北 京 电 視 大 学

数学系（丙）学习資料之一

“介析儿何”自学指导書

北京电視大学数学系編

1 9 6 1 年 9 月

数学自学指导書
(解析何儿部分)

一、总的說明

解析几何是近代数学发展的起点之一，是高等数学中的第一个基礎課，在生产实踐和各門学科中有广泛的应用，同时也是以后学习微积分所必須的基本知識，因此，我們一定要学好这門課，学得扎扎实实。

解析几何，主要的是用代数的方法來研究几何問題，研究常用的一些基本圖形（曲綫，曲面）的几何性質，当然，由之亦反过來，可以藉助于几何直观來研究代数和分析中的問題，不过这在本課程中不是主要的。所以，解析几何处理的是几何問題（圖形的性質及其相互关系），用的方法是代数計算的方法，把几何和代数（形和数）結合起來的途徑是坐标，因此，代数和几何的緊密結合是解析几何的特征之一，这一点与平面几何就大不相同。此外，軌跡是几何中的基本观念之一，为了用数來描述它，就自然地出現了变数的概念，这亦与初等数学中主要研究常量不同，变量（变化，运动的观念）进入数学，就是从解析几何开始，这也是从初等数学发展到高等数学的一个重要标誌，正因为这样，解析几何所处理的問題可以远超过平面几何，从方法上來說也远为規則，統一，容易。

由上所述，解析几何的基本任务、主要內容是：

①建立坐标概念（有各种坐标）

②建立圖形的方程和方程的圖形的概念（有各种表示形式）

③具体的对于一些最簡单、最常用的圖形（直綫，平面，二

次曲綫和二次曲面）求其方程，並通过方程进一步研究它們的性質和相互关系。

④因在圖形和方程之間要建立关系必須引进坐标，因此就有坐标系的适当选取和調換的問題，如此，坐标变换及其应用亦是解析几何中基本內容之一。

⑤几何变形的概念及其应用。

由于各方面条件的限制，我們主要講述前三部分內容，第四部分只作簡单的介紹，而最后一部分則从略。

学习解析几何，一方面要学习它的概念，結論，公式，同时，更重要的是学习它处理問題的方法。

学习解析几何，只需要有一定的代数，三角和平面几何知識就可以，它不象数学分析那样有很多較为抽象，深刻的概念（如极限、連續，微商，积分等）和定理，而是顯得比較直观，簡单，易于理解，但是，要能眞正理解它，熟練地掌握它，会灵活地运用，就不是很容易的，要下功夫。一方面，要求很好地鑽研理論，注意几何意义，抓住圖形是如何与代数緊密地結合起來，相輔相成的，另一方面，要能从基本理論中学习运用坐标和計算的方法，做一定数量和类型的习題，达到对坐标法和基本公式的熟練掌握，为后一階段的学习打下基礎。

我們用的教本是北大数学力学系編的“解析几何”講述其中的基本部分，参攷書是：

“解析几何学”普里瓦洛夫著。（系統要好，內容适合我們要求，有較多的习題，並附答案，可以作为主要参攷書）

此外，近几年編譯的許多关于解析几何的書，最近出版的高等数学中解析几何部分都可以参攷，不过有的因系統不同，有的要求不合，主要的可以看其中的例子，如同志們感到需要，亦可看超出我們教学的部分，以补充知識，更好地掌握坐标法的运用。

二、第一章的基本内容及説明

本章的主要任务是建立解析几何中的二个最基本的概念——点的坐标和曲綫的方程，同时亦給出一些最簡单（也是最基本）的应用和例子，來説明这二个概念。

I. 坐 标

建立点的坐标概念的步驟是：①直綫上点的位置的确定，直綫上点的坐标，直綫上的坐标系；②通过投影，作平面上的点到坐标軸上的投影，根据直綫上点的坐标，从而建立平面上点的坐标的概念。

作为坐标的几个最基本的应用，是：

①計算二点之間的距离，有公式

$$|M_1M_2|=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}$$

②从确定二个質点的質量中心，导致定比分点的概念和計算的公式，

定义：如点M在二点$M_1(X_1,Y_1)$，$M_2(X_2,Y_2)$的連綫或其延长綫上，如果

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|}=|\lambda|$$

並当M在M_1，M_2之間时λ为正，之外（卽在延长綫上）时λ为負，則称点M分綫段M_1M_2之比为λ。M沿綫段M_1M_2（或其延长綫上）变化，則相应的λ亦变，M定則λ亦定，反之亦然。

这时，由M_1，M_2的坐标和λ的値，卽可求得分点M的坐标为

$$X=\frac{X_1+\lambda X_2}{1+\lambda},\qquad Y=\frac{Y_1+\lambda Y_2}{1+\lambda}$$

③以 $M_1(X_1, Y_1)$，$M_2(X_2, Y_2)$，$M_3(X_3, Y_3)$ 为顶点的三角形的面积为

$$\triangle M_1M_2M_3 \text{ 的面积} = \text{行列式} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的絕对值。}$$

Ⅱ. 曲綫的方程

定义：对于曲綫 C，如果①C上每一点 M 的坐标(X, Y)适合方程

$$F(X, Y) = 0$$

②亦只有C上的点的坐标能适合此方程（即坐标适合此方程的点必在曲綫上），則称$F(X, Y) = 0$ 为曲綫C的方程。

方程 $F(X, Y) = 0$ 代表的实际意义是：把曲綫C看成一个动点M按一定的規律（条件）运动的軌跡，另一方面，M有坐标(X, Y)，M动則(X, Y)变，而M的运动遵循一定的規律，因此(X, Y)变化亦得适合一定的条件，方程$F(X, Y) = 0$即表示这种規律或条件。

所以，几何上是軌跡，力学上是运动，代数（分析）上則是方程，反过來，有了方程，即可把方程的解(X, Y)看成点 M 的坐标，方程的全部解所对应的所有的点即构成一定的圖形，此圖形即称为方程的圖形。

要通过几个具体的例子來了解方程与圖形的概念，特别要注意定义中的二个条件缺一不可，方程的解与曲綫上的点要完全能够恰好对应起來。

掌握这二个概念看來並不难，但十分基本，以后經常碰到，要求了解得十分清楚細緻，这就有个过程。大家可以注意下列几点：

1）定义本身，　2）定义的來源，思想过程（步驟）。

3）为何要这样下定义？又是怎样归納出來的？

4）要很好掌握几个基本的例子，以具体地了解定义，（非背定义）

5）記住公式。

6）注意画圖。

补充：設二曲綫C_1和C_2的方程分别为$F_1(X,Y)=0$，$F_2(X,Y)=0$，則C_1和C_2的交点的坐标必是联立方程

$$\begin{cases} F_1(X,Y)=0 \\ F_2(X,Y)=0 \end{cases}$$

的解，反之亦然，

思　考　題

1.直綫上坐标为X_1和X_2的二点之間的距离如何計算？导出計算公式並用來求从点$X_1=2$到$X_2=3$的距离。

2.你看空間的直角坐标应該如何建立？

3.如果$M_1(X_1, Y_1)$在第三象限，$M_2(X_2, Y_2)$在第二象限，分別对于$X_2>X_1$或$X_1>X_2$的情况画圖說明計算距离的公式的正确性。

4.定比分点中λ的几何意义是什么（就$|\lambda|$和λ的符号分別說明）？当λ从$-\infty$連續地变到$+\infty$，对应的分点M在直綫上如何变化？連續嗎？

5.方程$|X|=|Y|$的几何圖形是什么？能不能說方程

$$(X^2+Y^2)(X^2+Y^2-1)=0$$

代表的是一个圓？說明道理。

如何用一个方程表示由Ⅰ，Ⅳ象限的平分角綫和圓心在原点半徑为2的圓所构成的圖形？

6.三条曲綫是否总有公共点？如何从方程來說明？有公共点的条件是什么？

三、第二章的基本内容及說明

將第一章建立的坐标法用到具体的圖形上，首先攷慮最簡单最常见的圖形——直綫和圓，主要是給出它們的方程，（§§1,2,4,6,8），並通过方程进一步研究直綫間的相互关系（§3，§4）和圓的性質（§7）。

由于时間不允許§4，§5 我們不講，作为練习，希望同志們自己去看。

1．关于直綫

直綫的方程，由于已知的条件不同，有各种形式：

①已知一点和斜率：　$Y-Y_0=k(X-X_0)$　（点斜式）

②已知斜率和在軸上的截距：　$Y=kX+b$（斜截式）

③已知二点：　$\dfrac{X-X_1}{X_2-X_1}=\dfrac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}$（二点式）

④已知在 X、Y 軸上的截距：$\dfrac{X}{a}+\dfrac{Y}{b}=1$　（截距式）

⑤一次方程总代表直綫：　$AX+BY+C=0$　（一般式）

⑥已知原点到直綫的距离和法綫的傾角：

$$X\cos\theta+Y\sin\theta-p=0 \text{（法式）}$$

⑦已知一点和方向：$X=X_0+lt$，

$$Y=Y_0+mt \quad \text{（参数式）}$$

不同的公式有不同的应用，

要求：1）弄清什么叫直綫的傾角，斜率，截距？

2）注意方程中每一个字母的几何意义，如 k，b，A，B，C等等，

3）在什么条件下，用什么形式的方程较方便？又如何把一种形式化为另一种需要的形式，記住这些公式，並会推导。

4）特别，注意参数式方程的物理意义和几何意义（t, α, l, m的几何意义）。

5）会推导並应用計算二条直綫之間的夾角的公式。

Ⅱ．关于圓

当已知圓心的坐标和半徑时，圓的方程为

$$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2=R^2 \qquad \text{（标准式）}$$

一般地說，沒有交叉項XY，，平方項系数相同，並滿足某一附加条件的二次方程

$$AX^2+AY^2+2DX+2EY+F=0$$

$$(D^2+E^2-AF>0) \quad \text{（一般式）}$$ 必定表示一个圓；

另外一方面，从物理中的圓周运动，导致圓周的另一种形式的方程

$$X=X_0+R\cos t, \quad Y=Y_0+R\sin t \quad \text{（参数式）。}$$

要求：①会灵活地运用这几种形式的方程，並能互相轉化。

②特别要注意参数方程中参数 t 的几何意义和物理意义。

③注意求圓的切綫的方法。

思　考　題

1.直綫的一般式方程比之于其它形式的方程有何优缺点？

2.如何把直綫的各种形式互相轉化？运用这些形式的方程应該予先知道些什么？决定直綫可以有些什么方法，在每种情形下用什么方程式較簡单。步驟又如何？

3.求直綫 $AX+BY+C=0$ 的斜率，及过点 (X_0, Y_0) 与此直綫垂直的直綫的方程。

4.如何判別三点共綫？

5.如何把直綫的参数方程和第一章中的定比分点公式联系起来？

6.如何計算从直綫 l_2 到 l_1 的夾角？

7.二直綫

$$l_1:\quad A_1X+B_1Y+C_1=0$$

$$l_2:\quad A_2X+B_2Y+C_2=0$$

和由方程

$$l:\quad (A_1X+B_1Y+C_1)+t(A_2X+B_2Y+C_2)=0$$

（t 为任意常数）代表的直綫有何关系？如何求 l_1 与 l_2 的平分角綫（当 $l_1 \nparallel l_2$）？

8.在什么条件下 X 和 Y 的二次方程代表一圓周？

四、第三章的基本内容和説明

I．关于圓錐曲綫

圓錐曲綫，亦称二次曲綫，包括：椭圓，双曲綫和拋物綫，这几种曲綫也是常见的，应用十分广泛，由于实际的需要（天文，力学等），早就对这些曲綫的性質和方程有了研究，关于圓錐曲綫的理論，常被認为是解析几何的中心內容，由于这些曲綫的性質十分丰富，这一章的內容亦就較前为复雜。既重要，又复雜，这就要求我們予以极大的注意，認真地对待它。

关于圓錐曲綫的理論，大体上可以分这样几部分：1)圓錐曲綫的來源，一些基本的特性。2)从已知的性質导出方程。3)根据方程进一步研究曲綫的其它特性。4)前面三部分常是对椭圓，双曲綫，拋物綫分别进行的，最后，还有它們的許多共同性質。5)圓錐曲綫的几何理論（共軛，漸近，直徑等性質在此从略）。

本章除了关于圓錐曲綫的理論外，还結合着引进了另一种常用坐标——极坐标。介紹了曲綫的另外二种形式的方程——极坐标方程和参数方程，这些內容虽然是和圓錐曲綫結合在一起講的，但有它自身的普遍性，以后应用也十分广泛（如在数学分析，力学中），希望大家同样給予极大的重視。

下面以椭圓为例作具体的說明。

①首先从投影，彈性体受力（这二种都是变形的观点），圓柱面上的截綫（較古老的來源）和运动軌道（天文，力学）这几种最常见的方面，引进椭圓这一种形状的曲綫，說明导致这种曲綫的实际广泛性。

②然后，从传統的第三种來源出发，証明了椭圓的二个几何性質（二焦点性質和准綫的性質，这二个性質早在二千年前的古

希腊时代就已經得到了），並把其中之一个性質（在此选二焦点的性質，当然从另一性質出发可完全达到相同的結果，仅有前后次序的不同）規定为判別是否橢圓的标准（定义），同时得到了一种作圖方法。当然这里存在的一个問題是从上列几种方法得到的曲綫是否都具有这种性質，即是否属同一型的曲綫，这个問題在 §1 的后半部分基本上得到了解决。

③从定义出发，适当选擇坐标系（标准坐标系），推导得到橢圓的方程

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad \text{（标准方程）}$$

④从标准方程出发，进一步研究了橢圓的形状和另外一些性質，特別是焦点和准綫的性質，从而証明了开始时得到的二个性質是可以互相轉化，互为因果的。它們都是橢圓型曲綫的最根本的特征，同时从方程也証明了用投影式压縮的方法得到的橢圓与定义中橢圓的一致性。对于双曲綫和抛物綫也作了类似的討論（当然各有某些特殊性）。这就是§§1－3的基本內容。

在分別专門研究后的基礎上，最后，又从总的方面說明了这三种曲綫的几种共同性質：天体运动的軌道（不同的初速度就得到不同的曲綫），焦点准綫性質（离心率大于，等于，小于 1.对应于不同的曲綫），作为圓錐面上的截綫（截平面对于圓錐的軸傾斜度不同，截得的曲綫亦不同），光学上的反射性質（曲綫与其切綫的性質），此即§4的基本內容。此外，在 §6 还从曲綫的极坐标方程（由焦点准綫的性質出发得到的）說明了这三种曲綫的共同性。

在我們这里，研究圓錐曲綫的性質的基本出发点是方程。另外，还有不藉助于方程來討論这种曲綫的几何性質的理論，如狄隆涅－拉伊可夫著的“解析几何学”一卷二分册（有北大翻譯的

中譯本）中所介紹的，不过由于实用意义不大，在此从略。

要求：①知道得到圓錐曲綫的几种方法和实际应用。

②很好掌握圓錐曲綫的各种性質（特别是关于二个焦点和准綫的性質）並注意这些性質的相互关系。

③記住並区分清楚三类曲綫的标准方程，要求会推导。

④会从标准方程出发來研究曲綫的各种特性，並解决用各种不同的方法得到的曲綫是同一型的一致性問題。

⑤熟悉与曲綫的形状有关的各种参量（如 a, b, c, e, h 等）的几何意义，作用及相互关系，並会根据給定的条件确定这些参量，从而求出曲綫的标准方程或极坐标方程。

⑥最后，要会画圖，熟悉圖形，在圖上标出各参量或画出准綫，漸近綫等。

Ⅱ．极坐标和极坐标方程

在实际应用中，除常见的直角坐标以外，也常用极坐标。

要求：①知道什么叫极坐标？极坐标系？引进极坐标的指导思想是什么？如何定点的极坐标或反之由极坐标來定点（对于正或負的 λ，正或負的或超过 2π 的幅角 φ）。

②記住在一定的条件下（极点为原点，极軸与X軸重合），极坐标和直角坐标的关系

$$X=r\cos\varphi,\quad Y=r\sin\varphi.$$

或

$$r=\sqrt{X^2+Y^2},\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}.$$

③記住几条特殊曲綫的极坐标方程和形状，如圓，直綫，圓錐曲綫，螺綫，双紐綫，心脏綫等。想一想，为什么象这样一些曲綫用极坐标方程就顯得簡单，从而体会到在什么条件下用极坐标方程較为方便。

Ⅲ．参数方程

除了可以用直角坐标方程和极坐标方程表示曲綫外，在力学中，常把曲綫看成是物体运动的軌迹，作为运动方程，就是物体的位置和时間的关系，从而导致另一种亦是十分常用的表示曲綫的方法——参数方程。

为了应用的方便（如在积分学中），有时候参数不一定有簡明的几何意义或物理意义，而只是代表区别于动点坐标的第三个变量。

参数方程即表示曲綫上动点的坐标与另一个用來确定点在曲綫（軌道）上位置的参数之間的关系：

$$\begin{cases} X=\varphi(t) \\ Y=\varphi(t) \end{cases} \qquad (a\leqslant t\leqslant b).$$

只要适当地引进参数（这不是很机械的，而往往要通过物理或几何上的具体分析來引进說明运动的参数），可以把直角坐标方程化为参数方程；反之，消去参数，就可化参数方程为直角坐标方程，大家可以通过几个实例來理解这种轉化。

直綫，圓，橢圓，旋轉綫等的参数方程在以后的数学分析中是經常引用的。

为了更好地掌握极坐标方程和参数方程，並熟悉一些特殊曲綫的这种方程，大家可以多参閱一些解析几何或高等数学的書。如斯米尔諾夫著的“高等数学”一卷一分册最后一部分，菲赫金戈尔茨著的“微积分学教程”一卷二分册第七章等。

思　考　題

1.用那些方法可以得到圓錐曲綫（橢圓，双曲綫，拋物綫）？按我們所講，認識圓錐曲綫的标准是什么？怎样知道用其他方法得到的曲綫是圓錐曲綫？圓錐曲綫在实际中有什么应用？

2.圓錐曲綫有那些几何性質，那一些性質是最基本的（由之可以决定其他的性質，反映曲綫的根本特征）？这些性質有什么应用？

3.圓錐曲綫的标准方程是在怎样的坐标系里得到的？怎样化成极坐标方程（这时极坐标系和直角坐标系的相互位置怎样）？找出圓錐曲綫的方程有何意义？

4.与圓錐曲綫的形状有关的有那一些量？它們的几何意义如何和相互关系如何？由其中的几个可以决定曲綫，求出相应的标准方程的方法怎样？

5.橢圓，双曲綫，拋物綫的形状和性質有那些異同？

6.怎样作出极坐标方程的圖形？

7.什么叫参数方程？它和直角坐标、极坐标方程之間的关系如何？

五、第四、五章的基本内容及説明

曲綫的方程是曲綫和坐标系二者相結合的产物，对于同一条曲綫，如采用不同的坐标系，由于点的坐标发生了变化，也就有不同的方程，因此，除了采用适当的表达形式（用直角坐标方程还是极坐标方程）外，适当地选取坐标系，也可以簡化曲綫的方程，同时，由于力学中相对运动的研究，也常要考慮一个参攷系（坐标系）相对于另一个参攷系的运动和坐标变換的問題。

作为基礎，第四章研究了同一个点在不同坐标系中的坐标之間的关系（主要是平移和旋轉），亦即所謂“坐标变換”的問題。

然后，利用坐标变換研究一般的二次方程所代表的几何圖形，其关鍵是簡化二次方程成为有限的几种标准形式，这样就得到二次曲綫的分类。如果要得到一个二次方程所表示的圖形的类型和形状，並画出它的草圖的一种簡便的方法，就須要用到“不变量”。

由于这二章的內容以后不常用，我們的要求不如前几章那么高，不要求达到記住和熟練的程度。

要求：①知道什么叫坐标变換，如何确定一个直角坐标系相对于另一个直角坐标系的位置，以及什么叫平移和旋轉（这是較常用的），要求会推出这二种变換的公式，反之，能由变換公式确定变換。

②会用坐标变換化簡二次方程，从而判别这个方程所表示的圖形的形状和作出它的草圖。

所有的公式不必記住，但要会用。

思　考　題

1. 如何决定一个直角坐标系相对于另一个的位置？什么叫坐标变换，坐标变换的公式表示什么意思？

2. 先平移后旋轉的变换公式如何？与先旋轉后平移結果是否相同？为什么会有差别，如何消除？

3. 把一个二次方程化成标准形式，在什么时候先平移，又在什么时候先旋轉較为方便？作出它的圖形的步驟如何？