《初等数学复习及研究》

（平面几何）

学习参考资料

第四分册

（习题解答）

邯郸地区教师进修学校

保定地区教师进修学校

说　　明

这本《习题解答》是梁绍鸿编《初等数学复习及研究》（平面几何）第三章的习题选解。有些题目难度较大，限于时间和水平，未能一一解出，希谅解。

本书是由邯郸地区教师进修学校雷国铭、梁美玲和保定地区教师进修学校王德如、李子年、王爱俊几位同志负责编写的。错误之处一定很多，望提出宝贵意见，以便改进工作。

在编写过程中，邯郸地区的王培甫、刘致仁、贾林鸣等同志也参加了解题，在此一并致谢。

根据教学要求和时间限制，第五分册不拟再行印刷，特此说明。

编　　者

七九年十二月

目　　录

习　题　十

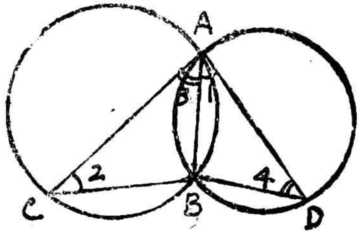
1．两圆交于A、B两点，在每圆中各作一弦AC、AD，使切于他圆．**求证**

$\angle ABC=\angle ABD$

证明　连结AB．

$\angle 1=\angle 2$，　$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore$　$\angle ABC=\angle ABD$．



（图10.1）

2．圆中直径AB与弦AC夹角为30°．过C引切线交AB的延长线于D．**求证**

$AC=CD$．

证明　连结CB，

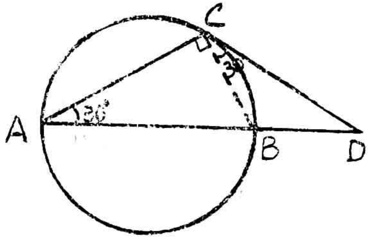
$\angle ACB=90°$，

$\angle 2=30°$，

$\therefore$　$\angle ACD=120°$，

则　$\angle D=30°$，

$\therefore$　$AC=CD$．



（图10.2）

3．设BC切⊙O于B，OC垂直于半径OA而交直线AB于D．求证：$BC=CD$．

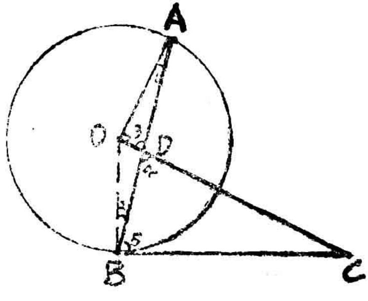
证明　连结OB，

$\because$　$\angle 1=\angle 2$，

$\angle 1=+3=90°$，

而　$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore$　$\angle 1+\angle 4=90°$，



（图10.3）

得　$\angle 4 = 90^\circ - \angle 1$.

$\angle OBC = 90^\circ$,

得　$\angle 5 = 90^\circ - \angle 2$.

∴　$\angle 4 = \angle 5$.

另一方面,

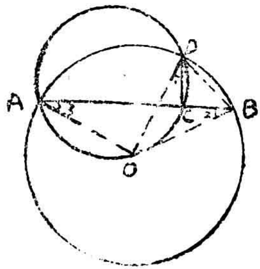
即　$\angle 2 + \angle 5 = 90^\circ$,

∵　$\angle 1 = \angle 2$,

∴　$BC = CD$.

4. **已知**　AB是⊙O的弦，过A、O两点任作一园，交弦AB于C，交⊙O于D.

求证　$CD = CB$.



(图10.4)

证明　连OA、OD、OB、BD,

∵　$OA = OB = OD$,

∴　$\angle OBD = \angle ODB$,

$\angle 2 = \angle 3$.

而　$\angle 1 = \angle 3$,

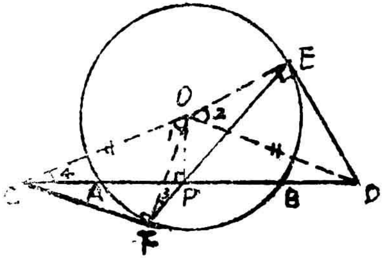
∴　$\angle 1 = \angle 2$,

∴　$\angle CDB = \angle CBD$,

∴　$CD = CB$.

5. **已知**　AB是⊙O的弦，$CA = BD$，DE、CF是切线，E、F是切点. 连结EF交AB于P点.

求证　$AP = PB$.



(图10.5)

证明　连结OC、OD、OE、OF,

由圆幂定理可证

$CF = DE$.

又　$OE = OF$,

∴　$\triangle ODE \cong \triangle OAF$

∴　$\angle 1 = \angle 2$,

$OC = OD$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

另一方面，在$\triangle COD$和$\triangle EOF$中，

$\angle COD = \angle EOF$，

$\dfrac{OC}{OF} = \dfrac{OD}{OE}$，　　$\therefore$ $\triangle OCD \backsim \triangle FOE$，

$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$。

$\therefore$ O、P、F、C四点共圆。（视角相等）

从而，得$\angle OPC = \angle OFC = 90°$（同弧上的圆周角）。

$\therefore$ $AP = PB$（垂直于弦的半径平分弦）。

6．**已知**　AB和CD为固定的两直径，P_1是⊙O上任一点，$P_1A_1 \perp AB$，$P_1C_1 \perp CD$，A_1、C_1是垂足。

求证　A_1C_1为定值。

证明　在⊙O上任取一点P_2，作$P_2D_1 \perp CD$，作$P_2B_1 \perp AB$，D_1、B_1是垂足，

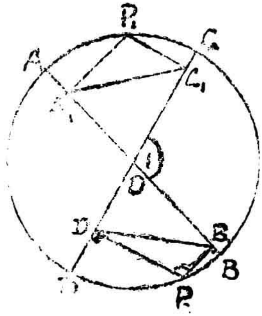
则　A_1、P_1、C_1、O四点共圆，

D_1、P_2、B_1、O四点共圆。

$\therefore$ $\angle P_1 = \angle 1$，$\angle P_2 = \angle 1$，

$\therefore$ $\angle P_1 = \angle P_2$。

$\because$ 两个四点共圆的直径都是⊙O的半径，



（图10.6）

$\therefore$ 是两个等圆。　　$\because$ $\angle P_1 = \angle P_2$，

$\therefore$ $A_1C_1 = B_1D_1$（等圆中圆周角相等，所对的弦也相等）。

由以上证明可知，P点不论取在圆上什么位置，A_1C_1是不变的，所以是定值。

7. 两圆相交于P点。过P点任作两直线，交一圆于A、B，交他圆于A′、B′。

求证：直线AB与A′B′有一定的交角。

证明 连结PM、MA、MB、MB′，

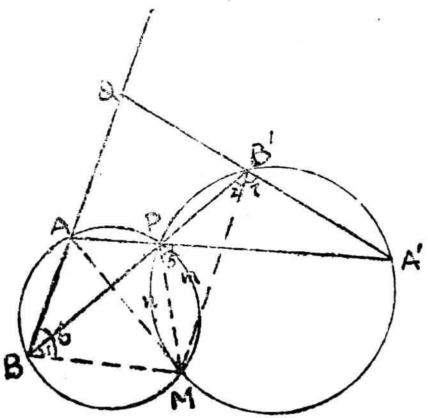
$\angle 1 \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{PmM}$，

$\angle 2 \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{PnM}$，

$\because$ $\overset{\frown}{PmM}$、$\overset{\frown}{PnM}$固定。

$\therefore$ $\angle 1$和$\angle 2$固定。

因而$\angle BMB'$固定。



（图10.7）

另一方面： $\angle 5 = \angle 6$，$\angle 5 = \angle 7$，

$\therefore$ $\angle 6 = \angle 7$， $\therefore$ Q、B、M、B′四点共圆。

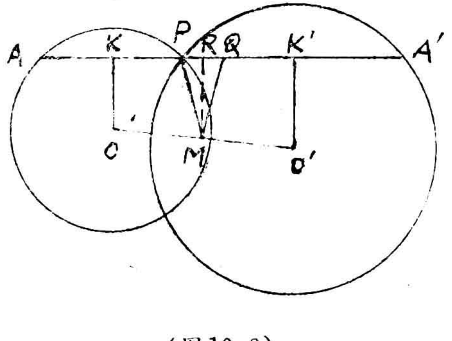
$\because$ $\angle BMB'$是定值（已证），

$\therefore$ $\angle Q = 180° - \angle BMB'$为定值。

8. ⊙O与⊙O′交于P点，M是OO′的中点。过P点作直线垂直于PM而交两圆于A、A′。求证：PA = PA′。

证明 作OQ⊥AP，O′H⊥PA′，

$\therefore$ AQ = QP，



（图10.8）

$PH = HA'$.

∵ $OO'HQ$是梯形，M是腰OO'的中点，

$OQ \parallel MP \parallel O'H$,

∴ $QP = PH$,

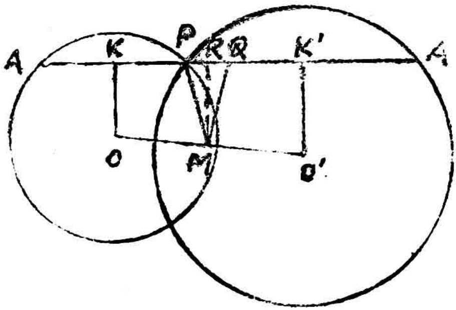
从而得 $AQ = QP = PH = HA'$.

∴ $AQ + QP = PH + HA'$,

即 $AP = PA'$.

9. ⊙O与⊙O′交于P点，M是OO'的中点．过P点任作直线交两圆于A、A′，若Q是AA'的中点，则$MP = MO$.

证明 作$OK \perp AA'$, $O'K' \perp AA'$.



(图10.9)

∵ $AQ = AP + PQ$,

$A'Q = A'P - PQ$,

又∵ $AQ = A'Q$,

∴ $AP + PQ = A'P - PQ$, $A'P - AP = 2PQ$.

即 $2K'P - 2KP = 2PQ$,

∴ $K'P - KP = PQ$.

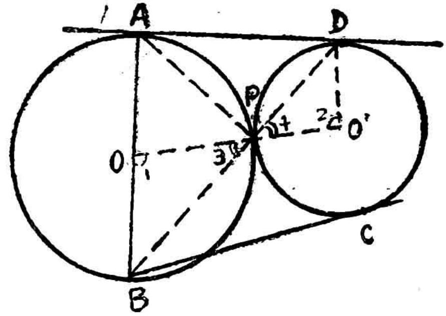
由此，KK'的中点，必在PQ的中点．设此点为R，连结MR．则MR为直角梯形$OO'K'K$的中位线．∴$MR \perp KK'$．则MR为线段PQ的垂直平分线．

∴ $MP = MQ$.

10. **已知** ⊙O与⊙O′外切于P，一外公切线AD切⊙O

于A，切⊙O′于D．AB为⊙O的直径，BC切⊙O′于C点．

求证　$AB=BC$．



（图10.10）

证明　连结AP、PD、PB、PC．

在△OBP和△O′DP中，∠1＝∠2（内错角），

$\dfrac{OB}{O'D}=\dfrac{OP}{O'P}$，

∴△OBP∽△O′DP，

∴　∠3＝∠4，

∵　O、P、Q′三点共线，∴　B、P、D三点必共线．

由圆幂定理得

$BC^2=BD\cdot BP$．

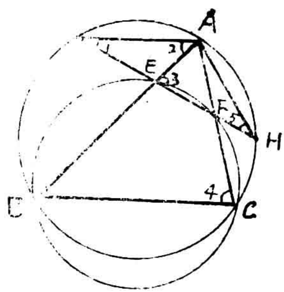
在Rt△BAD中，　　∵　$AP\perp BD$，

∴　$AB^2=BD\cdot BP$（射影定理），

从而得到　$AB=BC$．

11．以△ABC的BC边为弦作一圆，交AB、AC于E、F连EF交⊙ABC于G、H，

则$AG=AH$．



（图10.11）

证明　∠1＝∠3－∠2，

∠3＝∠4，

∴　∠1＝∠4－∠2

$\stackrel{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AG}+\overset{\frown}{GB})-\frac{1}{2}\overset{\frown}{BG}$

$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AG}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{GB}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{BG}$

$=\frac{1}{2}AG$.

另一方面，

$\angle 5 \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AG}$,

$\therefore \quad \angle 1=\angle 5$, $\qquad \therefore \quad AG=AH$.

12. O是△ABC的外心，作⊙BOC设交直线 AB、AC于E、F，求证：AE＝CE，AF＝EF.

证明 连结OB、OC、OA，

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore \quad \angle 2+\angle 4=\angle 1+\angle 3=\angle A$

又∵ $\angle EBF=\angle 2+\angle 5$

$=\angle 2+\angle 4$

$=\angle A$,

$\therefore \quad AF=BF$.

$\because \quad \angle 3=\angle 4$,

$\angle 1=\angle 2$,

$\therefore \quad \angle 2+\angle 4=\angle 1+\angle 3=\angle A$

$\because \quad \angle 6=\angle 2$,

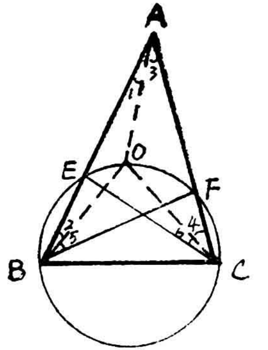
$\therefore \quad \angle 6+\angle 4$

$=\angle A$,

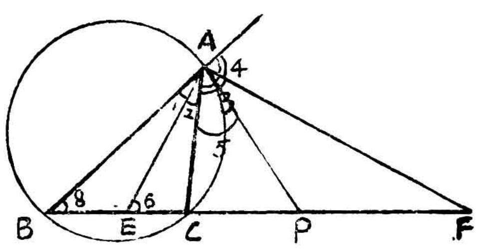
即 $\angle ECA$

$=\angle A$,

$\therefore AE=CE$.



（图10.12）



（图10.13）

13. 设△ABC的∠A的内外平 分

线交BC于E、F，则过A点所作⊙ABC的切线必平分EF线段．

证明 ∵ AP是圆的切线，

∴ $\angle 5=\angle 8$，

∵ $\angle 2=\angle 1$，

∴ $\angle PAE=\angle 2+\angle 5=\angle 1+\angle 8=\angle 6$，

∴ $AP=EP$．

另一方面∵ $\angle 2+\angle 3=90^\circ$（平角之半），

∴ $\angle PFA+\angle PEA=\angle PAF+\angle PAE$，

∵ $\angle PEA+\angle PAE$（已证），

∴ $\angle PFA=\angle PAF$，

∴ $AP=PF$，

∴ $PE=PF$．

14．设直角三角形ABC的弦BC的中垂线交直线AB、AC于E、F，则过A点所作⊙ABC的切线必平分EF．

证明 ∵ $\angle PAC=$ $=\angle ABC=90^\circ-\angle C=$ $=\angle 1=\angle 2$，

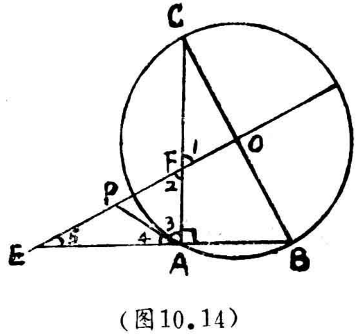
∴ $AP=PF$．

另一方面∵ △AEF为直角三角形，$\angle 2=\angle 3$，

∴ $\angle 5=\angle 4$，

∴ $PE=PA$，

∴ $PE=PF$．



（图10.14）

15．**已知** 在Rt△ABC中，M是斜边BC的中点．过A、M两点任作一圆，交AB于E，弦EF∥BC．求证：

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

FE之长一定．

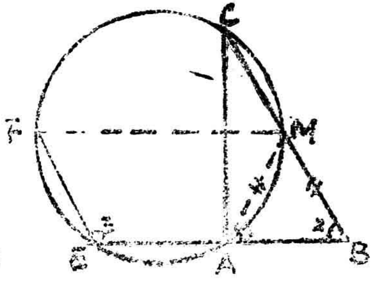
证明 连结AM、FM，

∵ AMFE是圆内接四边形，

∴ $\angle MAE+\angle F=180°$，

又∵ $AM=MB$（直角三角形斜边中线的性质），

∴ $\angle 1=\angle 2$．



（图10.15）

因而 $\angle MAE+\angle F=(180°-\angle 1)+\angle MFE$

$=(180°-\angle 2)+\angle MFE$

$=\angle 3+\angle MFE$（∵ $EF\parallel BM$），

∴ $FM\parallel EB$．

∴ EFMB是平行四边形，

∴ $EF=MB$（为斜边BC之半），

∴ EF是定值．

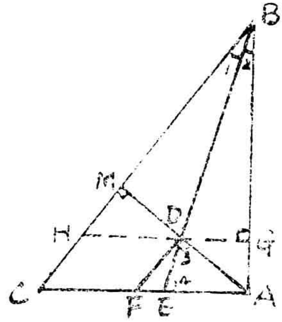
16．$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle B$的平分线交AC边于E而交BC的高线于D．今过D点作直线平行于BC而交AC边于F．求证：$AE=CF$．

证明 过D作AC的平行线交AC、AB于H、G，

∵ $DF\parallel BC$，

∴ CFDH是平行四边形．

∴ $CF=DH$．



（图10.16）

$\because$ $HG \parallel AC$, $\therefore$ $HG \perp AB$,

$\because$ D为$\angle B$平分线上一点，

$\therefore$ $DM = DG$,

又 $DB = DB$,

$\therefore$ $Rt\triangle DBM \cong Rt\triangle GDB$,

$\therefore$ $BG = BM$.

$\therefore$ $Rt\triangle BGH \cong Rt\triangle BMA$,

$\therefore$ $HG = AM$,

$\because$ $DG = DM$, $\therefore$ $HD = AD$,

$\because$ $\angle 3 = 90° - \angle 1 = 90° - \angle 2 = \angle 4$,

$\therefore$ $AE = AD = HD$,

从而得 $AE = CF$.

17. 在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，在半线BA上取E点，在AC的延长线上取F点，使$CF = BE$.连EF交BC于D．求证$DE = DF$.

证明 过E作$EG \parallel AC$，交BC于G，

则 $\angle 3 = \angle 2$,

$\because$ $\angle 1 = \angle 2$,

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 3$,

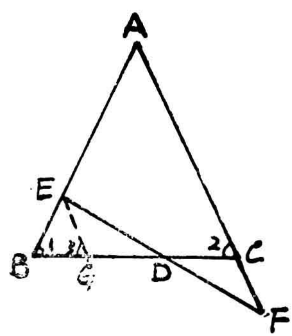
$\therefore$ $BE = EG$,

$\therefore$ $EG = CF$,

$\therefore$ $\triangle EGD \cong \triangle FCD$

(a.s.a),

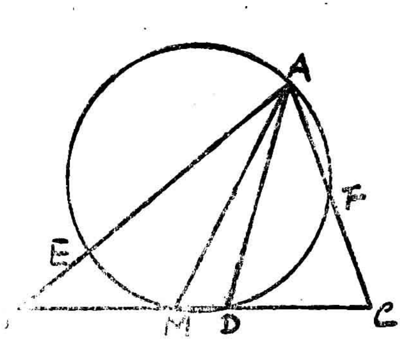
$\therefore$ $DE = DF$.



(图10.17)

18. $\triangle ABC$中，M是BC的中点，$\angle A$的平分线交BC于

ɑ'过A、D、M三点作圆交直线AB、AC于E、F，求证：BE＝CF．



（图10.18）

证明 由割线定理，得$BE\cdot BA=BM\cdot BD$，

$CF\cdot CA=CD\cdot CM$.

$$\therefore\quad BE=\frac{BM\cdot BD}{BA}$$

$$=BM\cdot\frac{BD}{BA},$$

$$CF=\frac{CD\cdot CM}{CA}=CM\cdot\frac{CD}{CA}.$$

∵ $BM=MC$，AD是∠A的平分线，

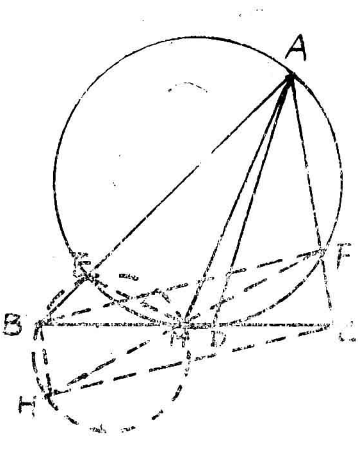
$$\therefore\quad \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC},$$

即 $$\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC},$$

$\therefore\quad BE=CF$．

19．

已知
求证 } 同上



（图10.19）

证明 连FM并延长到H，使$MH=FM$．由于M是BC的中点，

∴ $BH \mathrel{\underline{\parallel}} CF$（对角线互相平分的四边形为平行四边形，故对边平行且相等）．

$\therefore$ $\angle H = \angle MFC = \angle AEM$,

$\therefore$ B、H、M、E四点共圆．

$\therefore$ $\angle BME = \angle EAD = \angle DAC = \angle FMD = \angle BMH$.

$\therefore$ $BE = BH = CF$.

20．ABCD是正方形，DX∥AC，设以C点为圆心，CA长为半径画弧交DX于E（两交点任取其一），CE交AD于F，则AE＝AF．

证明 过D、E作AC的垂线DG、EF，垂足为F、G，

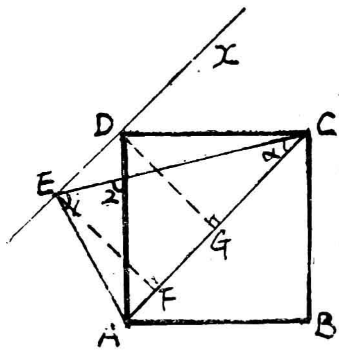
$DG = \frac{1}{2}AC$,

$\because$ $EF = DG$,

$\therefore$ $EF = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore$ $\alpha = 30^\circ$,

$\angle 2 = 45^\circ + \alpha = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.



（图10.20）

另一方面：

$\because$ $\angle 1 + \angle CAE = 2\angle 1 = (180^\circ - 30^\circ) = 150^\circ$,

$\therefore$ $\angle 1 = 75^\circ$.

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$,

$\therefore$ $AE = AF$.

21．设四边形有一双对边相等，则他双对边中点的连线与该双等边所在直线的夹角相等．

证明 作A′D′∥AD，使A′M＝AN，MD′＝ND，

则 A′B$\perp\!\!\!\!=$CD′，A′D′$\perp\!\!\!\!=$AD，$\therefore$ AA′$\perp\!\!\!\!=$DD′．

又∵ $AB=DC$,

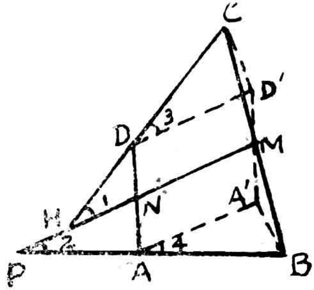
∴ $\triangle ABA'\cong\triangle DCD'$,

∴ $\angle BAA'=\angle CDD'$.

又∵ $\angle BAA'=\angle BPM$,

$\angle CDD'=\angle CHM$,

∴ $\angle BPM=\angle CHM$.



(图10.21)

22. **已知** 直线l与圆内接四边形ABCD一双对边所在直线交成相等的同侧内角，则亦与他双对边所在直线交成相等的同侧内角.

求证 $\angle 3=\angle 4$.

证明 在$\triangle EGC$中，

$\angle 3=\angle 1-\angle 5=\angle 1-\angle 6$,

∵ $\angle 6=180^\circ-\angle 7$,

$\angle 1=\angle 2$,

∴ $\angle 3=\angle 2-(180^\circ-\angle 7)$,

∵ $180^\circ-\angle 7=\angle 8$,

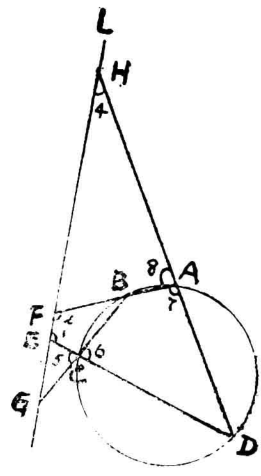
∴ $\angle 3=\angle 2-\angle 8$.

另一方面，

在$\triangle AHF$中，

$\angle 4=\angle 2-\angle 8$,

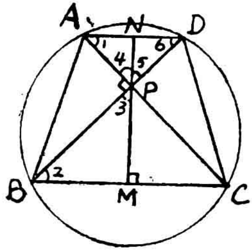
∴ $\angle 3=\angle 4$.



(图10.22)

23. 若圆内接四边形两对角线互相垂直，则过其交点所作任一边的垂线，必将对边平分.

已知　在⊙的内接四边形ABCD中，AC⊥BD，P是其交点，PM⊥BC．



（图10.23）

求证　AN＝ND．

证明　∵　$\angle 1=\angle 2$，

$\angle 2+\angle 3=90^\circ$，

∴　$\angle 2=90^\circ-\angle 3$，

∴　$\angle 1=90^\circ-\angle 3$．

又∵　$\angle 3=\angle 5$，

∴　$\angle 1=90^\circ-\angle 5$．

∵　AC⊥BD，

∴　$\angle 4+\angle 5=90^\circ$．　　∵　$\angle 4=90^\circ-\angle 5$，

∴　$\angle 1=\angle 4$，　　∴　AN＝NP．

另一方面：

$\angle 5=90^\circ-\angle 4$，$\angle 6=90^\circ=\angle 1$，

∵　$\angle 1=\angle 4$，　　∴　$\angle 5=\angle 6$，

∴　NP＝ND，　　∴　AN＝ND．

24．四边形ABCD内接于⊙O，P是对角线交点．过P作直线垂直于PO，而交直线AB、CD于E、F，求证：PE＝PF．

证明　作弦BB′∥EF交⊙O于B′，则B′是B关于OP的对称点．连结B′P并延长B′P交⊙O于D′．

则　$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{B'N}$，$\overset{\frown}{MD'}=\overset{\frown}{ND}$，

连结B′F、B′C，则有：

$$\angle 4\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CN}+\overset{\frown}{DD'}+\overset{\frown}{D'M})$$

$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CN}+\overset{\frown}{DD'}+\overset{\frown}{DN})\overset{m}{=}\angle PB'C.$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com