数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

16

湖

数学竞赛

湖南教育出版社 16

数 学 竞 赛（16）

本社编
责任编辑：欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行（东风路附1号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168毫米　32开　印张：4.125　字数：100000
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
ISBN7—5355—1525—8／G·1520
定价：1.85元

目 录

第 33 届国际 IMO 试题

第 33 届 IMO 中国代表队

1. 试求出所有的整数 a，b，c，其中 $1<a<b<c$，且使得 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 是 $abc-1$ 的约数．（新西兰供题）

解　由题设有 $a\geqslant 2$，$b\geqslant 3$，$c\geqslant 4$，故

$$\frac{a-1}{a}=1-\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{b-1}{b}\geqslant\frac{2}{3},\quad \frac{c-1}{c}\geqslant\frac{3}{4}.$$

所以　$abc\leqslant 4(a-1)(b-1)(c-1)$，

$$S=\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}<4$$

由题设知 $S\in N$，从而 $S=1$，2，3. 下面分三种情形讨论：

(A) 若 $S=1$，即 $(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1$，亦即

$$a+b+c=ab+bc+ca \tag{1}$$

但由 $a<ab$，$b<bc$，$c<ca$，有 $a+b+c<ab+bc+ca$，与 (1) 式矛盾．

(B) 若 $S=2$，即

$$2(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1<abc. \tag{2}$$

从而 a，b，c 全是奇数，再由 $c>b>a>1$，得 $a\geqslant 3$，$b\geqslant 5$，$c\geqslant 7$.

若 $b\geqslant 7$，则 $c\geqslant 9$，从而

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}=\frac{32}{63}>\frac{1}{2}$$

这与 (2) 相违，所以只能有 $b=5$，$a=3$，代入 (2) 得 $16(c-1)=15c-1$，解得 $c=15$.

(C) 若$S=3$，即

$$3(a-1)(b-1)(c-1)=abc-1<abc \quad (3)$$

若$a\geqslant 3$，则$b\geqslant 4$，$c\geqslant 5$，从而

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$$

这与(3)式矛盾，所以只能有$a=2$.

若$b\geqslant 5$，则

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3},$$

仍得矛盾，故只能$b=3$，4.

若$b=3$，由(3)得$6(c-1)=6c-1$，此方程无解；若$b=4$，由(3)得$9(c-1)=8c-1$，解得$c=8$.

综上讨论，得本题的解为

$$\begin{cases}a=3\\b=5\\c=15\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}a=2\\b=4.\\c=8\end{cases}$$

(本题解答取自何斯迈的答卷).

2. 设R是全体实数的集合.试求出所有的函数f：$R\to R$，使得对于R中的一切x和y，都有

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2. \quad \text{(印度供题)}$$

解 记$t=f^2(0)$，$f^{(2)}(x)=f[f(x)]$，在函数方程

$$f(x^2+f(y))=y+f^2(x) \quad (1)$$

中令$x=0$，得

$$f^{(2)}(y)=y+t \quad (2)$$

从而由(2)及(1)

$$x^2+f^{(2)}(y)+t=f^{(2)}[x^2+f^{(2)}(y)]$$

$$=f[f^2(x)+f(y)]=[f^{(2)}(x)]^2+y,$$

即 $\quad x^2+y+2t=y+(x+t)^2,$

亦即 $\quad 2t=t^2+2tx$

由于此式对任意 $x\in R$ 成立，故必 $t=0$，即 $f(0)=0$. 于是 (2) 成为

$$f^{(2)}(y)=y\ (y\in R) \tag{3}$$

又对任意 $x\geqslant 0$，由 (1) 与 (3) 有:

$$f(x+y)=f(x+f^{(2)}(y))=f(y)+f^{2}(\sqrt{x})$$

令 $y=0$，得 $f(x)=f^{2}(\sqrt{x})\geqslant 0\ (x\geqslant 0)$.

所以 $\quad f(x+y)=f(x)+f(y)\geqslant f(y)\ (x\geqslant 0)$.

这就是说，$f(x)$ 是 R 上的非降函数，即若 $x\geqslant y$，则 $f(x)\geqslant f(y)$.

最后证明：对一切 $x\in R$，有 $f(x)=x$.

事实上，若存在 $z\in R$，使 $f(z)\neq z$，若 $z<f(z)$，则 $f(z)\leqslant f^{(2)}(z)=z$ 矛盾；若 $f(z)<z$，则 $z=f^{(2)}(z)\leqslant f(z)$ 矛盾 .

易验证函数 $f(x)=x$ 满足 (1) .

(本题解答基本上取自何斯迈的答卷.)

3. 给定空间中的 9 个点，其中任何 4 点都不共面 . 在每一对点之间都连有一条线段，这些线段可染为蓝色或红色，也可不染色 . 试求出最小的 n 值，使得将其中任意 n 条线段中的每一条任意地染为红蓝二色之一，在这 n 条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形 . (中国供题)

解 首先，可以存在有 32 条边的 9 点图，把图中的边二染色，使图中无单色边三角形，具体构造如下:

把 9 个点编号为 1,2,⋯9,把它们分成 5 组：1，2；3，4；5，6；7，8；9.如图 1，若两组间连一红线（实线），则表示从这两组中

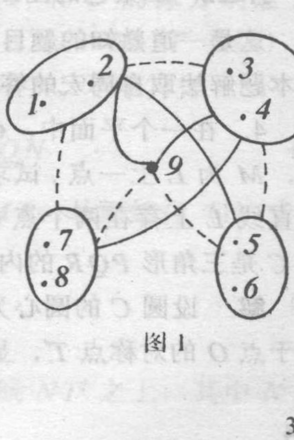


图 1

任取一点对都连有红线；对蓝线（虚线）类似处理，且每组内部的点不连线（例如，1，2之间不连线，）此图共有 $C_9^2-4=32$ 条边，且不存在单色边三角形．

另一方面，对任何一个有33条边的9点简单图，把边二染色时，必存在单色边三角形．这一事实可由下面两条引理得到．

引理1　任意一个有33条边的9点简单图 G 中；必存在 K_6．

证　考察图 G 的补图 $\overline{G}$，它有三条边在同构意义下只能有5种不同类型（如图2），无论哪一种类型，G 中均含有 K_6，比如第一种，7，8，9，1，3，5这6个点在 G 中形成 K_6．

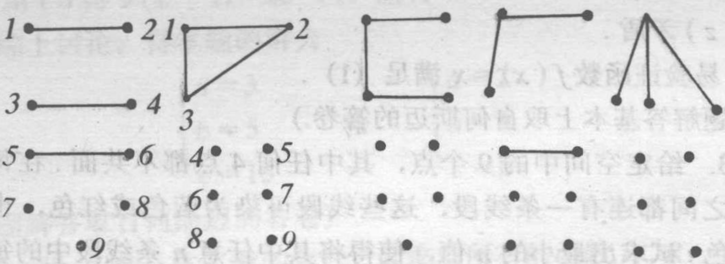


图2

引理2　二染色的图 K_6 中必存在单色边三角形

这是一道熟知的题目，证明从略．

(本题解法取自周宏的答卷)

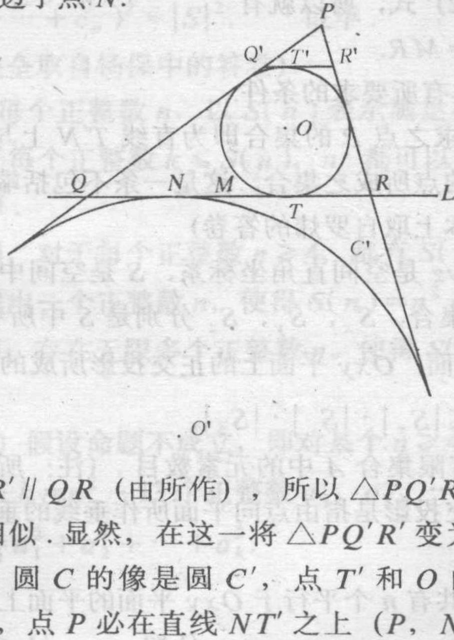
4．在一个平面中，C 为一个圆周，直线 L 是圆周的一条切线，M 为 L 上一点．试求出具有如下性质的所有点 P 的集合：在直线 L 上存在两个点 Q 和 R，使得 M 是线段 QR 的中点，且 C 是三角形 PQR 的内切圆．　　　　（法国供题）

解　设圆 C 的圆心为 O，圆 C 与直线 L 的切点为 T，点 T 关于点 O 的对称点 T'，显然点 T' 也在圆 C 之上．

任取一个满足条件的点 P，过 P 作圆 C 的两条切线，设它们与 L 的交点分别为 Q 和 R.

过 T' 作 L 的平行直线，设其分别与 PQ 和 PR 相交于点 Q' 和 R'. 于是圆 C 是 $\triangle PQ'R'$ 的 $Q'R'$ 边上的旁切圆，且在该边上的切点为 T'.

再作 $\triangle PQR$ 的 QR 边上的旁切圆 C'，并记其圆心为 O'，且设它切 QR 边于点 N.



由于 $Q'R' /\!/ QR$（由所作），所以 $\triangle PQ'R'$ 与 $\triangle PQR$ 关于点 P 同位相似. 显然，在这一将 $\triangle PQ'R'$ 变为 $\triangle PQR$ 的位似变换之下，圆 C 的像是圆 C'，点 T' 和 O 的像分别是 N 和 O'. 这表明，点 P 必在直线 NT' 之上（P，N，T' 共线）再利用"由一点向圆所作二切线相等"的事实，不难算得

$$TR=\frac{1}{2}(PR+QR-PQ)=QN \tag{1}$$

由于点 P 满足题中条件，故有 $MQ=MR$，从而结合 (1) 式，即知

$$NM=MT, \tag{2}$$

即点 N 是点 T 关于点 M 的对称点.

综合上述，即知：点 P 必位于直线 NT' 之上，其中 N 是

点 T 关于点 M 的对称点，T' 是点 T 关于点 O 的对称点．又因圆 C 是 $\triangle PQR$ 的内切圆，所以点 P 必须与 N 点位于点 T' 的不同侧．

反之，在直线 NT' 上任取一与 N 位于 T' 的不同侧的点 P，过 P 作圆 C 的二切线，设它们分别与 L 相交于点 Q 和 R，则重复上述作旁切圆的推导过程，仍可得到 (1) 式，又因点 N 满足 (2) 式，所以就有

$$QM = MR.$$

可见点 P 确实具有所要求的条件．

所以，所求之点 P 的集合即为直线 $T'N$ 上与 N 位于点 T' 不同侧的所有的点所成之集合，这是一条不包括端点 T' 的射线．

(本题解答基本上取自罗炜的答卷)

5. 设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个由有限个点所形成的集合，S_x，S_y，S_z 分别是 S 中所有的点在 Oyz 平面，Ozx 平面，Oxy 平面上的正交投影所成的集合．证明

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

其中 $|A|$ 表示有限集合 A 中的元素数目．(注：所谓一个点在一个平面上的正交投影是指由点向平面所作垂线的垂足．)

(意大利供题)

证明　设共有 n 个平行于 Oxy 平面的平面上有 S 中的点，这些平面记为 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，任取一 α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$．设其与 Oyz，Ozx 平面交成直线 y'，x'，并设 α_i 上有 C_i 个 S 中的点，则显然有 $C_i \leqslant |S_z|$　(1)

记 α_1 上的点在 x' 上的正交投影集合为 A_i，在 y' 上的正交投影集合为 B_i．

并记　$b_i = |B_i|$，$a = {}_i|A_i|$

那么　α_i 上 S 中的点数 C_i 不超过 $a_i b_i$，即 $c_i \leqslant a_i b_i$　(2)

又有 $\sum_{i=1}^{n} a_i = |S_y|$，$\sum_{i=1}^{n} b_i = |S_x|$，$\sum_{i=1}^{n} c_i = |S|$

$\Rightarrow |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z| = (b_1 + \cdots + b_n)(a_1 + \cdots + a_n) \cdot |S_z|$

$\geqslant (\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n})^2 \cdot |S_z|$ (cauchy 不等式)

$\geqslant (\sqrt{a_1 b_1 |S_z|} + \sqrt{a_2 b_2 \cdot |S_z|} + \cdots + \sqrt{a_n b_n \cdot |S_z|})^2$

$\geqslant (\sqrt{c_1 \cdot c_1} + \sqrt{c_2 \cdot c_2} + \cdots + \sqrt{c_n \cdot c_n})^2$ (由 (1)、(2))

$= (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)^2 = |S|^2$. 证毕.

(本题解答完全取自杨保中的答卷)

6. 对于每个正整数 n，以 $S(n)$ 表示满足如下条件的最大正整数：对于每个正整数 $k \leqslant S(n)$，n^2 都可以表示成 k 个正整数的平方之和.

(a) 证明，对于每个正整数 $n \geqslant 4$，都有 $S(n) \leqslant n^2 - 14$;

(b) 试找出一个正整数 n，使得 $S(n) = n^2 - 14$;

(c) 证明，存在无限多个正整数 n，使得 $S(n) = n^2 - 14$.

(英国供题)

证明 a) 假设命题不成立，即对某个 $n \geqslant 4$，有 $S(n) > n^2 - 14$，则存在 $k = n^2 - 13$ 个正整数 a_1，a_2，…，a_k，使得

$$n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

于是就有

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i^2 - 1) = 13.$$

由于 a_i 为正整数，所以由上式可知，必有

$$0 \leqslant a_i^2 - 1 \leqslant 13,$$

从而 $a_i^2 - 1 \in \{0, 3, 8\}$. 设在 $a_1^2 - 1$，$a_2^2 - 1$，…，$a_k^2 - 1$ 中有 a 个 0，b 个 3 和 c 个 8，于是就有

$$3b + 8c = 13.$$

上式表明，c 只能为 0 或 1. 但在这两种情况下，上式都不存在非

负整数解 b.

可见所述的假设不成立. 所以对一切正整数 $n\geqslant 4$, 都有

$$S(n)\leqslant n^2-14.$$

b) 我们来证明, 对 $n=13$ 可以成立等式 $S(n)=n^2-14$. 为此, 先来证明两个引理.

引理 1 对任何正整数 l, 都可将 2^{2l} 表示成 $3t-2$ 个正整数的平方之和, 其中, t 为满足条件 $1\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}(2^{2l}+2)$ 的任一正整数.

用归纳法. $l=1$ 时, 断言显然成立.

假设 $l=m$ 时, 断言已经成立; 则当 $l=m+1$ 时, 由于

$$2^{2(m+1)}=4\cdot 2^{2m}=2^{2m}+2^{2m}+2^{2m}+2^{2m},$$

所以由归纳假设知, 对任何满足条件 $1\leqslant t_i\leqslant\frac{1}{3}(2^{2m}+2)$ 的正整数 $t_i(i=1, 2, 3, 4)$, 都可以将 $2^{2(m+1)}$ 表示成

$$3(t_1+t_2+t_3+t_4)-8$$

个正整数的平方之和. 让 t_1, t_2, t_3, t_4 遍历它们的取值范围, 即知, 可将 $3^{2(m+1)}$ 表示成 $3t-2$ 个正整数的平方之和, 这里, t 是任一满足条件

$$2\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}(2^{2(m+1)}+2)$$

的正整数. 又当 $t=1$ 时, 显然可表. 所以引理中的断言对 $l=m+1$ 也成立.

引理 2 对任何正整数 $n\geqslant 13$, 都可以将 n^2 表示成 k 个正整数的平方之和, 这里, k 是任何一个满足条件 $4k\geqslant n^2$, $k\leqslant n^2-14$ 的正整数.

事实上, 当 $k\equiv n^2\pmod 3$ 时, 可将 n^2 表示成$\frac{1}{3}(n^2-k)$

个 2^2 和$\frac{1}{3}(4k-n^2)$个 1 之和；当 $k\equiv n^2-1(\bmod 3)$时，可将 n^2 表示成 2 个 3^2，$\frac{1}{3}(n^2-k-1)-5$ 个 2^2 和$\frac{1}{3}(4k-n^2+1)+3$ 个 1 的和；当 $k\equiv n^2-2(\bmod 3)$时，可将 n^2 表示成 1 个 3^2，$\frac{1}{3}(n^2-k-2)-2$ 个 2^2 和$\frac{1}{3}(4k-n^2+2)+1$ 个 1 之和．知引理 2 的断言成立．

下面来证明 $S(13)=13^2-14=155$，即要证明，对任何正整数 $k\leqslant 155$，都可以将 $13^2=169$ 表示成 k 个正整数的平方之和．

(i) 当 $43\leqslant k\leqslant 13^2-14$ 时，由于 $4k\geqslant 172>13^2$，故由引理 2 立知，可将 13^2 表示成 k 个正整数的平方之和．

(ii) 当 $k=1$，2 时，由 $13^2=5^2+12^2$ 立知断言成立．

(iii) 当 $3\leqslant k\leqslant 42$ 时，我们来分 3 种情况考虑:

若 $k\equiv 1(\bmod 3)$，则由于

$$13^2=5^2+4^2+8^2+8^2,$$

故只要分别对两个 8^2 应用引理 1，即可知断言成立．

若 $k\equiv 2(\bmod 3)$，则由于

$$13^2=3^2+4^2+4^2+8^2+8^2,$$

故只要分别对两个 4^2 和两个 8^2 应用引理 1，即可知断言成立．

若 $k\equiv 0(\bmod 3)$，且 $k\leqslant 33$ 时，可由

$$13^2=3^2+4^2+12^2=3^2+4^2+9^2\cdot 4^2$$

及引理 1，知断言成立；又当 $36\leqslant k\leqslant 42$ 时，则由

$$13^2=3^2+4^2+6^2+3\times(2^2+2\cdot 4^2)$$

及引理 1，知断言成立．

综合上述各种情况，即知对一切正整数 $k\leqslant 155$，都可将 $13^2=169$ 表示成 k 个正整数的平方之和．

c）我们来证明，如果 $S(n)=n^2-14$，则有 $S(2n)=(2n)^2-14$，其中 $n\geqslant 13$. 首先，对于任何正整数 $1\leqslant k\leqslant n^2-14$，都存在 k 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得

$$n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2,$$

因此也就有

$$(2n)^2=(2a_1)^2+(2a_2)^2+\cdots+(2a_k)^2,$$

可见对于这样的 k，$(2n)^2$ 都可以表示成 k 个正整数的平方之和.

其次，由于

$$(2n)^2=n^2+n^2+n^2+n^2,$$

故只要对 4 个 n^2 运用条件 $S(n)=n^2-14$，即知对任何正整数 $4\leqslant k\leqslant 4(n^2-14)$，都可以将 $(2n)^2$ 表示成 k 个正整数的平方之和.

最后，对于任何正整数 $4(n^2-14)\leqslant k\leqslant 4n^2-14$，则因当 $n\geqslant 13$ 时，有

$$4k\geqslant 16(n^2-14)=4n^2+2(6n^2-112)>(2n)^2$$

故由引理 2 立知，对于这样的 k，都可以将 $(2n)^2$ 表示成 k 个正整数的平方之和.

综合上述，即知对于 $n\geqslant 13$，只要有 $S(n)=n^2-14$，则必有 $S(2n)=(2n)^2-14$. 又因 b）中已证 $S(13)=13^2-14$，所以存在无限多个正整数 n，使得成立

$$S(n)=n^2-14.$$

（本题中，a）的解答取自罗炜的答卷，b）和 c）的解答基本上取自何斯迈的答卷）.

从命题的第一想法到命题

湖南平江三中 **黄仁寿**

近年来，命题研究已成为人们研究的一个热点．如何创作出难易恰当、有启发性和研究价值的优秀问题呢？文〔1〕指出："要有外界的刺激使人产生命题的第一想法，特别是正确而有意义的第一想法．"外界刺激是怎样使人产生命题第一想法的呢？又如何使第一想法转变为完善的命题？本文冒蛇足之讥，用下面几道例题说明这种创造活动的过程．

例 1 近期内，有文献从下面的角度探讨了"五点问题"的产生背景:

A．"面积为 1 的三角形中任给 9 点，则其中必存在这样 3 点，以它们为顶点可构成面积不大于 1／4 的三角形．

点数减少为 7，命题得到加强，变为:

B．"面积为 1 的三角形中任给 7 点，则其中必存在这样 3 点，以它们为顶点构成面积不大于 1／4 的三角形．"

点数继续减少为 5，命题进一步强化为:

C．（五点问题）"面积为 1 的三角形中任给 5 点，则其中必存在这样 3 点，以它们为顶点可构成面积不大于 1／4 的三角形．"

因此，我们可以认为产生"五点问题"的第一想法为：逐步减少点数，从而加强命题．从这个命题的第一想法到"五点问题"经过了艰难的探索过程（参考文〔2〕、〔3〕）．

文中均谈到"五点问题不能再改进了"．的确，点数继续减少为 4，结论是不能保持的，很容易举例为证（从略）．但能否

换一个新的角度比如着眼于结论中不大于 1／4 的三角形的个数改造结论呢？这又是一个命题的第一想法．或许由此想法能得到更深刻的命题．

先考察三角形中 5 点分布的一种极端情形 —— 有三点共线时:

若仅有三点 P_1、P_2、P_3 共线，则 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=0<1/4$，且 5 点的分布如图 1 或图 2 所示，很易知道必存在 4 点为顶点构成凸四边形，注意到文 [3] 中求解 “五点问题” 时给出的性质: “嵌入三角形中的凸四边形，必有三个顶点为顶点构成面积不大于原三角形面积的 1／4 的三角形” 可知，此情形中至少有两个三点组构成两个面积不大于 1／4 的三角形．

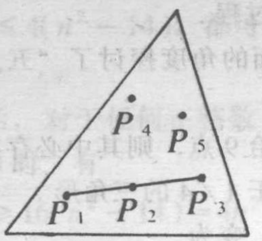


图1

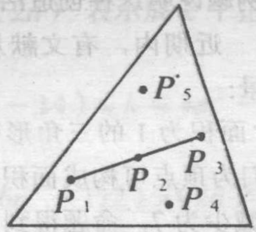


图2

若有两个或两个以上的共线三点组时，显然至少有两个三点组构成两个面积不大于 1／4 的三角形．

因此，对于 5 点中有三点共线的情形， “五点问题” 的结论是可改造的，改造后的结论或许对无三点共线时亦成立，即成立着下面的:

问题　面积为 1 的三角形中任给 5 点，则其中必存在两个三点组，分别以它们为顶点可构成两个面积不大于 1／4 的三角形．

下面试运用凸包理论给出证明:

当凸包为三角形时，不妨设此三角形即为$\triangle P_1P_2P_3$，过P_4、P_5的直线和P_1P_3及P_2P_3相交（图3），则四边形$P_1P_2P_4P_5$为凸四边形，必有三个顶点构成面积不大于$1/4$的三角形（理由同前，下同）.

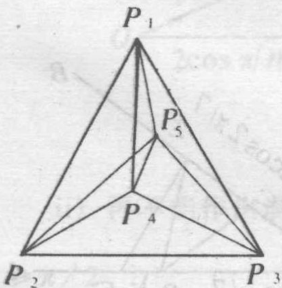


图3

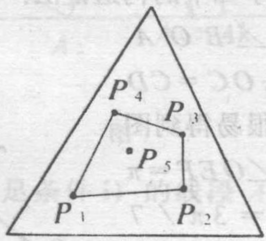


图4

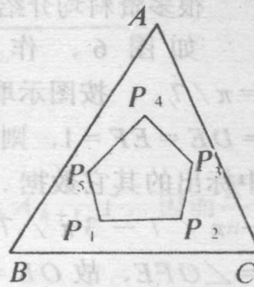


图5

若$S_{\triangle P_1P_2P_5}>1/4$，则$S_{\triangle P_1P_2P_5}+S_{\triangle P_1P_5P_3}+S_{\triangle P_4P_5P_3}+S_{\triangle P_2P_4P_3}<S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant 1$. 故$\triangle P_1P_2P_3$、$\triangle P_4P_5P_3$、$\triangle P_2P_4P_3$中还有一个的面积不大于$1/4$. 若$S_{\triangle P_1P_2P_5}\leqslant 1/4$，同理可证$\triangle P_1P_2P_4$、$\triangle P_4P_2P_3$、$\triangle P_4P_5P_3$、$\triangle P_1P_5P_3$中还有一个的面积不大于$1/4$.

当凸包为四边形时，不妨设5点的分布如图4，凸四边形$P_1P_2P_3P_4$中可找到三个顶点构成面积不大于$1/4$的三角形. 又$\triangle P_1P_2P_5$、$\triangle P_2P_3P_5$、$\triangle P_3P_4P_5$、$\triangle P_4P_1P_5$中必有一个的面积$\leqslant \frac{1}{4}S_{P_1P_2P_3P_4}<\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=1/4$.

当凸包为五边形时，则其中任何四顶点均可构成嵌入$\triangle ABC$中的凸四边形（图5），这样的凸四边形共有$C_5^4=5$个，因而不计重复时，必有5个面积不大于$1/4$的三角形. 又每个三角形至多重复$C_2^1=2$次. 故面积不大于$1/4$的三角形的个数$\geqslant 5/2>2$.