北京电視大学

數學系講义

[太乐公式]

北京电視大学数学系編

一九六〇年　月

§6 太乐公式

(一)按 x 的正整数乘幂，写出下列函数的展开式取到 x^4 的項

i) $$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=1+\frac{2x}{1-x+x^2}$$

$$f(0)=1 \qquad f'(x)=\frac{2(1-x)^2}{(1-x+x^2)^2} \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x)=\frac{-4x(1-x+x^2)-4(2x-1)(1-x^2)}{(1-x+x^2)^3}$$

$$=\frac{-4x+4x^2-4x^3+8x^3-4x^2-8x+4}{(1-x+x^2)^3}=\frac{4x^3+12x+4}{(1-x+x^2)_2}$$

$$f''(0)=1$$

$$f'''(x)=\frac{(12x^2-12)(1-x+x^2)-3(2x-1)(4x^3-12x+4)}{(1-x+x^2)^4}$$

$$=\frac{-12x+\cdots+48x}{(1-x+x^2)^4} \qquad f'''(0)=0$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{(-48x^3+\cdots\cdots-48)(1-x+x^2)-4(2x-1)(-12x^4+\cdots24x)}{(1-x+x^2)^5}$$

$$f^{(4)}(0)=-48$$

$$\because \quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+R5$$

$$\therefore \quad f(x)=1+2x+2x^2-2x^4+R_5$$

(二) 在 $x=0$ 附近，用二階抛物綫近似地代替函数

$$y=a\,ch\frac{x}{a} \qquad (a>0)$$

$$y(x)=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{y}{a}}}{2} \qquad y(0)=a$$

解: $$y'(x)=ch\frac{x}{a} \qquad y'(0)=0$$

$$y''(x)=\frac{1}{a}ch\frac{x}{a} \qquad y''(0)=\frac{1}{a}$$

$$y(x)\approx y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2=a+\frac{x^2}{2a}$$

即 $y(x)$ 的二階近似抛物綫为 $y_1(x)=a+\dfrac{x^2}{2a}$

（三）估計下列近似公式的最大誤差：

i) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$　　当　$|x|\leqslant\frac{1}{2}$

解：$\left|R_4\right|=\left|\frac{\sin\theta x}{4!}x^4\right|\leqslant\frac{x^4}{4!}\leqslant\frac{1}{4!}x\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{384}$

ii) $tg\,x\approx x+\frac{x^3}{3}$　　当　$|x|\leqslant0.1$

解：$R_4=\frac{(tg\theta x)^{(4)}}{4!}x^4=\frac{x^4}{4!}8\,tg\,\theta x\cdot\sec^2\theta x(tg\,\theta x+2\sec^2\theta x)$

$|tg\ x|<\theta\,0.1<0.1$　　$|\sec^2 x|=|tg^2\ x+1|\leqslant1+0.1^2=1.01$

故　$R_4<\frac{100}{24}\cdot10^{-6}\cdot8\cdot0,1\cdot1,01\cdot2,03<6\cdot10^{-6}$

iii) $\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$　　当　$0\leqslant x\leqslant1$

解：$(\sqrt{1+x})^{(3)}=\frac{3}{8}(1+x)^{\frac{-5}{2}}$

$$R_3=\frac{x^3}{3!}\ \frac{3}{8}(1+\ x)^{-\frac{5}{2}}=\frac{x^3}{16}\ \frac{1}{\sqrt{(1+\ x)^5}}\leqslant\frac{1}{16}$$

（四）計算近似植，求誤差

i) $e^{1/2}$　　$e^x\approx1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$

$e^{1/2}\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}$

$\approx1+0.5+0.125+0.0209+0.0002$

$\approx1.648.$

誤差　$R_5=\frac{5^5}{5!}e^{\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{120}\left(\frac{1}{2}\right)^5e^{\frac{\theta}{2}}<\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{1280}$

ii) $arc\,tg\ 0.8$　　$arc\,tg\ 0=0$

$(arc\,tg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(arc\,tg\,x)''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$(arc\,tg\,x)'''=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$　　$(arc\,tg\,x)^{(4)}=\frac{12x(1+x^2)-(6x^2-2)6x}{(1+x^2)^4}$

$$=\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$\text{arc tg}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{x^4}{4!}\ \frac{(1-\theta^2x^2)24x\theta}{(1+\theta^2x^2)^4}$$

$$\text{arc tg}\, 0.8 = 0.8 - 0.17066 = 0.63$$

誤差 $R_4 = \frac{x^4}{4!}\ \frac{(1-x^2\theta^2)24\theta x}{(1+x^2\theta^2)^4} < \frac{0.4096 \cdot 19.2(1-0.64)}{120\ (1+0.64)^4}$

$$R_4 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$$

iii) $(1.1)^{1.2} = (1+0.1)^{1.2} \approx 1 + 1.2 \cdot 0.1 + \frac{0.1^2}{2!} \cdot 1.2 \cdot 0.1 = 1.1212$

誤差 $R_3 \leqslant \frac{0.1^3}{3!} \times \frac{1}{(1.1)^{1.8}} < \frac{1}{6000 \cdot 1.1} < 1.5 \times 10^{-4}$

iv) $\ln(1.2) = \ln(1+0.2) \approx 0.2 - \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2^3}{3}$

$$\approx 0.2 + 0.02 + 0.0027 = 0.2227$$

誤差 $\left| R_4 \right| = \frac{0.2^4}{4}\ \frac{1}{(1+0.2\theta)^4} < 0.0004 = 4 \times 10^{-4}$

(五) 求极限

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} \right]$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

解: $e^{\frac{1}{x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$ $\quad x^3 e^{\frac{1}{x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^{n-3}}$

$$x^2 e^{\frac{1}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^{n-2}} \qquad \frac{x}{2} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^{n-1}}$$

$$\sqrt{x^6+1} = x^3\left(1 + \frac{1}{x^6}\right)^{\frac{1}{2}} = x^3\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{12}} + \cdots\right)$$

$$= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!} x^{-6n}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6-1} \right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{x^{n-3}}-\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{1}{2x^{n-1}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n\right)x^{-6n-3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}-x^3\right)+\left(x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^{-3}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{8}x^{-9}\right)$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{16}x^{-15}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{6}.$$

ii) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)=\lim\left[\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\right)-x}{x\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{5!}\cdots\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{-x^3\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^4}{7!}-\cdots\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}(-x)\lim_{x\to0}\left[\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x}{3!}+\frac{x^4}{5!}-}\right].$$

$$=0\cdot\frac{1}{3!}=0$$

(六) 当 $|x|$ 很小时，推出下列各式的近似公式

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$

$$f(x)=(1+x)^{1/3}(1-x)^{-1/3}-(1-x)^{1/3}(1+x)^{-1/3},\qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}(1-x)^{-1/3}+\frac{1}{3}(1+x)^{1/3}(1-x)^{-4/3}+$$

$$+\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(1+x)^{-1/3}+\frac{1}{3}(1-x)^{1/3}(1+x)^{-4/3}$$

$$f'(0)=\frac{4}{3} \qquad f(x)\approx f(0)+f'(0)x=\frac{5}{3}x$$

ii) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$，因$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{-n}\approx 1-\frac{nx}{100}$

$$\therefore \quad \frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]\approx\frac{An}{100}$$

iii) $$\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}\approx\frac{0.69}{\frac{x}{100}}\approx\frac{69}{x}$$

幂級数习題題解

一、判別下列級数的收斂性.

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+4^n}$ 一般頁 $a_n=\frac{1}{1+4^n}$

$$\therefore\ l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+4^{n+1}}}{\frac{1}{1+4^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+1}{4^{n+1}+1}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{4^n}}{4+\frac{1}{4^n}}=\frac{1}{4}.$$

$\because\ l=\frac{1}{4}<1\ \therefore$ 級数收斂.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$

$$\because\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n=2+1+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n<3+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\because\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收斂 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^n}$ 收斂.

iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^k}$ (k 正整数)

$$l=\lim\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^k}}{\frac{2^n}{n^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^k}\cdot\frac{n^k}{2^n}$$

$$=\lim\ 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^k=2$$

$\because\ l=2>1\ \therefore$ 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^k}$ 發散.

iv) $\frac{2^2}{1}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots+\frac{(n+1)^2}{n!}+\cdots$

解: 一般項为 $a_n=$ 为 $\frac{(n+1)^2}{n!}$, 用比值判别法

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)^2}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)^2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)!}\times\frac{n!}{(n+1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{1}{n}+1}\right)^2=0,$$

$\because\ l<1\quad\therefore$ 級数收斂.

二、冪級数习題

1. 求下列級数的收斂半徑

i) $\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{3^2}+\frac{3x^3}{3^3}+\cdots+\frac{nk^n}{3^n}+\cdots$

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}},\quad a_n=\frac{n}{3^n}$$

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{3^{n+1}n}}=\lim_{n\to 8}\frac{3n}{n+1}=3.$$

收斂半徑 $R=$.

ii) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

$$R=\frac{1}{\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=1$$

$\therefore$ 收斂半徑 $R=1$

iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$

$a_n=n!$

$$\therefore\quad R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$\therefore$ 收斂半徑 $R=0$.

2. 用冪級数展开积分 $\int_0^x \cos x^2 dx$, $\int_0^x e^{\frac{1}{x}} dx$

i) $\cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$

逐項积分有:

$$\int_0^x \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{x^{4n}}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$$

ii) $e^{\frac{1}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n}$

逐項积分得

$$\int_1^x e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x \frac{1}{n!x^n} dx$$

$$= -1 + x + \log x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(1-n)x^{n-1}}$$

3. 求积分 $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ 精确到 10^{-3}

解: $\sin x = \sum_{n=0}^{8} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)[(2n+1)!]}$$

$$\therefore \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \frac{x^7}{7!7}$$

$$+ \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)[(2n-1)]!} + \cdots$$

取 $x = \pi$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} - \frac{\pi^7}{35280} + \frac{\pi^9}{3265920} - \frac{\pi^{11}}{439084800} \cdots$$

因为第六項小于 0.0007 而我們要求的誤差是 0.001

∴ 只計算到第五項即可,

又因誤差在 0.001 內, 所以每項取四位小数就够了

$$\pi=3.1416(+)$$

$$\frac{\pi^5}{600}=0.5100(+) \qquad \frac{\pi^3}{18}=1.7226(-)$$

$$\frac{\pi^9}{3265920}=0.0091(+) \qquad \frac{\pi^7}{35280}=0.0858(-)$$

$$3.6607(+) \qquad 1.8082$$

$$\begin{array}{r} 3.6607 \\ -1.8082 \\ \hline 1.8525 \end{array}$$

則 $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx\approx 1.8525$ 誤差在 0.001 內,

4. 用逐項微分求和:

i) $$f(x)=\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\cdots$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{5}\cdots$$

$$x^2 f'(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots=\log(1-x)-x$$

$$\therefore\quad f'(x)=\frac{\log(1-x)-x}{x^2}$$

$$\int f'(x)dn=\int\frac{\log(1-x)-x}{x^2}dx$$

$$=\int[\log(1-x)-x]\,d\left(-\frac{1}{x}\right) \text{(利用分部积分公式 } \int u\,du=uv-\ \ v\,du)$$

$$=1-\frac{1}{x}\log(1-x)+\int\frac{1}{x}\left(\frac{-1}{1-x}-1\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{x}\log(1-x)+\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{x}\log(1-x)+\log|1-x|-2\log|x|+c$$

$$\therefore \quad f(x)=1-\frac{1}{x}\log(1-x)+\log|x-1|-2\log|x|$$

ii) $f(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

逐项微分有:

$$f'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

$$\therefore \quad e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\therefore \quad f'(x)+f(x)=e^x$$

$$\begin{array}{rl} +) & -f'(x)+f(x)=e^{-x} \\ \hline & 2f(x)=e^x+e^{-x} \end{array}$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

5. 用逐项积分求和

$f(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$

$$\int f(x)dx=x^2+2x^3+3x^4+\cdots$$

$$=x^2(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots)$$

又 $\because \quad \dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

$$\therefore \quad \int f(x)dx=x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

则 $\quad f(x)=\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\dfrac{x^2}{(1-x)^2}\right)'=\left[\dfrac{1}{(1-x)^2}-1\right]'=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$

6. 已知 $\log 3=1.09861$ 求 $\log 4=?$

利用公式 $\log(n+1)=\log n+\dfrac{1}{2n+1}\left(1+\dfrac{1}{3(2n+1)^2}+\dfrac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\right)$

$$\therefore \log 4=1.09861+\frac{2}{7}\left(1+\frac{1}{147}+\frac{1}{12007}+\cdots\right)$$

$$=1.09861+0.28571+0.00194+0.00002=1.38628$$

另法因 $\log 4=2\log 2$

而 $\quad \log 2=0.69314$

$$\log 4=1.38628$$

8. 求 $\sqrt[12]{4000}$ 精确到0.01

解: $\sqrt[12]{4000}=2\cdot\left(\frac{1}{2^{12}}\right)^{\frac{1}{12}}(4000)^{\frac{1}{12}}$

$=2\left(\frac{4000}{4096}\right)^{\frac{1}{12}}$ $\qquad(2^{12}=4096)$

$=2\left(1-\frac{96}{4096}\right)^{\frac{1}{12}}$

$=2(1-0.02)^{\frac{1}{12}}$

$=2\left(1-\frac{1}{12}\cdot0.02\right)$

$=2\times0.999$

$=1.998$

第四章 几何习题解

1. 分别下列那些是向量:

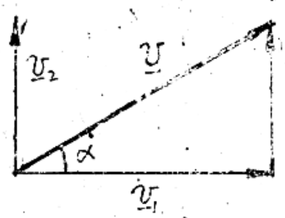
   力、速度、加速度、位移、力矩等是向量

2. 結合举例說明，矢量是怎样引進的

   从上題各个实践中常碰到的量，由于生产需要对其研究，則抽出其共性：数値、方向而引入向量概念。

3. 河水流速 v_1，小王以速度 v_2 将 板直划对岸，間小王划行 板的速度 v 是多少，求出 v 的方向和数。

   解:



$$v=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}$$

和河岸夹角余弦 $\cos\alpha=\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}}$

4. 作如下运算：$\underline{a}=(1,2,3)$，$\underline{b}=(4,5,6)$，$\underline{c}=(7,8,9)$，$\lambda=5$

   $\lambda[(\underline{a}+\underline{b})-\underline{c}]=5[(5,7,9)-(7,8,9)]=(-5,-5,0)$

   $\lambda[\underline{a}-\underline{b}]+\underline{c}=5(-3,-3,-3)+(7,8,9)=(-8,-7,-6)$

   $\lambda[\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}]=5(-10,-11,-12)$

5. 三力同时作用于一点，設在直角軸上的射影等于

   $x_1=1$，$y_1=2$，$z_1=3$；$x_2=-2$，$y_2=3$，$z_2=-4$；$x_3=3$，$y_3=-4$，$z_3=5$ 求合力数値和方向。

解:

設三分力为 $\underline{F}_1=(1,2,3)$，$\underline{F}_2=(-2,3,-4)$，$\underline{F}_3=(3,-4,5)$

合力 $\underline{F}=\underline{F}_1+\underline{F}_2+\underline{F}_3=(2,1,4)$

数値，$|\underline{F}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{21}$

方向 $\dfrac{\underline{F}}{|\underline{F}|}=\dfrac{(2,1,4)}{\sqrt{21}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{21}},\ \dfrac{1}{\sqrt{21}},\ \dfrac{4}{\sqrt{21}}\right)$ 三分量即方向余弦。

6. 将向量 $(5,8,9)$ 化为单位向量

   解：单位向量是 $\dfrac{(5,8,9)}{\sqrt{5^2+8^2+9^2}}=\left(\dfrac{5}{\sqrt{170}},\ \dfrac{8}{\sqrt{170}},\ \dfrac{9}{\sqrt{170}}\right)$

7. 求矢量 $\underline{A}=(1,2,3)$ $\underline{B}=(2,-1,4)$ 间夹角，

$$\cos\ \underline{A},\underline{B}=\frac{\underline{A}\cdot\underline{B}}{|\underline{A}|\cdot|\underline{B}|}=\frac{2-2+12}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{4+1+16}}=\frac{12}{\sqrt{294}}$$

$$\angle\underline{A},\underline{B}=\text{arc}\cos\frac{12}{\sqrt{294}}$$

8. 解法同上， $\angle\underline{a}\ \underline{b}=\text{arc}\cos\frac{39}{\sqrt{1886}}$

9. 已知 $\underline{a}=(4,5,6)$， $\underline{b}=(3,2,1)$， $\underline{c}=(1,3,9)$

解： $(\underline{a}\cdot\underline{b})\ \underline{c}=(12+10+6)(1,3,9)=28(1,3,9)=(28,84,252)$

$(\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c}=(7,7,7)\cdot(1,3,9)=7+21+63=91$

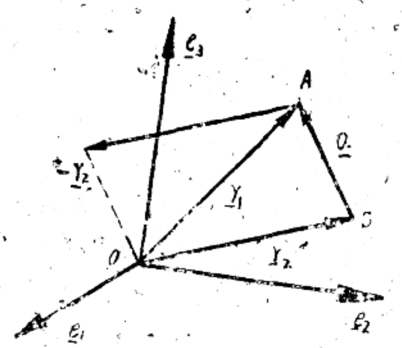
$[5(\underline{a}-\underline{b})]\cdot\underline{c}=5(1,3,5)\cdot\underline{c}=(5,15,25)\cdot(1,3,9)=5+45+225=275$

10. 已知矢量 $\underline{a}$ 两端 A 和 B 的坐标（如圖）

求矢量 $\underline{b}$ 在坐标軸上的射影以及它的方向余弦。

解： 由原点 O 为起点，B, A 为終点之向量是 $\underline{\gamma}_2$ 和 $\underline{\gamma}_1$， 矢量 $\underline{a}$ 可以当作向量差

$$\underline{\gamma}_1-\underline{\gamma}_2=\underline{\gamma}_1+(-\underline{\gamma}_2)$$



所以 $\underline{a}=(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$

即两点 A,B 之坐标差。

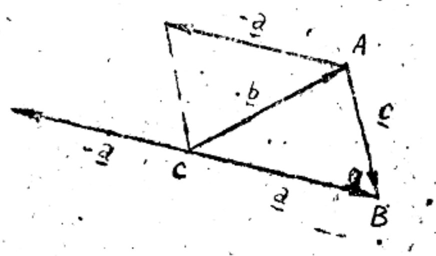
$\underline{a}$ 在坐标軸上投影即 x_1-x_2， y_1-y_2， z_1-z_2

$$\cos\angle\underline{a},\underline{e}_1=\frac{\underline{a}\cdot\underline{e}_1}{|\underline{a}|}=\frac{x_1-x_2}{|\underline{a}|}$$

$$\cos\angle\underline{a},\underline{e}_2=\frac{\underline{a}\cdot\underline{e}_2}{|\underline{a}|}=\frac{y_1-y_2}{|\underline{a}|}$$

$$\cos\angle\underline{a},\underline{e}_3=\frac{\underline{a}\cdot\underline{e}_3}{|\underline{a}|}=\frac{z_1-z_2}{|\underline{a}|}\quad|\underline{a}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

11．从向量运称導出余弦公式 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle c$



解：$\underline{c}=\underline{b}-\underline{a}$

$\underline{c}\cdot\underline{c}=(\underline{b}-\underline{a})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$

$c^2=\underline{b}\cdot\underline{b}+\underline{a}\cdot\underline{a}-2\underline{a}\cdot\underline{b}$ 即 $c^2=b^2+a^2-2ab\cos\angle c$

12．判别下列向量是否相关

i) $\underline{a}=(1,2)$ $\underline{b}=(2,4)$ $\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=4-4=0$ 相关

ii) $\underline{a}=(1,3)$ $\underline{b}=(2,5)$ $\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=5-6=-1\neq0$ 无关

iii) $\underline{a}=(1,2)$ $\underline{b}=(2,5)$ $\underline{c}=(3,6)$

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&6\\0&0&0\end{vmatrix}=0 \quad \text{相关}$$

第五章 习题题解

I. 分离变量:

① $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$　解: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$　$\ln|y|=\ln|x|+\ln c$　$(c<0)$

$\therefore\ c|x|=|y|$

② $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$　解: $ydy=-xdx$　$-\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}c$

$\therefore\ y^2+x^2=c.$

③ $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$

初始条件 $x=0$ 时 $y=1$

解:　$x\sqrt{1+y^2}\,dx=-y\sqrt{1+x^2}\,dy$　$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{-y\,dy}{\sqrt{1+y^2}}$

$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{2}\frac{dy^2}{\sqrt{1+y^2}}$　$\int\frac{dt^2}{\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{dz^2}{\sqrt{1+y^2}}$

$\sqrt{1+x^2}=-\sqrt{1+y^2}+c$　以 $x=0$　$y=1$ 代入左右二端

则 $1+\sqrt{2}=c.$　$\therefore\ \sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{2}+1.$

④ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x=0$　解: $\frac{dy}{dx}=+\sqrt{x}$　$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{x}$　$0\leqslant x<+\infty$

$dy=\sqrt{x}\,dx$　$y=\frac{2}{3}x^{3/2}+c$

$dy=-\sqrt{x}\,dx$　$y=-\frac{2}{3}x^{3/2}+c$

⑤ $yy'=\frac{1-2x}{y}$　解: $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x}{y}$　$\therefore\ y^2dy=(1-2x)dx$

$\int y^2dy=\int(1-2x)dx$　$\therefore\ \frac{1}{3}y^3=x-x^2+c$

$y^3=3x-3x^2+c_1.$

⑥ $y\,tg\,x-y=a$　解: $\frac{dy}{dx}tg\,x-y=a$　$\frac{dy}{a+y}=\frac{dx}{tg\,x}$

$\ln|a+y|=\ln|\sin x|+\ln c$　$(c>0)$

$\therefore\ \frac{a+y}{\sin x}=c,$　$y=c\sin x-a$

⑦ $xy'+y=y^2$　　解: $x\frac{dy}{dx}=y^2-y$　　$\frac{dy}{y(y-1)}=\frac{dx}{x}$

$$\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)dy=\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore\ -\ln|y|+\ln|y-1|=\ln|x|+\ln c\qquad(c>0)$$

$$\therefore\ \frac{y-1}{xy}=c\qquad\therefore\ cx=\frac{y-1}{y}$$

⑧ $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1$　　解: $1+\frac{ds}{dt}=e^s$　　$\frac{ds}{dt}=e^s-1$

$$\therefore\ \frac{ds}{e^s-1}=dt$$

作变换　$e^s=z$

$$\therefore\ e^s\frac{ds}{dt}=\frac{dz}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{ds}{dt}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{1}{z}=z-1$$

$$\therefore\ \frac{dz}{z(z-1)}=dt$$

$$\therefore\ \left(\frac{-1}{z}+\frac{1}{z-1}\right)dz=dt$$

$$-\ln|z|+\ln|z-1|+\ln c=t$$

$$\therefore\ \ln\frac{c(z-1)}{z}=t$$

$$\therefore\ e^t=\frac{c(z-1)}{z}=\frac{c(e^s-1)}{e^s}$$

⑨ 設物質進行化学反应的速度和尙未起化学反应的物質質量成正比，試求物質質量与时間的关係.

第一步建立微分方程

設物質原質量为 a，在时刻 t 时已起化学反应的物質質量为 x，則尙未起化学反应的物質質量为 $a-x$.

而化学反应速度为 $\frac{dx}{dt}$，故得微分方程

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)\qquad(\text{一階，可分离变量})$$

其中 k 是比例系数.

第二步　解微分方程

方程　$\frac{dx}{dt}=k(a-x)$