对称的，从而沿截面 A 有

$$\int_A x_2 x_3 dA = \int_A x_3 dA = \int_A x_2 x_3 dA = 0 \quad (1)$$

设柱体受内力矩和外表面力，只在两端截面上各受方向相反的内力矩 M ，其方向与 x_3 轴平行，则在此力矩作用下，物体将发生纯弯曲，求它的应力场 T 和相应的位移场 u 。

考虑除纵轴向法应力 T_{11} 外，其余分量都为零的应力场。显然这种形式的应力场满足柱体侧面为自由面的边条件。

以 $T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 代入平衡方程 $\text{div} T = 0$ 。

得

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = 0, \quad \text{即 } T_{11} \text{ 和 } x_1 \text{ 无关。}$$

由本构方程知，此应力场对应的变形是

$$e_{11} = \frac{T_{11}}{Y}, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\nu}{Y} T_{11}, \quad e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$$

由于 $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ 都和 x_1 无关, 故由协调方程 (见第三章 §3 末) 给出

$$\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_3^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.$$

从而 $T_{11} = \alpha + \beta x_2 + \gamma x_3$ (α, β, γ 为常数).

在两端截面上不受力, 这给出

$$0 = \int_A T_{11} dA = \int_A (\alpha + \beta x_2 + \gamma x_3) dA = \alpha A \quad (\text{利用了(1)})$$

即 $\alpha = 0$.

端截面上力矩平衡

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \int_A x_3 T_{11} dA = 0, \quad M_3 = \int_A -x_2 T_{11} dA = -M.$$

以 $T_{11} = \beta x_2 + \gamma x_3$ 代入上述 (1), 就给出

$$M_2 = \gamma \int_A x_3^2 dA = 0, \quad M = \beta \int_A x_2^2 dA.$$

由此得 $\gamma = 0, \quad \beta = \frac{M}{J}$, ($J = \int_A x_2^2 dA$ 为惯性矩).

因此所求问题的应力场

$$T = \begin{pmatrix} \frac{M}{J} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

下面计算相应的位移场 u .

$$\text{记常数 } C = \frac{M}{YJ},$$

$$\epsilon_{11} = \frac{T_{11}}{Y} \quad \text{给出} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = C x_2$$

再由中间截面 $x_1 = 0$ 上 $u_1 = 0$, 解出

$$u_1 = C x_1 x_2 \quad (3)$$

$$\text{由 } \epsilon_{33} = -\frac{\gamma}{Y} T_{11} \quad \text{给出} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -C x_2$$

再由对称截面 $x_3 = 0$ 上 $u_3 = 0$, 解出:

$$u_3 = -C\nu x_2 x_3 \quad (4)$$

(3)和(4)自然使 $e_{13} = 0$ 得到满足)

$$\text{由 } e_2 = -\frac{\nu}{2} T_1 \text{ 给出 } \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -C\nu x_2$$

$$\text{积分得: } u_2 = -\frac{C}{2} \nu x_2^2 + f(x_1, x_3) \quad (5)$$

$$\text{再由 } e_{12} = 0 \text{ 给出 } \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -Cx_1$$

$$e_{23} = 0 \text{ 给出 } \frac{\partial f}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = C\nu x_2$$

因此得 $f = -\frac{C}{2} x_1^2 + \frac{C}{2} \nu x_2^2$. 代入(5)中得

$$u_2 = -\frac{C}{2} [x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_3^2)] \quad (6)$$

(3)(4)(6)给出此问题的位移场 $\underline{u}$.

在中心线 $x_2 = x_3 = 0$ 上的位移为:

$$u_1 = u_3 = 0 \quad u_2 = -\frac{C}{2} x_1^2 = -\frac{M}{2YJ} x_1^2$$

即中心轴线向下弯曲成抛物线。

2. 圆柱体的纯扭转.

圆柱体不受外力作用, 只在两端截面处有扭转力矩 M , 其方向与 x_1 轴 (即圆柱中心轴) 平行. ($x_1 = 0$ 为中间截面). 则圆柱体作纯扭转运动. 此时每个横截面 ($x_1 = \text{常数}$) 都绕 x_1 轴有旋转位移, 其旋转角 θ 是 x_1 的函数. 因此位移场 $\underline{u}$ 的形式为

$$\underline{u} = \theta(x_1) \underline{e}_2 x_2 \underline{e}_3$$

$$\text{即 } u_1 = 0, \quad u_2 = -\theta x_3, \quad u_3 = \theta x_2 \quad (7)$$

由此知

$$c_{12} = -\frac{1}{2}x_3 \frac{d\theta}{dx_1}, \quad c_{13} = \frac{1}{2}x_2 \frac{d\theta}{dx_1}$$

$$c_{23} = c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0$$

$$\text{从而 } T_{12} = -\mu x_3 \frac{d\theta}{dx_1}, \quad T_{13} = \mu x_2 \frac{d\theta}{dx_1}$$

$$T_{23} = T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$$

代入平衡方程 $\text{div } T = 0$ 中, 得

$$-\mu x_3 \frac{d^2\theta}{dx_1^2} = 0 \quad \text{和} \quad \mu x_2 \frac{d^2\theta}{dx_1^2} = 0$$

$$\text{即 } \frac{d^2\theta}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d\theta}{dx_1} = \omega = \text{常数}$$

即所求应力场

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\omega x_3 & \mu\omega x_2 \\ -\mu\omega x_3 & 0 & 0 \\ \mu\omega x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

积分 $\frac{d\theta}{dx_1} = \omega$, 注意在中间截面 $x_1 = 0$ 处 $\theta = 0$, 得

$\theta = \omega x_1$, 代入 (7) 中得位移场

$$u_1 = 0, \quad u_2 = -\omega x_1 x_3, \quad u_3 = \omega x_1 x_2 \quad (9)$$

圆柱面 $x_2^2 + x_3^2 = a^2$ 上的总应力

$$T \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & 0 & 0 \\ T_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 T_{12} + n_3 T_{13} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于 $n_2 : n_3 = x_2 : x_3$

$$\text{再由 (8)} \quad n_2 T_{12} + n_3 T_{13} = \mu\omega (-n_2 x_3 + n_3 x_2) = 0$$

因此圆柱面上自由面边条件 $T \cdot \underline{n} = 0$ 满足, 而在两端横

$$\text{面上 } \underline{n} = \underline{e}_1, \quad T \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{12} \\ T_{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{合力 } R_2 = \int_A T_{12} dA = -\mu\omega \int_A \chi_2 dA = 0$$

$$R_3 = \int_A T_{13} dA = \mu\omega \int_A \chi_2 dA = 0$$

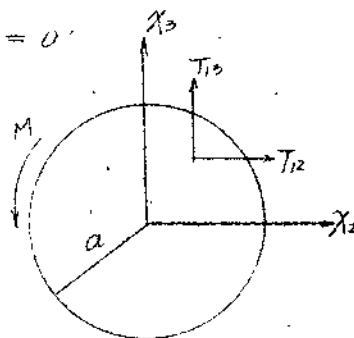
扭转力矩

$$M = \int_A (\chi_2 T_{13} - \chi_3 T_{12}) dA$$

$$= \mu\omega \int_A (\chi_2^2 + \chi_3^2) dA$$

$$= \mu\omega \int_0^a 2\pi r^3 dr = \frac{\mu\pi\omega}{2} a^4$$

由此定出 $\omega = \frac{2M}{\mu\pi a^4}$ (a 为圆柱半径)



截面 A

§3 平面变形问题

1. 平面变形问题

位移场满足 $u_3 = 0$ 和 $\frac{\partial}{\partial \chi_3} = 0$ 的问题称为平面变形问题。此时

$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$ 而 $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}$ 与 χ_3 无关。由本构方程知 T_{11}, T_{12}, T_{22} 也与 χ_3 无关, $T_{13} = T_{23} = 0$

由 $\epsilon_{33} = \frac{1}{\nu} [T_{33} - \nu(T_{11} + T_{22})] = 0$ 知

$$T_{33} = \nu(T_{11} + T_{22}) \quad (1)$$

忽略体力时, 平衡方程给出

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial \chi_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial \chi_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial \chi_2} = 0 \quad (2)$$

以 (1) 代入本构方程 得

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{Y} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] = \frac{1+\nu}{Y} [(1-\nu)T_{11} - \nu T_{22}] \\ e_{22} &= \frac{1}{Y} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})] = \frac{1+\nu}{Y} [(1-\nu)T_{22} - \nu T_{11}] \\ e_{12} &= \frac{1+\nu}{Y} T_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以(3)代入协调方程 $\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$ 得

$$(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x_1^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_1^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (4)$$

2. 应力函数

为满足平衡方程(2), 可令

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} \quad (5)$$

称 Φ 为应力函数. 以(5)代入(4)得更满足

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0, \quad \text{此即双调和方程}$$

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (6)$$

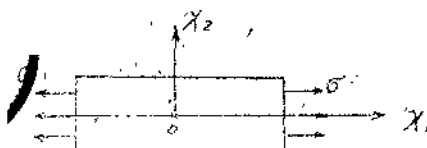
满足(6)的解就称为双调和函数.

关于 x_1 和 x_2 的二阶和三阶多项式都是双调和函数. 取应力函数为任意的一个双调和函数, 都能给出一个无体力作用的平面变形问题的应力场. (应力函数增减一个 x_1 和 x_2 的一次多项式, 仍给出同样的应力场.)

例1. 取 $\Phi = \frac{\sigma_0}{2} x_1^2$ 为常数.

它给出应

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \sigma_0 \end{pmatrix}$$



这代表平面问题的简单拉伸. 以应力代入(3)得

12.

$$e_{11} = \frac{1-\nu^2}{Y} \sigma, \quad e_{22} = -\frac{\nu(1+\nu)}{Y} \sigma, \quad e_{12} = 0$$

(注意此时 $-\frac{e_{22}}{e_{11}} = \frac{\nu}{1-\nu}$), 积分后取得到相应的位移场

为:

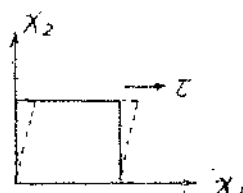
$$u_1 = \frac{1-\nu^2}{Y} \sigma x_1, \quad u_2 = -\frac{\nu(1+\nu)}{Y} \sigma x_2, \quad u_3 = 0$$

例2.

取 $\sigma = -\tau x_1 x_2$ τ 为常数.

它给出应力场

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



这是简单的剪切变形, 以此应力代入 (3) 得

$$e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = \frac{\tau}{2\mu}$$

相应的位移场为:

$$u_1 = \left(\frac{\tau}{2\mu} - C\right) x_2, \quad u_2 = C x_1, \quad u_3 = 0 \quad (C \text{ 为常数})$$

取 $C = 0$ 则得 $u_1 = \frac{\tau}{2\mu} x_2, \quad u_2 = u_3 = 0$ 此即上图的位移场.

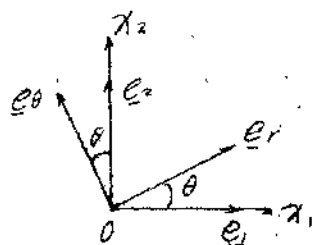
3. 平面极坐标下的应力函数.

极坐标 (r, θ) 为

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

由此可知 $dr = \cos \theta dx_1 + \sin \theta dx_2$

$$d\theta = -\frac{\sin \theta}{r} dx_1 + \frac{\cos \theta}{r} dx_2$$



$$\text{即 } \frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\text{从而由 } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right).$$

得

$$T_{11} = \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) - 2 \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \right) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad (7)$$

$(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ 和 $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ 两直角坐标系间的方向余弦为 $\beta_{1r} = \beta_{2\theta} = \cos \theta$, $-\beta_{1\theta} = \beta_{2r} = \sin \theta$

由张量变换规律知

$$T_{11} = \cos^2 \theta T_{rr} - 2 \cos \theta \sin \theta T_{r\theta} + \sin^2 \theta T_{\theta\theta} \quad (8)$$

$$T_{22} = \sin^2 \theta T_{rr} + 2 \cos \theta \sin \theta T_{r\theta} + \cos^2 \theta T_{\theta\theta}$$

两式相加, 得

$$T_{11} + T_{22} = T_{rr} + T_{\theta\theta} \quad (9)$$

由于对任意的 θ 而言 (7), (8) 两式右边都相等, 故有

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ T_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \\ T_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

以 (5) 和 (10) 代入 (9) 得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \text{ 即 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

双调和方程 (6) 在极坐标形式下为

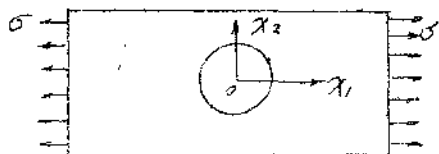
$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (11)$$

由 (11) 求出双调和函数 Φ 后, 代入 (10) 就得到应力 T 在极坐标下的各分量。

4. 圆孔应力集中

大的平板, 中心有一圆孔, 其半径为 a , 圆孔为自由面。

平板两边受均匀的拉力 σ ，其方向与 x_1 轴平行，忽略体力，求此平板问题的应力场。



解

如果有小圆孔，此平面拉伸问题的应力函数由前面例1知为

$$\Phi^0 = \frac{\sigma}{2} x_2^2 = \frac{\sigma}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (r, \theta \text{ 为极坐标}), \text{ 即}$$

$$\Phi^0 = \frac{1}{4} \sigma r^2 - \frac{1}{4} \sigma r^2 \cos 2\theta \quad (12)$$

代入(10)，得 Φ^0 给出的应力场极坐标分量：

$$T_{rr}^0 = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta), \quad T_{\theta\theta}^0 = \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta), \quad T_{r\theta}^0 = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \quad (13)$$

当中心有小孔时，应力函数 Φ 满足双调和方程(11)和小孔处边界条件：

$$r = a \text{ 时}, \quad T_{rr} = T_{r\theta} = 0 \quad (14)$$

当 r 充分大(不妨视为 $r \rightarrow \infty$)时， Φ 给出的应力场应趋于无孔情形的解(13)。

由 Φ^0 的表达式(12)，可求 Φ 为如下的形式：

$$\Phi = f(r) + g(r) \cos 2\theta \quad (15)$$

以(15)代入(11)得

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{4g}{r^2} \right) = 0$$

由于 θ 可以任意，上式给出

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{df}{dr} = 0$$

$$\frac{d^4 g}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 g}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{dg}{dr} = 0$$

分别以 $f = r^m$ ， $g = r^n$ 代入，得

$$m^2(m-2)^2 = 0, \quad n(n-4)(n^2-4) = 0 \quad \text{故知} f \text{ 和 } g \text{ 的通解}$$