工程数学习题解答

（上　册）

（线性代数部分）

上海业余工业大学高数教研室
上海电视大学高数中心组　编

浙江省广播电视大学印

工程数学习题解答

（上 册）

（线性代数部分）

上 海 电 视 大 学
上海市工业业余大学 编

前　　言

根据中央广播电视大学教学计划，一九八〇年春季开设工程数学，为配合电视大学师生的教学需要，我们两校合编一套工程数学习题解答，取材主要根据中央广播电视大学选用教材同时辅以一定数量的补充题。本书分上中下三册，上册为“线性代学”，中册第一篇“复变函数”，第二篇“矢量分析与场论”，下册包括“概率论与数理统计”，“积分变换”，“算法语言与计算方法”，“数理方程”等。

上册选用武汉大学数学系数学专业编的“线性代学”，中册第一篇选用伦兹与艾利斯哥尔茨等编的“复变函数与运算微积初步”，及西安交大高等数学教研组编的“复变函数”等，第二篇选用重庆大学谢树艺编的“矢量分析与场论”等，下册内容也将以中央广播电视大学选用教材为准。由于各本教材编目不同，所以各篇编目也不同，请读者鉴谅。

时间仓促，水平有限，错误和不妥之处一定不少，欢迎广大读者批评指出。

编　者

目　　录

补充题目录

线性代数

第一章 行列式

§1 行列式的概念

1. 试用行列式解方程：

① $\begin{cases} x\mathrm{tg}\alpha + y = \sin(\alpha+\beta) \\ x - y\mathrm{tg}\alpha = \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$

解： $D = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}\alpha & 1 \\ 1 & -\mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix} = -(1+\mathrm{tg}^2\alpha) = -\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$D_x = \begin{vmatrix} \sin(\alpha+\beta) & 1 \\ \cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{tg}\alpha \end{vmatrix} = -[\sin(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{tg}\alpha+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$= -\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}\alpha & \sin(\alpha+\beta) \\ 1 & \cos(\alpha+\beta) \end{vmatrix} = \cos(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{tg}\alpha - \sin(\alpha+\beta)$$

$$= -\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

所以 $x = \dfrac{D_x}{D} = \cos\alpha\cos\beta$ $\qquad y = \dfrac{D_y}{D} = \cos\alpha\sin\beta$

② $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\omega y+\omega^2 z=\omega \\ x+\omega^2 y+\omega z=\omega^2 \end{cases}$ 其中ω是1的虚立方根

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \qquad D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}=D \qquad D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix}=0$$

所以 $x=\dfrac{D_x}{D}=0 \qquad y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{D}{D}=1 \qquad z=\dfrac{D_z}{D}=0$

2．写出4阶行列式中所有带负号并包括含因子$a_{11}a_{23}$的项。

解：4阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

含$a_{11}a_{23}$的一般项是$\pm a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4q}$

其中p和q是2、4的所有排列 可以$p=2$，$q=4$或$p=4$，$q=2$，所以含$a_{11}a_{23}$的项有两个，而带负号的是$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$

3．用行列式的定义，计算：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解：五阶行列式中任一项为$\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$其中$p_3$，$p_4$，$p_5$最少有一个数取3，4，5中某一个即任何一项内最少有一个零因子，因此行列式的值为零。

4．在一个n阶行列式中等于零的元如果比n^2-n还多，那末此行列式等于零。为什么？

答：此行列式共有n^2个元素，而不为零的元素比$n^2-(n^2-n)=n$还少，而行列式展开中每项包含n个元素，每项为零，可知行列式等于零。

5．行列式中任一项的各元是否可以用互换两行或两列把它移到新行列式的主对角线上？

答：因为任何一项含有n个元素，它们在不同的行，不同的列。所以经过行和列的互换，可以使n个元素移到新行列式的主对角线上。

6．假如把行列式中每项的n个元移到次对角线上是否也能得出它的符号规律？

答：由行列式定义中展开式中每项的符号是由互换两行或两列把项中n个元素移到新行列式的主对角线上。互换次数的奇偶来决定正负。而把主对角线上各元素移至次对角线上需要互换$\frac{n\times(n-1)}{2}$次。因此可以由互换两行或两列而移至次对角线上的次数加上$\frac{n\times(n-1)}{2}$，它们的奇偶性来决定正负。

§2 行列式的基本性质

1、计算行列式

① $$\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&5&-1\\0&1&5&6\\1&0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&0&7\\1&0&3&3\end{vmatrix}$$

$\times(-2)$　$\times(-1)$　　　$\times(-5)$　$\times 1$

$$=(-1)\times\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&7&0\\1&0&3&3\end{vmatrix}=-21$$

② $$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-2&0&0\\1&0&-2&0\\1&0&0&-2\end{vmatrix}=(-2)^3=-8$$

$\times(-1)$

同样2，3，4行，各自减去第一行亦可以。

③ $$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\3&0&1&1\\3&1&0&1\\3&1&1&0\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$$

$\times 1$　$\times 1$　$\times 1$　　　$\times(-1)$

$$=3\times\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{vmatrix}=-3$$

同样1，2，3行加至第4行亦可以。

④
$$\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}\begin{matrix}\times1\\\times1\\\end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\1&1&1\end{vmatrix}\times(-2b)\quad\times(-2a)$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}-a-b-c&0&0\\0&-a-b-c&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(a+b+c)^3$$

⑤
$$\begin{vmatrix}1&3&3&\cdots&3\\3&2&3&\cdots&3\\3&3&3&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\3&3&3&\cdots&n\end{vmatrix}\text{各行减去第三行}$$

$$=\begin{vmatrix}-2&0&0&\cdots&0\\0&-1&0&\cdots&0\\3&3&3&\cdots&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-3\end{vmatrix}\text{各列减去第三列}$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-3) \end{vmatrix} = (-2)\times(-1)\times 3\times 1\times 2\cdots\times(n-2)$$

$$= 6\times(n-3)!$$

⑥
$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \quad \times(-1) \quad \times(-1) \quad \times(-1)$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$\times(-1) \qquad\qquad\qquad \times(1)$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & b & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -a(a-b)^3 = a(b-a)^3$$

2．证明下列两式

①
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$$

证：$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+3c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$ 逐次用后行减去前行有

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

② $\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$

证：$\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bx & by & bz \\ bz & bx & by \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix} by & bz & ay \\ bx & by & ax \\ bz & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & bx \\ bx & az & bz \\ bz & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & ay \\ bx & az & ax \\ bz & ay & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & bz & bx \\ ay & by & bz \\ ax & bx & by \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} az & bz & ay \\ ay & by & ax \\ ax & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & bx \\ ay & az & bz \\ ax & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & ay \\ ay & az & ax \\ ax & ay & az \end{vmatrix} = b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$+0+0+0+0+0+0+a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}+b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$+a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

3．行列式A中每个数a_{ij}分别用b^{i-j}（$b\neq 0$）去乘，问得到的行列式是否与A一致？

答：$\begin{vmatrix} b^{1-1}a_{11}, & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ \vdots & & \cdots \\ b^{n-1}a_{n1} & \cdots & b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix}=b^1\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11}\cdots b^{-n}a_{1n} \\ \vdots \\ b^{n-1}a_{n1}\cdots b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\cdots=b^{1+2+\cdots+n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11}\cdots b^{-n}a_{1n} \\ \vdots \\ b^{-1}a_{n1}\cdots b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=b^{1+2+\cdots+n}\cdot b^{-1}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots b^{-n}a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=b^{1+2+\cdots+n}\cdot b^{-1-2-\cdots-n}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=A$$

是与A一致的。

4．证明

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

证：
$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{d}{dt}(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33})$$

$$=[(a'_{21}a_{22}a_{33}+a_{11}a'_{22}a_{33}+a_{11}a_{22}a'_{33})+(a'_{21}a_{32}a_{13}$$
$$+a_{21}a'_{32}a_{13}+a_{21}a_{32}a'_{12})+(a'_{31}a_{12}a_{23}+a_{31}a'_{12}a_{23}$$
$$+a_{31}a_{12}a'_{23})-(a'_{13}a_{22}a_{31}+a_{13}a'_{22}a_{31}+a_{13}a_{22}a'_{31})$$
$$-(a'_{23}a_{32}a_{11}+a_{23}a'_{32}a_{11}+a_{23}a_{32}a'_{11})-(a'_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+a_{12}a'_{21}a_{33}+a_{12}a_{21}a'_{33})]=[a'_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a'_{13}$$
$$+a_{31}a'_{12}a_{23}+a'_{13}a_{22}a_{31}+a_{23}a_{32}a'_{11}-a'_{12}a_{21}a_{33}]$$
$$+[a_{11}a'_{22}a_{33}+a'_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a'_{23}-a_{13}a'_{22}a_{31}$$
$$-a'_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a'_{21}a_{33}]+[a_{11}a_{22}a'_{33}+a_{21}a'_{32}a_{13}$$
$$+a'_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a'_{31}+a_{23}a'_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a'_{33}]$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}$$

§3 行列式的计算

1．计算行列式：

② $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&0&-3&-19\\0&0&0&34\\0&1&1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&-3\\0&0&-3&-19\\0&0&0&34\end{vmatrix}=34\times(-3)=-102$$

② $$\begin{vmatrix}x&a&b&o&c\\o&y&o&o&d\\o&c&z&o&f\\g&h&k&u&l\\o&o&o&o&v\end{vmatrix}=v\begin{vmatrix}x&a&b&o\\o&y&o&o\\o&c&z&o\\g&h&k&u\end{vmatrix}=uv\begin{vmatrix}x&a&b\\o&y&o\\o&c&z\end{vmatrix}$$

$$=xuv\begin{vmatrix}y&o\\c&z\end{vmatrix}=xyzu\,v$$

③ $$\begin{vmatrix}7&6&5&4&3&2\\9&7&8&9&4&3\\7&4&9&7&0&0\\5&3&6&1&0&0\\0&0&5&6&0&0\\0&0&6&8&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}\times(-1)^{(1+2)+(5+6)}$$

$$\times\begin{vmatrix}7&4&9&7\\5&3&6&1\\0&0&5&6\\0&0&6&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}7&4\\5&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}5&6\\6&8\end{vmatrix}=40-36=4$$

④ $$\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0&1\\0&a&0&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&o\\\cdots&&\cdots&&&\cdots\\0&0&0&\cdots&a&0\\1&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a&0&0&\cdots&0&1\\0&a&0&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a&0\\1+a&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (1+a)\cdot a^{n-2}\cdot(a-1)$$

$$=(a^2-1)\cdot a^{n-2}$$

2．证明n阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

证：用x乘第n列加到第$n-1$列，再用x乘第$n-1$列加到第$n-2$列，…直到用x乘第2列加到第1列

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & x^2+a_1x+a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & -1 \\ a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & -1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -1 \\
x^n - a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n & x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1} & \cdots & x+a_1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(x^n+a_1x^{n-1}-\cdots+a_{n-1}x+a_n)\cdot(-1)^{n+1}\cdot\begin{vmatrix}
-1 & & \\
 & \ddots & \\
 & & -1
\end{vmatrix}
$$

$$
=(x^n+a_1x^{n-1}-\cdots+a_{n-1}x+a_n)\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}
$$

$$
=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n
$$

3．试用拉普拉斯定理计算：

①
$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & \omega & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\
a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\
a_2 & b_2 & 1 & \omega^2 & c_2 & \omega \\
a_3 & b_3 & 1 & \omega & c_3 & \omega^2 \\
1 & \omega_2 & 0 & 0 & \omega & 0
\end{vmatrix}
$$
这里 ω 是1的虚立方根

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & 1 & \omega^2 & \omega \\
a_3 & b_3 & c_3 & 1 & \omega & \omega^2 \\
1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 \\
a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 1 & 1 \\
a_3 & b_3 & c_3 & 1 & \omega & \omega^2 \\
a_2 & b_2 & c_2 & 1 & \omega^2 & \omega
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \\
1 & \omega & \omega^2 \\
1 & \omega^2 & \omega
\end{vmatrix}^2
$$