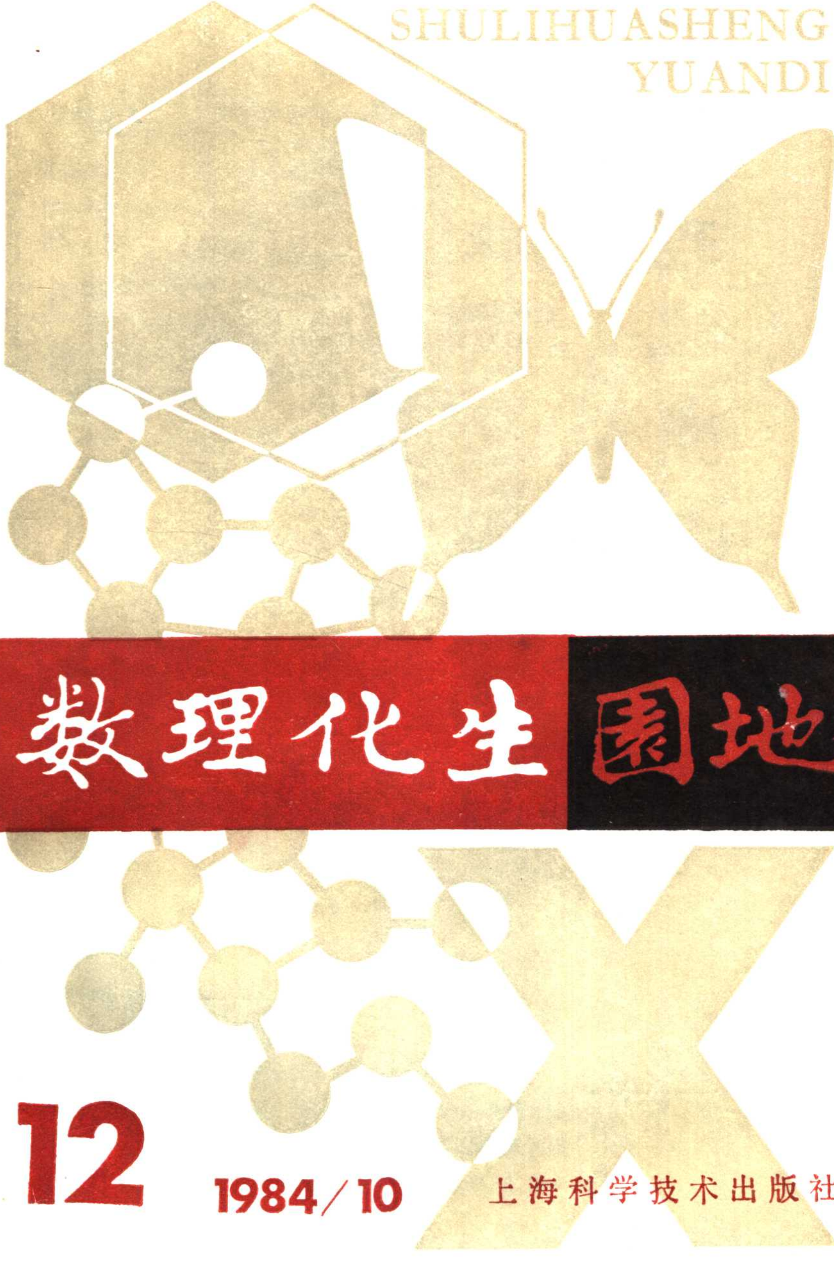
SHULIHUASHENG
YUANDI

数理化生园地



12

1984/10

上海科学技术出版社

数理化生园地

12

(1984/10)

上海商务印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行
(上海市瑞金二路四五〇号)
上海科学技术出版社出版

统一书号：13119·1213
定　　价：　0.20元

·学习辅导·
(1) 求极限的几种常用方法　王岳庭等
(4) 介绍几何学习中的一种思维方法——基本图形分析法　徐方瞿
(8) 谈谈力矩的概念　袁定一
(10) 波的形成　唐　蓉
(12) 这个化学方程式写"="还是"⇌"　杨洋天
·解题方法谈·
(14) 换元法的应用　肖柏荣
(19) 从 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 谈起　郑格于
(22) 边做题边归纳　黄志英
(24) 共点平衡力的解法　孙永鑫
(28) 归类比较　区分差别　刘鸿元
(31) 一题多解　启迪思维　姚崇孝
·防止搞错·
(33) "任何两个正整数必相等"吗？　邹一心
·问题解答·
(34) 甲烷能使高锰酸钾溶液退色吗　李梅标
·小论文选·
(36) 丝棉木金星尺蛾　吴　捷　张春燕
·观察与实验·
(39) 物理小实验两则　瞿贤毅等
(41) 有机混合物的分离　朱一平
(44) 从中草药里提取酸碱指示剂　程育德
·知识博览·
(46) 三角形的内角和与外角和　井　中
(49) 光源　宣桂鑫
(52) 化学家的寿命　徐忠麟
(54) 趣谈花粉　张丕方
·专题讲座·
(57) BASIC 算法语言讲座(二)　王念祖等
·科学俱乐部·
(64) 奇！又不奇　张　越

法

辅导

王岳庭（浙江师院） 汤德祥（宁波师专）

中学数学中常遇到求数列或函数的极限，除了应熟练应用极限的运算法则外，还应掌握一些求极限的常用方法。现介绍如下十二种方法：

（一）利用重要极限

我们知道，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$、$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 为两个最基本的重要极限，利用它们的结果，可以求某些函数的极限。

[例 1]　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin 7x}{4x-3\sin x}$.

解　$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\dfrac{\sin 7x}{7x}}{\dfrac{4}{7}-3\cdot\dfrac{\sin x}{7x}}=\frac{5}{\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{7}}=35$$

[例 2]　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+2}\right)^{3x+4}$.

解　$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x+2}\right)^{3x+4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{3x+2}{3}}\right)^{\frac{3x+2}{3}\cdot3}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{3x+2}\right)^{2}$$

$$=e^{3}\cdot1=e^{3}.$$

（二）换 元 法

某些函数的极限，直接求较困难，则可以通过换元转化为一些基本极限，或比较容易直接求得的极限来解决.

在 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 中，令 $y=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，有 $y\to 0$，即得：$\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$. 实际求极限时，也常可用它的结果. 上述例 2 的另一种解法，就可令 $y=\frac{3}{3x+2}$，于是有 $x=\frac{1}{y}-\frac{2}{3}$；$3x+4=\frac{3}{y}+2$. 当 $x\to\infty$ 时，显然 $y\to 0$.

$$\therefore\quad \text{原式}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{y}+2}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{y}}\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^2$$

$$=e^3\cdot 1=e^3.$$

（三）利用等价无穷小

在高中数学中，学过一些近似公式：当 $x\to 0$ 时，$e^x\sim 1+x$；$\ln(1+x)\sim x$；$(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$；$\sin x\sim x$；$\operatorname{tg} x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\operatorname{arc\,tg} x\sim x$.

这些近似公式，我们称它为等价无穷小. 利用它们，可以方便地求出某些极限.

[例 3] 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^\alpha}$.

解 直接利用当 $x\to 0$ 时 $\ln(1+x)\sim x$、$(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$，即有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\alpha x}=0.$$

[例 4] 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{2\arcsin x}$.

解 这里要利用当 $x\to 0$ 时，$\operatorname{tg} x\to 0$. 所以 $\ln(1+\operatorname{tg} x)\sim \operatorname{tg} x$. 而当 $x\to 0$ 时，$\operatorname{tg} x\sim x$、$\arcsin x\sim x$,

$$\therefore\quad 原式=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{2\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

（四）恒等变形法

通过分解因式等方法，约简分式，进行恒等变形，再求极限.

[例 5] 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-x-6}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{x+2}=-\dfrac{2}{5}$.

（五）利用有理化因子

在遇到无理式表达的函数时，可根据情况，对函数式的分母或分子有理化，再求极限.

[例 6] 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(e^x-1)}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{2(e^x-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{2x}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1.$$

[例 7] 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}.$$

(六) 递 推 法

有些数列是由递推关系式给出的，这时可用递推式来求出极限。

[例 8] 设数列 $\{a_n\}$ 具有关系：

$$a_n=4+\frac{1}{3}a_{n-1}, \quad (n=2, 3, \cdots)$$

并假定 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，所以，对 $a_n=4+\frac{1}{3}a_{n-1}$ 两边取极限 $(n\to\infty)$，并令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}=\alpha$，得

$$\alpha=4+\frac{1}{3}\alpha, \quad \therefore \quad \alpha=6.$$

即
$$\lim_{n\to\infty} a_n=6.$$

(待续)

介绍几何学习中的一种思维方法

——基本图形分析法

徐方瞿 (上海市杨浦区教育学院)

平面几何是一门研究图形性质的数学学科，要揭示几何问题在分析方法和思想方法上的规律性，就一定要通过对图形的研究，特别是对图形进行分解和组合以后，才能完成。

通过研究，我们不难发现一个几何图形，不论其怎样复杂，都可以看作是一个或若干个最简单、最基本、最重要的可以被称为基本图形的图形组合而成。

[例1] 已知：$\triangle ABC$中，$\angle ABC=2\angle C$．AD是边BC上的高，延长AB到E，使$BE=BD$，ED的延长线交AC于F(如图1)．

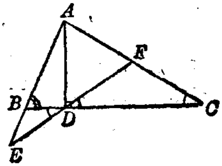


图 1

求证：$AF=CF$．

分析：在这个问题中，由$BE=BD$和应证明F是$\mathrm{Rt}\triangle ACD$的斜边的中点，很容易就可发现这个图形是由等腰三角形和直角三角形斜边上的中线这样两个基本图形组合而成的．应用这两个基本图形的性质可得：要证明$AF=CF$，应转而证明它的等价性质$\angle C=\angle FDC$，而$\angle FDC=\angle BDE$，且$\angle ABC=2\angle BDE$，由已知$\angle ABC=2\angle C$，所以$\angle C=\angle FDC$，$AF=CF$．

象这样一种根据问题的条件和结论，分析并找到组成这个问题的一个或若干个基本图形，再应用这些基本图形的性质，使问题得到解决的分析方法就叫做基本图形分析法．

几何问题中的基本图形一共有二十多个，对每一个基本图形，十分重要的是要找到它的应用条件和应用方法，也就是要搞清楚每一个基本图形应在什么情况下应用以及怎样应用(如添加辅助线等)．例如直角三角形斜边上的中线这个基本图形应在出现直角三角形斜边上的中点或者出现两条线段之间的倍半关系，且这种倍半关系是和一个直角三角形的斜边相联系时才应用．应用或添线的方法是添加直角三角形斜边上的中线．

[例2] 已知：$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AD是BC上的高，BE是角平

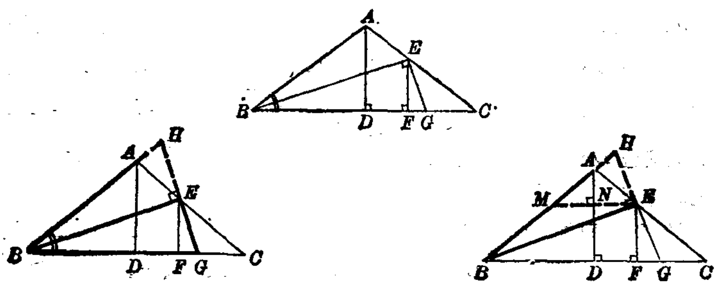


图 2

分线，$EF\perp BC$，垂足 F，$EG\perp BE$，EG 交 BC 于 G.

求证：$DF=\frac{1}{4}BG$.

分析：由 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线和 GE 是向角平分线所作的垂线，就可应用等腰三角形这个基本图形进行证明．应用的方法是将角平分线的垂线与角的两边相交得到等腰三角形．于是延长 GE 交 BA 的延长线于 H．那末通过 $\triangle BGE$ 与 $\triangle BHE$ 全等，就可证得 $BG=BH$，$EG=EH$．这样问题就转化为应证 $DF=\frac{1}{4}BH$.

上述性质可以看作是两条线段之间的倍半关系：

$$\frac{1}{4}BH=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BH\right),$$

而 BH 是直角 $\triangle BHE$ 的斜边，所以可应用直角三角形斜边上中线的基本图形进行证明．应用的方法是将斜边上的中线添上，于是取 BH 的中点 M，并连结 EM．这样就可得 $EM=\frac{1}{2}BH$．问题又转化成要证 $DF=\frac{1}{2}EM$.

现在图形中出现了 M、E，分别是 BH、GH 的中点，是多个中点问题，这样又可以应用三角形中位线的基本图形的性质进行证明．由于中点 M 和 E 所在的线段 BH、GH 有公共端点 H，可以组成三角形，所以 EM 这两个中点的连线就是三角形的中位线，从而可得 $EM\parallel BG$，$EM=\frac{1}{2}BG$.

进一步由 $EM\parallel BG$，又可得 EM 也是 $\triangle ABC$ 中 BC 的平行线，所以又可应用平行线型的相似三角形进行证明，也就是由 $EM\parallel BC$，就可得 $\triangle AME\backsim\triangle ABC$．而 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，所以 $\triangle AME$ 也是等腰三角形．又因为 $AD\perp BC$，那末又可得 $AD\perp EM$，若垂足设为 N，则应用等腰三角形中重要线段的基本图形的性质，又可得 $EN=MN=\frac{1}{2}EM$，至此又应证 $DF=EN$．显然由 $\angle EFD=\angle FDN=\angle DNE=90°$，就可以完成分析．

［例 3］ 已知：C 是以 AB 为直径的半圆上的一点，$CD\perp AB$ 垂足是 D，$\odot O'$ 与半圆内切于 E，与 AB、CD 分别相切于 G、F.

求证：$AC=AG$.

分析：由条件 AB 是半圆的直径，所以可应用直径的性质或者也就是半圆上的圆周角的基本图形的性质进行证明．现在图形中有半圆上的点 C、E，而没有圆周角，所以可将圆周角添上，也就是连结 BC、AE、BE 后，可得 $\angle ACB=\angle AEB=90^\circ$．

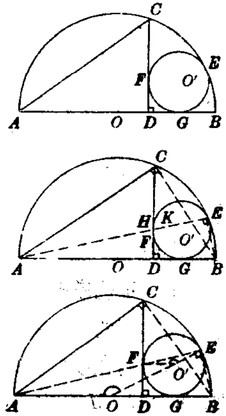


图 3

又因为已知 $CD\perp AB$，所以应用直角三角形斜边上的高这个基本图形的性质可得 $AC^2=AD\cdot AB$．那末问题可转化成为要证 $AG^2=AD\cdot AB$．

由条件 $CD\perp AB$，如设 AE 交 CD 于 H，则可得 H、D、B、E 四点共圆，$AD\cdot AB=AH\cdot AE$．这样又应证 $AG^2=AH\cdot AE$．

又因为 AG 与 $\odot O'$ 相切于 G，AE 是 $\odot O'$ 的割线，所以设 AE 交 $\odot O'$ 于 K 后，又可得 $AG^2=AK\cdot AE$．这样由 $AH\cdot AE=AK\cdot AE$，可知 H 和 K 应重合于一点，也就是 $\odot O'$ 与 CD 的切点 F．这样问题就是要证 A、F、E 三点成一直线．

因为 $\odot O'$ 与半圆内切于 E，应用两圆内切的性质，可得 O、O'、E 成一直线，于是连结 OO'，并延长 OO'，则 OO' 的延长线必定经过 E．而由 $OA=OE$，这是两条具有公共端点的相等线段，它们就组成一个等腰三角形．另一方面，由 CD 与 $\odot O'$ 相切于 F，则应用切线的性质，连结 $O'F$ 后，可得 $O'F\perp CD$，而 $O'F=O'E$ 也是两条具有公共端点的相等线段，也可组成等腰三角形，于是连结 EF，得 $\triangle O'EF$ 是等腰三角形．又因为 $O'F\perp CD$，$BA\perp CD$，可得 $O'F\parallel OA$，所以 $\angle AOE=\angle FO'E$，这样上述两个等腰三角形的顶角就相等，那末它们的底角也就必定相等．也就是 $\angle OEA=\angle O'EF$，所以 EF 和 EA 重合，分析就可以完成．

应用基本图形分析法后，我们就可以看到几何问题中添辅助线是有规律的，而这种规律性是可以掌握的，这样平面几何也就一定是能够学好．

谈谈力矩的概念

袁定一　(上海市复兴中学，特级教师)

不能作为质点来考虑的静止物体在受到力的作用时，不仅会出现平动，还可能发生转动．力矩是为了研究物体受力作用后产生转动效果而引出的物理量．在中学阶段，必须理解和掌握以下三方面的内容．

一、正确掌握力矩概念的关键是对力臂概念的理解　中学阶段是这样定义力矩的：力和力臂的乘积叫做力对转轴的力矩，表达式为 $M=FL$，F 表示作用在物体上的力，L 是从物体的转动轴到力的作用线的垂直距离，即力臂，M 是力 F 对转轴的力矩．

要确定力的力矩，首先要确定转轴，然后找出从转轴到力的作用线的垂直距离——力臂．有明显固定转动轴的物体，如：门、窗(它们的转动轴就是绞链轴)，实验时使用的力矩盘(它的转轴一般都在盘的圆心)，天平(它的转轴是横梁中央的刀口)，杆秤(它的转轴是系提纽的位置)等，作用力的力臂就是从转动轴(作平面图时常用点来表示)到该力作用线的垂直距离(有时需要延长作用线才能画出垂直距离)．也有些物体的转轴虽不明显，但通过简单的分析便可确定．如把一根米尺放在水平桌面上，米尺的一部分(小于米尺长度的二分之一)伸出在桌面外，在伸出端挂质量为 m 的重物(图 1)，这时米尺仍处于水平状态．求重物使米尺转动的力矩．如果一时不能判断出转轴的位置，可以应用你的小木尺或铅笔做一次实验，用手指

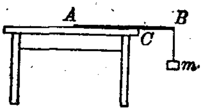


图　1

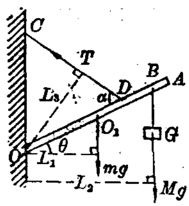


图　2

下压伸出在桌外米尺的一端来代替重物的作用，就能观察到，当压力达到一定值时，米尺将以它和桌子边沿的接触线（即图中的 C 点）为转轴发生转动．一旦确定了转轴，就能顺利地求出力臂．

图 2 中 OA 是一根质量为 m 直杆，由铰链和墙联接，O_1 是直杆的重心．CD 是一根钢索，使直杆和水平夹角为 θ，钢索和直杆间夹角是 α．在 B 处挂一个质量为 M 的重物 G，求钢索 CD 对直杆的作用力．以直杆 OA 作为研究对象，它的 O、O_1、D、B 各点都受到力的作用，O 点也是铰链轴，如果没有钢索，直杆将以 O 为转轴产生转动．因此可以取 O 作为直杆的转轴．由于作用在直杆 O 点上的力的力臂为零，所以其力矩也一定是零．直杆本身重力对 O 点的力矩 $M_1=mg\cdot L_1=mg\cdot\overline{OO_1}\cos\theta$；重物 G 对 O 点的力矩 $M_2=M_gL_2=M_g\cdot\overline{OB}\cos\theta$；钢索对直杆的作用力是沿着 DC 方向的拉力，用 T 表示，T 对 O 点的力矩 $M_T=TL_3=T\cdot\overline{OD}\sin\alpha$．根据力矩平衡概念列出方程，就能求出 T．

二、力矩的方向 在中学阶段，只研究力的作用线在同一平面里称为平面力系的力矩．当我们面对转动物体时，力矩使物体转动的方向只有两个，向右转动跟钟表指针转动的方向相同的称为顺时针方向转动；向左转动跟钟表指针转动方向相反的称为逆时针方向转动．因此，规定了使物体向某一方向转动的力矩为正，则向相反方向转动的力矩就为负．一般取逆时针方向为正．

必须注意，力矩使物体转动的方向跟力的方向不是一会事．如图 3 中 F_1 和 F_2 这两个力的方向相同，但对转轴 O 的力矩使物体转动的方向却相反；F_1 和 F_3 两个力的方向相反，却能使物体得到相同的转动方向．所以不仅要分析作用力的方向，更要根据转轴的位置来确定该力使物体向什么方向转动．

图 3

中学阶段没有明确提出力矩是矢量的概念，也没有介绍力矩矢量的方向．同学们不要把使物体转动的方向（通常解说成力矩的方向）理解为就是力矩矢量的方向．它们之间既有联系，又有区别．这里就不作介绍了．

三、力矩是使物体转动状态改变的原因 力是使物体运动状态改变的原因，不是维持物体运动状态的因素．力矩是使物体转动状态改变的原

因，不是维持转动的因素．通常说：力矩使物体转动，是指原来静止的物体，在某一力矩作用下，由静止开始转动．要使转动减慢甚至停止，必须对转动物体施加一个相反的力矩．如果物体保持静止或保持转动的快慢不变作匀速转动，我们就说物体处于平衡状态．处于平衡状态的物体，从平动的角度讲，它满足合力等于零的条件；从转动的角度讲，它一定满足合力矩为零的条件．对于平面力系，就是作用在物体上的各个力矩的代数和等于零．可用式 $\Sigma M_{顺}+\Sigma M_{逆}=0$ 表示，其中 $\Sigma M_{顺}$ 是使物体顺时针方向转动的各力矩的和，$\Sigma M_{逆}$ 是使物体逆时针方向转动的各力矩的和．普遍式用 $\Sigma M=0$ 表示．上面图 2 的例子就可以用这一概念来求出钢索的拉力 T．

若 $\Sigma M\neq 0$，则物体的转动状态必定要改变．当 $\Sigma M>0$ 时，表示跟规定的转动正方向一致，转动将加快；$\Sigma M<0$ 时，则与规定的转动正方向相反，转动将减慢或向相反方向转动．

有兴趣的同学可作深入一步的探讨：处于平衡状态的物体对通过某一点的转轴的合力矩等于零，对通过其他点的转轴的合力矩是不是也为零呢？分析时不能忘记你原来选为转轴处的作用力对新转轴的力矩．

波的形成

唐　蓉（上海市黄浦区教育学院）

把一根绳的一端固定，另一端用手向上抖动一下，会看到一个沿着绳子传播的凸起的波形；如果手不停地上下抖动，就会看到一连串的“峰”和“谷”在绳上移动．将一根软而轻的弹簧水平地悬挂起来，用手在一端压缩一下弹簧，就有疏密相间的状态沿弹簧传播开来．这些振动在媒质中的传播现象叫做波．波是怎样形成的呢？

不妨作个比喻，有一组同学，手都伸直地相互拉紧，排成一直线．现第一位同学不断地做下蹲和起立运动，当他下蹲起立时，必然要拉第二位同学，迫使第二位同学也要作下蹲和起立运动，只是这些动作略比第一位同学迟一些．同样，第二位同学影响第三位同学，第三位同学又影响第四位同学……一直到最后一位同学，他们都要作下蹲起立"运动"，只不过各自完成的动作都略比前者晚一些，于是就形成了"此起彼伏"的波动现象了．很明显，每位同学(相当于波动中的质点)都在原地做下蹲和起立运动(相当于质点在其平衡位置作周期性的振动)，本人并没有跑到其他地方去(即作振动的质点并没有迁移)，后面同学的运动状态是"紧跟"着前面一位的(即每个振动的质点在步调上都要比其先前开始振动的质点落后些)．第一位同学(相当于振源)把运动形式(即振动)传递到最后一位同学，使原来是静止的最后一位同学也被迫运动(所以波动中传播的只是振动状态，波是传递能量的一种方式)．凡是振动方向与波的传播方向相垂直的波叫横波．

如果还是这一组同学，仍然排成队．当第一位同学在原来位置附近左右运动时，则向第二位同学靠近和疏远，并通过两者之间手的相互作用力，迫使第二位同学也作左右运动．不用多说，经过一段时间，每位同学都会在自己原来的位置上随其前面一位同学而作左右运动，不过也要相应迟一点．只要第一位同学不停地作此周期性的运动，整队同学便会一直跟随下去，于是便形成了交替出现的"此紧彼松"的波动现象．与此相仿，振源的振动方向与其传播方向一致的疏密波，就是我们常说的纵波．

是否有振源振动就一定能形成波呢?不是的．如这组同学的手都不拉起来，则无论第一位同学如何运动，其他同学都不受到力的作用，便不会跟随着运动．由此可见，波动的形成，除了要有振源外，各个质点之间须依靠具有弹性力互相连系着的弹性媒质．如绳子可以看作是一连串相互联系着的质点，绳子平衡时是成一条直线，这些质点在张力的作用下互相拉紧．如果此时媒质中有一质点 A 受外力作用而离开平衡位置，它周围的质点对它将产生弹力，驱使 A 回到平衡位置；同时 A 点邻近的质点也受到质点 A 的弹力作用，迫使它们也离开平衡位置振动起来．所以媒质中一个质点的振动会引起邻近质点的振动，邻近质点的振动又引起较远质点的振动，

只要有外力不断地使 A 点振动，那么此振动就会以一定的速度由近及远的传播开去，形成机械波。

横波只能在固体中传播．因为某一质点振动时要带动邻近质点也作上下振动，所以媒质必须有切变弹性力存在．由于任何两层液体或气体之间是没有切变弹性力的，所以在液体或气体中便无法传播横波．相反在形成纵波时，某质点作左右振动，引起邻近质点的左右振动，所以媒质中必须有体变弹性力存在．而固体、液体和气体都具有体变弹性力，所以它们都能传播纵波．

振动传播的速度叫做波速，它的大小取决于媒质的性质．如绳子的张力越大，即每个质点带动下一质点的力越大，下一个质点"紧跟"得也越快，振动传播得也就越快，所以波速也愈大．须知质点振动的速度（频率）与波动的速度是完全不同的．波动中各质点都在作受迫振动，它们的频率都等于波源的振动频率，所以波动中的频率是不变的．但同一机械波在通过不同的媒质时，波速是不同的．波长、波速和频率之间的关系为 $v=\lambda f$．

波是传递能量的一种方式，原来静止的质点随振源而振动起来说明它们获得了能量．波动中每一质点在其平衡位置时动能和势能均为最大（这一点与作简谐振动的弹簧振子不同）．波动可看作是许多质点（以一定的位相关系）进行的集体振动，所以波的能量就是各质点能量（动能和势能）的总和．

作简谐振动的物体，可用振动图线将它在某一位置上的位移随时间变化的情况"记录"下来．同样我们也可以将波动情况"记录"下来，但是，波动图线是反映某一时刻各质点的振动处于什么位置，所以它是表示某一时刻媒质中各质点离开平衡位置的情况．这一点请不要与振动图线混淆．

这个化学方程式写"="还是"$\rightleftharpoons$"

杨洋夫（上海市浦明中学）

把 NH_3 通入 CH_3COOH 溶液里，反应产生 CH_3COONH_4；CH_3COONH_4 在溶液中会水解，产生 CH_3COOH 和 $NH_3 \cdot H_2O$．这个化学反应方程式应该用"="，还是用"$\rightleftharpoons$"表示？要明确这个问题，首先要

知道“=”和“$\rightleftharpoons$”各自的含义.

“=”的含义 化学方程式中的“=”不同于数学等式中的“=”，它具有特殊的化学意义．主要有：(1)“=”左边反应物消耗的质量等于右边物质生成的质量．(2)“=”两边的物质微粒符号不能随意移到“=”另一边．(3)“=”意味着化学方程式左边的物质变成了右边的物质，反应自左向右进行．“=”可读作“生成了”、“变成了”、“完全电离成”等．例如：$NaCl=Na^{+}+Cl^{-}$ 可读作氯化钠完全电离成钠离子和氯离子.

“$\rightleftharpoons$”的含义 (1)“$\rightleftharpoons$”左边和右边的符号所代表的物质微粒在平衡体系中共存．例如：在 $CH_3COOH \rightleftharpoons CH_3COO^{-}+H^{+}$ 醋酸电离平衡体系中，CH_3COOH、CH_3COO^{-}、H^{+} 三种微粒共存．(2)“$\rightleftharpoons$”表示正、逆反应同时进行，所达到的平衡是动态平衡．例如：$FeCl_3+3H_2O \rightleftharpoons Fe(OH)_3+3HCl$，盐的水解和中和反应同时进行，水解平衡是动态平衡．(3)用“$\rightleftharpoons$”连成的方程式，一般可认为从左到右的过程是一个“弱”过程，也就是化学方程式左边的物质只有一部分发生反应，变成右边的物质．例如：$CO_3^{2-}+H_2O \rightleftharpoons HCO_3^{-}+OH^{-}$，溶液中只有少部分 CO_3^{2-} 水解.

明白了“=”和“$\rightleftharpoons$”的意义，就可以正确选用“=”和“$\rightleftharpoons$”．概括地说，凡是要表明和强调反应是一个平衡体系的化学方程式应该用“$\rightleftharpoons$”．例如：

表示弱电解质电离平衡

$$NH_3\cdot H_2O \rightleftharpoons NH_4^{+}+OH^{-};$$

表示络离子电离平衡

$$[Cu(NH_3)_4]^{2+} \rightleftharpoons Cu^{2+}+4NH_3;$$

表示盐类水解平衡

$$Al^{3+}+3H_3O \rightleftharpoons Al(OH)_3+3H^{+};$$

表示可逆反应达到化学平衡

$$N_2+3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$$

反之，如果要强调表明化学反应的进行及其反应生成物时，我们都用“=”．因此，对于 NH_3 和 CH_3COOH 的反应，如要表明反应的进行，当然应使用“=”；如果要强调它是一个平衡体系，强调平衡时的几种物质时，应该使用“$\rightleftharpoons$”.

解题方法谈

换元法的应用

肖柏荣 （南京市第廿九中学）

换元法是数学中一种常用的方法，它通过引入新的辅助未知数，可以变更问题，使之化难为易．它的应用方面很多，例如，在化简、解方程(组)、证恒等式与不等式、求函数极值等方面都有应用．下面结合例子，说明这些方面的应用以及应用中的若干技巧．

（一）化　　简

［例 1］ 化简 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\csc^2 x}}}$.

解 此题除用同角三角函数关系化简之外，还可令 $y=\csc x$，将三角式的化简转化为代数式的化简问题．

$$\therefore\ 原式=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-y^2}}}=\frac{1}{1-\dfrac{1-y^2}{-y^2}}=\frac{y^2}{y^2+1-y^2}$$

$$=y^2=\csc^2 x.$$

［例 2］ 化简 $\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+\dfrac{2x^2}{\sqrt{x}}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\dfrac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}$.

解 直接进行计算比较复杂，易造成计算错误．引入辅助未知数 $p=\sqrt{x}$、$q=\sqrt{y}$，化去根号，即可转化为有理式的化简问题．

$$原式=\frac{(p-q)^3+\dfrac{2p^4}{p}+q^3}{p^3+q^3}+\frac{3pq-3q^2}{p^2-q^2}$$

$$=\frac{3p(p^2-pq+q^2)}{(p+q)(p^2-pq+q^2)}+\frac{3q(p-q)}{(p+q)(p-q)}$$

$$=\frac{3p+3q}{p+q}=3.$$

（二）解方程（组）

［例 3］ 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y}=2, \\ \dfrac{xyz}{y+z}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xyz}{z+x}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

解 只要将各方程两边分子、分母颠倒，使左边都分成两个分式的和（这是应用换元法的重要一着），原方程组即可化为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

令 $u=\dfrac{1}{xy}$、$v=\dfrac{1}{yz}$、$w=\dfrac{1}{zx}$，可将分式方程组转化为整式方程组

$$\begin{cases} v+w=\dfrac{1}{2}, \\ w+u=\dfrac{5}{6}, \\ u+v=\dfrac{2}{3}. \end{cases} \quad \text{则得} \quad \begin{cases} u=\dfrac{1}{2}, \\ v=\dfrac{1}{6}, \\ w=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

进而解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=-3. \end{cases}$（均适合原方程）

［例 4］ 解方程 $(\sqrt[3]{x+1}-1)^4+(\sqrt[3]{x+1}-3)^4=16$.

解 令 $y=\sqrt[3]{x+1}-2$，则有

$$(y+1)^4+(y-1)^4=16.$$

$$y^4+4y^3+6y^2+4y+1+y^4-4y^3+6y^2-4y+1=16.$$

$$y^4+6y^2-7=0.\ \text{（以下略）}$$

由上过程（奇次项全部抵消）可见，把 $\sqrt[3]{x+1}-2$ 设为 y 比将题中两括号内的任何一个设为 y 都好。