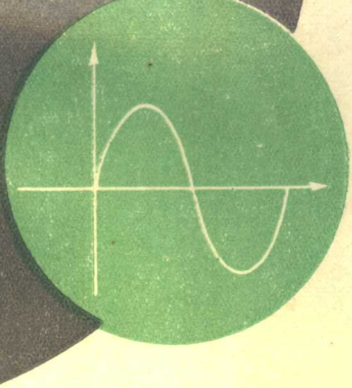
中学数理化错解辨析辞典

高中数学卷



上海辞书出版社

中学数理化错解辨析辞典·高中数学卷

上海辞书出版社出版

（上海陕西北路457号）

上海辞书出版社发行所发行　　常熟文化印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 18.25　插页 5　字数 425,000

1991 年 1 月第 1 版　1992 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—80,000

ISBN 7-5326-137-4/G·25

定价 7.20 元

目　录

代　数　篇

立体几何篇

平面解析几何篇

代 数 篇

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

1．设 (x, y) 表示直角坐标平面内的点，则集合 $M=\{(x, y)|xy\leqslant 0, x、y\in R\}$：(A)在第二象限；(B)在第四象限；(C)在第二、四象限；(D)不在第一、三象限。

【错解】 (C)。

【辨析】 由于坐标轴是不属于象限的，所以由(C)所决定的 (x, y) 的集合 $M'=\{(x, y)|xy<0, x、y\in R\}$。显然它与$M$不等，错解疏忽了 $x=0$，$y=0$ 的情况，正确的答案应选(D)。

2．设 A、B、M、N 为非空集合，$A\cap B=\phi$，$M=\{A$的真子集$\}$，$N=\{B$的真子集$\}$，求 $M\cap N$。

【错解】 由于 $A\cap B=\phi$，所以 M、N 无公共元素。

$$\therefore\quad M\cap N=\phi.$$

【辨析】 错解混淆了集合元素和子集的概念。M、N 是分别由 A、B 的真子集构成的集合，M、N 的元素都是集合，显然空集 ϕ，既是M又是N的元素，即 ϕ 是 M、N 两个集合的公共元素。$\therefore\quad M\cap N=\{\phi\}$。

$M\cap N=\phi$ 与 $M\cap N=\{\phi\}$ 的概念是不同的，前者指两个集合无公共元素，后者指两个集合有公共元素，公共元素是空集 ϕ。本题正确的答案应是 $M\cap N=\{\phi\}$。

3. 若集合 A、B、C 满足条件 $A\cup B=A\cup C$，则可以推得：(A) $B=C$； (B) $A\cap B=A\cap C$； (C) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$； (D) $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$。

【错解】 (A)。

【辨析】 错解没有正确理解题意，混淆了命题之间的关系。题意是要求从 $A\cup B=A\cup C$ 推出所列条件之一，是求使 $A\cup B=A\cup C$ 成立的必要条件，而不是充分条件，$B=C$ 是使 $A\cup B=A\cup C$ 成立的充分条件。

事实上，(A)、(B)、(C)都不一定成立，这容易举出反例，设全集 $I=A=\{0, 1\}$，$B=\{0\}$，$C=\{1\}$，则 $B\neq C$，$A\cap B=\{0\}$，$A\cap C=\{1\}$，$A\cap\overline{B}=\{1\}$，$A\cap\overline{C}=\{0\}$，这时 (A)、(B)、(C) 都不成立，而 $A\cup B=A\cup C$ 是成立的。

其实，从条件 $A\cup B=A\cup C$ 可以看出，B、C 两集合包含于 A 内的部分可以不一样，但是不含于 A 的部分则应是一样的。证明如下：$\because$ $A\cup B=A\cup C$， $\therefore$ $\overline{A}\cap(A\cup B)=\overline{A}\cap(A\cup C)$ 按照集合运算性质，得$(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap C)$，而$\overline{A}\cap A=\phi$ $\therefore$ $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$ $\therefore$ 正确答案应选(D)。

4. 设 $M=\{(x, y)\mid |xy|=1, x>0\}$，$N=\{(x, y)\mid \operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi\}$，求 $M\cup N$。

【错解】 $M=\{(x,y)\mid xy=\pm1, x>0\}$ 又 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi$，即 $\operatorname{arctg}x=\pi-\operatorname{arcctg}y$，两边取正切，得 $x=-\dfrac{1}{y}$，即 $xy=-1$。 $\therefore$ $N=\{(x, y)\mid \operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi\}=\{(x, y)\mid xy=-1\}$ 于是 $M\cup N=\{(x, y)\mid xy=1, x>0 \text{ 或 } xy=-1\}$

【辨析】 错解忽略了反三角函数的值域，因而造成错误，由反三角函数值域，$-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\operatorname{arcctg}y<\pi$。得知

等式 $\operatorname{arctg} x = \pi - \operatorname{arcctg} y$，仅当 $0 < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ 时才有可能成立，即 $x>0$。从而，$N = \{(x, y) \mid xy = -1, x>0\}$，$\therefore M \cup N = M$。

5．设 $A = \{(x, y) \mid |x+1| + (y-2)^2 = 0\}$，$B = \{-1, 0, 1, 2\}$。则 A、B 两个集合的关系是：(A) $A \supset B$；(B) $A \subset B$；(C) $A \in B$；(D) 以上都不对。

【错解】 (B)。

【辨析】 选择 (B) 的错误是集合概念模糊，误以为 $A = \{-1, 2\}$，其实 $A = \{(x, y) \mid |x+1| + (y-2)^2 = 0\} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}\right\} = \{(-1, 2)\}$。$A$ 是点集而 B 是数集，正确答案应选 (D)。

6．设集合 $A = \{a, b\}$，$B = \{b, c\}$。求 $\{A$ 的子集$\} \cap \{B$ 的子集$\}$。

【错解】 $\{A$ 的子集$\} \cap \{B$ 的子集$\} = \{b\}$。

【辨析】 错解混淆了集合的元素和集合的子集的概念。很明显：

$$\{A\text{ 的子集}\} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\{B\text{ 的子集}\} = \{\phi, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$$

它们的交集，是由它们公共元素所组成的集合，因此是 $\{\phi, \{b\}\}$ 而不是 $\{b\}$。

7．设集合 $M = \{0, 1\}$，集合 $N = \{x \mid x \subseteq M\}$，则 M 与 N 的关系是：(A) $M \in N$；(B) $N \in M$；(C) $M \subseteq N$；(D) $M = N$。

【错解】 (C).

【辨析】 选择(C)是错误地认为M、N是两个集合，集合之间只能是包含和相等的关系，故排除了(A)、(B)，而N的元素较M多，故选(C)。然而这样的想法是错误的。两集合之间的关系，可以不包含，亦不相等，由于$M=\{0,1\}$，$x\subseteq M$表示x是M的子集，故

$$N=\{\phi,\ \{0\},\ \{1\},\ \{0,1\}\}$$

而$M\subseteq N$是表示集合M中的元素都在N内，M的元素是0和1，而N的元素都是集合，显然，M的元素不属于N，故认为$M\subseteq N$是错误的，正确的答案应选(A)。

8．设集合

$$M=\left\{x\,\middle|\,x=\cos\frac{5m\pi}{12},\ m\in N\right\},$$

$$N=\left\{y\,\middle|\,y=\cos\frac{n\pi}{12},\ n\in N\right\},$$

则集合M与N的关系是：$(A)M=N$；$(B)M\supset N$；$(C)M\subset N$；$(D)M\neq N$。

【错解】 (C).

【辨析】 错解片面地认为$\frac{5m\pi}{12}(m\in N)$能取到的值，$\frac{n\pi}{12}(n\in N)$都能取到，只要取$n=5m$即可，而$\frac{n\pi}{12}(n\in N)$能取到的值，$\frac{5m\pi}{12}$则未必能取到。其实，这种想法没有考虑到三角函数的周期性和求的是函数值。虽然$\frac{5m\pi}{12}(m\in N)$不能都取到$\frac{n\pi}{12}$所取到的值，但是，由于

$$\cos\frac{n\pi}{12}=\cos\left(2n\pi+\frac{n\pi}{12}\right)=\cos\frac{25n\pi}{12}=\cos\frac{5\cdot5n\pi}{12}$$

只要取 $m=5n$ 就能得到同样的余弦值，即当 $m=5n(n\in N)$ 时

$$\cos\frac{5m\pi}{12}=\cos\frac{n\pi}{12}$$

由 $N\supseteq M$ 和 $M\supseteq N$，得到 $M=N$，$\therefore$ 正确答案应选(A)。

9．设集合 $M=\{x|x=12a+8b,\ a、b\in Z\}$，$N=\{y|y=20c+16d,\ c、d\in Z\}$则：$(A)\ M\subset N$；$(B)\ M\supset N$；$(C)\ M=N$；$(D)$ 以上结论都不对。

【错解】 (D)。

【辨析】 错解仅依据集合 M 与N的元素表达的形式不同，就认为集合M中有元素不属于 N，集合N中有元素不属于 M，于是错选(D)。

其实，由 $y\in N$，$y=20c+16d=12c+8(c+2d)$，$\because$ $c、d\in Z$，$\therefore$ $c+2d\in Z$，得 $y\in M$。$N\subseteq M$。又由 $x\in M$，$x=12a+8b=20a+8(b-a)$若 a、$b\in Z$，且 a、b 同奇偶，则 $8(b-a)=16\cdot\frac{b-a}{2}\left(\frac{b-a}{2}\in Z\right)$，$\therefore$ $x\in N$，若 a、$b\in Z$，且 a、b为一奇一偶，则 $x=20(a-2)+16\cdot\frac{b-a+5}{2}\left(\frac{b-a+5}{2}\in Z\right)$，得 $x\in N$，$M\subseteq N$ $\therefore$ $M=N$，正确答案应选(C)。

10．设集合 $A=\{(x,y)|x^2-y^2=1\}$，

$$B=\{(x,y)|y^2\leqslant 3(x+3)\},$$

$$C=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x^{-1}\geqslant 4x\\ y\in R\end{cases}\right\},$$

当点$(x,y)\in D=A\cap B\cap C$ 时，求 $y-2x$ 的最小值。

【错解】 由方程组

$$\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y^2=3(x+3),\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=-2\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases} \text{和} \begin{cases}x=5\\ y=\pm2\sqrt{6}。\end{cases}$$

又 $\because$ $x^{-1}\geqslant 4x$, 即 $\frac{1}{x}\geqslant 4x$。当 $x>0$ 时，得 $x^2\leqslant\frac{1}{4}$， $\therefore$ $0<x\leqslant\frac{1}{2}$; 当 $x<0$ 时，得 $x^2\geqslant\frac{1}{4}$， $\therefore$ $x\leqslant\frac{-1}{2}$. 于是

$$C=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}0<x\leqslant\frac{1}{2}\\ y\in R\end{cases} \text{或} \begin{cases}x\leqslant-\frac{1}{2}\\ y\in R\end{cases}\right.\right\},$$

$$\therefore\quad D=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x^2-y^2=1\\ -2\leqslant x\leqslant\frac{-1}{2}\end{cases}\right.\right\},$$

即交集 D 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 在点 $M(-2,-\sqrt{3})$、$N(-2,\sqrt{3})$间的一段弧。亦即

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant-1\\ -\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}。\end{cases}$$

$\therefore$ $2-\sqrt{3}\leqslant y-2x\leqslant 4+\sqrt{3}$， 因此，$y-2x$ 的最小值是 $2-\sqrt{3}$。

【辨析】 虽然，根据不等式性质，由

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant-1\\ -\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}\end{cases}$$

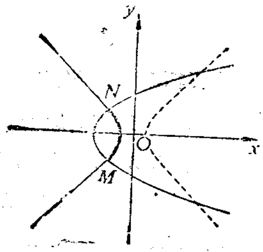
推出 $2-\sqrt{3}\leqslant y-2x\leqslant 4+\sqrt{3}$ 是正确的，但是，其中等号取不到，而要 $y-2x$ 取到 $2-\sqrt{3}$，就要 $x=-1$、$y=-\sqrt{3}$，这是不可能的，因为它不是双曲线 $x^2-y^2=1$ 上的点。由于所求的点 (x,y) 是在双曲线 $x^2-y^2=1$ 的弧 MN 上，x、y 不是互相独立的，不能由两个不等式 $-2\leqslant x\leqslant-1$ 和 $-\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$ 分别来

确定 x、y 的最大最小值，这种做法得不到正确结果。

【正解】 如上，不难求得

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x^2-y^2=1\\ -2\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{2}\end{cases}\right.\right\},$$

即交集 D 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 在点 $M(-2,-\sqrt{3})$、$N(-2,\sqrt{3})$ 间的一段弧。设 $y-2x=t$ 而求 $y-2x$ 的最小值，就是求，当点 $(x、y)$ 在双曲线 $x^2-y^2=1$ 的弧 MN 上移动时，直线 $y=2x+t$ 在 y 轴上的截距的最小值。如图，可能的情况是取在点 $M(-2,-\sqrt{3})$，或者顶点 $(-1,0)$，或者直线 $y=2x+t$ 与双曲线相切时。设直线 $y=2x+t$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 相切于点 (x_0,y_0)，则切线方程为 $x_0x-y_0y=1$，



比较系数得到 $\dfrac{x_0}{y_0}=2$，且 $x_0^2-y_0^2=1$，解得

$$\begin{cases}x_0=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\[2ex] y_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \text{和} \begin{cases}x_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\\[2ex] y_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\text{（舍）。}$$

于是在切点 $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 时，$t=y-2x=\sqrt{3}$；在顶点 $(-1,0)$ 时，$t=y-2x=2$；在点 $M(-2,-\sqrt{3})$ 时，$t=y-2x=4-\sqrt{3}$。$\therefore$ 所求 $y-2x$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，在点 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 处取到。

11． 设 $a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=9$，求 $ax+by$ 的最大值。

【错解】 $\because \quad ax\leqslant\frac{1}{2}(a^2+x^2),\quad by\leqslant\frac{1}{2}(b^2+y^2)$，

$$\therefore \quad ax+by\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2+x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{2}(1+9)=5$$

$\therefore \quad ax+by$ 的最大值是 5。

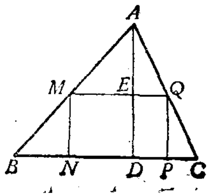
【辨析】 错解的结论是错误的，显然 $ax+by$ 的最大值取不到 5，即等号不能成立。因要取到等号，必须 $a=x$ 并且 $b=y$，这样就陷入矛盾：$1=a^2+b^2=x^2+y^2=9$。其实，从本质上说，$a^2+b^2=1$，$x^2+y^2=9$ 是两个圆。

【正解】 设

$$\begin{cases}a=\cos\theta\\ b=\sin\theta,\end{cases}\quad \begin{cases}x=3\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi,\end{cases}$$

则 $ax+by=3(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)=3\cos(\theta-\varphi)\leqslant3$，当 $\theta=\varphi$ 即 $\begin{cases}x=3a\\ y=3b\end{cases}$ 时取到等号。$\therefore$ $ax+by$ 的最大值为 3。

12． 如图，$\triangle ABC$ 中，底 $BC=a$，高 $AD=h$，$MNPQ$ 为一边在底 BC 上的内接矩形，设 $MN=x$，试将矩形的周长 p 表示为 x 的函数。



【错解】 由题意，$MNPQ$ 为矩形，则

$$\frac{AE}{AD}=\frac{MQ}{BC},\quad \frac{h-x}{h}=\frac{MQ}{a},$$

$$\therefore \quad MQ=\frac{a(h-x)}{h},$$

于是矩形的周长 $p=2\left(a+x-\frac{a}{h}x\right)$。

【辨析】 错解疏忽了函数的定义域。对应法则与定义域是函数的两个重要部分，尤其是在应用问题中，不能遗漏函数的定义域。正确答案是 $p=2\left(a+x-\frac{a}{h}x\right)(0<x<h)$。

13. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$，求函数 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)(a\leqslant 0)$的定义域。

【错解】 $g(x)$的定义域为

$$\begin{cases}0<x+a\leqslant 1,\\0<x-a\leqslant 1,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-a<x\leqslant 1-a,\\a<x\leqslant 1+a.\end{cases}$$

∴　函数的定义域为 $-a<x\leqslant 1+a$。

【辨析】 错解没有对 a 进行讨论是不完整的。当 $a\leqslant 0$ 时，不等式 $-a<a+1$ 都能成立吗？显然，当 $a<0$ 时要 $1+a>-a$ 成立，必须 $a>-\frac{1}{2}$。故当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，函数 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$的定义域为 $-a<x\leqslant 1+a$。

14. 设 $f^{-1}[f^{-1}(x)]=25x-30$，求一次函数 $f(x)$。

【错解】 令 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$。一次函数的反函数 $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$，$f^{-1}(x)$的反函数就是$f(x)$，故 $f(x)=f^{-1}[f^{-1}(x)]=ax+b$，∵ $f^{-1}[f^{-1}(x)]=25x-30$，故 $f(x)=25x-30$。

【辨析】 $f^{-1}[f^{-1}(x)]$的意思是 $f[f^{-1}(x)]$的反函数，而不是指 $f^{-1}(x)$的反函数，错解混淆了 $f^{-1}[f^{-1}(x)]$与 $f^{-1}(x)$的反函数这两个不同的概念。

【正解】 令 $f(x)=ax+b\quad(a\neq 0)$，$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$。显然

$$f^{-1}[f^{-1}(x)]=f^{-1}\left(\frac{x-b}{a}\right)=\frac{\frac{x-b}{a}-b}{a},$$

$$\therefore\quad f^{-1}[f^{-1}(x)]=\frac{1}{a^2}x-\frac{b(1+a)}{a^2}=25x-30.$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}=25,\\ \frac{b(1+a)}{a^2}=-30.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\ b=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-\frac{1}{5},\\ b=-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

$\therefore$ 所求一次函数为 $y=\frac{1}{5}x-1$，$y=-\frac{1}{5}x-\frac{3}{2}$.

15. 已知函数 $f(x)=(m^2-5m+6)x^{m^2-3m+1}$，问$m$为何值时，(1) $f(x)$为正比例函数；(2) $f(x)$为反比例函数.

【错解】 (1) 当 $m^2-3m+1=1$ 时，$f(x)$为正比例函数，由 $m^2-3m=0$ 可知，当 $m=0$ 或 $m=3$ 时，$f(x)$为正比例函数. (2) 当 $m^2-3m+1=-1$ 时，$f(x)$为反比例函数，由 $m^2-3m+2=0$ 可知，当 $m=2$ 或 $m=1$ 时，$f(x)$为反比例函数.

【辨析】 错解在于没有严格按照正、反比例函数的定义解题. 一般称形如 $y=kx(k\neq0)$ 的函数为正比例函数；形如 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的函数称反比例函数. 显然错解没有考虑 $k\neq0$ 这个条件.

【正解】 (1) $\begin{cases}m^2-3m+1=1\\ m^2-5m+6\neq0\end{cases}$ 时，$f(x)$ 为正比例函数.

解得 $m=0$. $\therefore$ 当 $m=0$ 时，$f(x)$为正比例函数. $f(x)=6x$.

(2) $\begin{cases}m^2-3m+1=-1\\ m^2-5m+6\neq0\end{cases}$ 时，$f(x)$为反比例函数. 解得 $m=1$.

$\therefore$ 当 $m=1$ 时，$f(x)$ 为反比例函数．$f(x)=\dfrac{2}{x}$．

16．试确定 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 的奇偶性．

【错解】 $\because$ $f(-x)=\sqrt{\cos(-x)-1}=\sqrt{\cos x-1}$
$=f(x)$，

$\therefore$ $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 是偶函数，

【辨析】 错解考虑不完整．事实上，$f(x)=0$，$x=2k\pi$ $(k\in Z)$．可见 $f(x)$既是奇函数，又是偶函数．

17．判断 $f(x)=\dfrac{(x+a)x^2}{x+a}$ 的奇偶性．

【错解】 $\because$ $f(-x)=\dfrac{[(-x)+a]\cdot(-x)^2}{[(-x)+a]}=x^2$

$$=\frac{(x+a)x^2}{x+a}=f(x),$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{(x+a)x^2}{x+a}\text{ 是偶函数.}$$

【辨析】 上述判断是错误的．当 $a\neq0$ 时，函数的定义域为 $(-\infty,\ -a)\cup(-a,\ +\infty)$，不关于原点对称，它不是偶函数．因为 $f(a)$有定义，而 $f(-a)$没有定义，更谈不上能否成立$f(-a)=f(a)$了．函数的定义域关于原点对称是函数成为奇、偶函数的前提，即必要条件．若得不到满足就不是奇函数也不是偶函数．

【正解】 (1) 当 $a\neq0$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\ -a)\cup(-a,\ +\infty)$，定义域不对称于原点，故函数既非奇又非偶．

(2) 当 $a=0$ 时，

$$f(x)=\frac{x\cdot x^2}{x}=x^2,$$

定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$。满足 $f(-x)=f(x)$。 $\therefore$ $f(x)$是偶函数。

18. 若$(1,\ +\infty)$为二次函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x-2$ 的递增区间，求 a 的取值范围。

【错解】 很明显，$a>0$。

$\because\quad f(x)=a\left(x+\dfrac{a-2}{2a}\right)^2-\dfrac{8a+(a-2)^2}{4a}$，

$\therefore\quad -\dfrac{a-2}{2a}>1$，解得 $a<\dfrac{2}{3}$。 $\therefore$ a 的范围为 $0<a<\dfrac{2}{3}$。

【辨析】 错解是错误的。只要取 $a=1$，它不在所求得的范围内，而此时函数 $f(x)=x^2-x-2$，当 $x>1$ 时是递增的。产生错误的原因是利用函数图像解题时判断错误。要 $x>1$ 时函数增大，它的对称轴必须在直线 $x=1$ 的左方而不是在右方，即 $-\dfrac{a-2}{2a}<1$，而不是 $-\dfrac{a-2}{2a}>1$。

【正解】 $f(x)=a\left(x+\dfrac{a-2}{2a}\right)^2-\dfrac{(a+2)^2}{4a}$。根据二次函数的图像的性质，要且只要 $a>0$ 和 $-\dfrac{a-2}{2a}<1$。解得 $a>\dfrac{2}{3}$。

$\therefore$ 当 $a>\dfrac{2}{3}$ 时，$(1,\ +\infty)$为函数的递增区间。

19. 如果二次项系数为正的二次函数 $f(x)$ 对任意实数 x 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，试比较 $f\left(\arcsin\dfrac{18}{20}\right)$与 $f\left(\arcsin\dfrac{19}{20}\right)$的大小。

【错解】 由 $f(1+x)=f(1-x)$，知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称。 $\therefore$ 可设二次函数 $f(x)=a(x-1)^2+k$（其中

a、k 为常数，$a>0$)。由 $x<1$ 时，$f(x)$ 单调减小，又 $\arcsin\frac{18}{20}<\arcsin\frac{19}{20}$，∴ $f\left(\arcsin\frac{18}{20}\right)>f\left(\arcsin\frac{19}{20}\right)$。

【辨析】 错解中，认为 $\arcsin\frac{18}{20}$、$\arcsin\frac{19}{20}$ 在区间(0, 1)范围内是错误的，错误地将反正弦函数的定义域 $[-1, 1]$ 认为是值域。事实上，∵ $\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{18}{20}<\frac{19}{20}$，由反正弦函数单调性，得

$$1<\frac{\pi}{3}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}<\arcsin\frac{18}{20}<\arcsin\frac{19}{20},$$

可见 $\arcsin\frac{18}{20}$、$\arcsin\frac{19}{20}$ 均大于1，当 $x>1$ 时，$f(x)=a(x-1)^2+k(a>0)$ 是单调增加，

$$\therefore\quad f\left(\arcsin\frac{18}{20}\right)<f\left(\arcsin\frac{19}{20}\right).$$

20．设 $f(x)=\log_a(x+1)(a>0,\ a\neq1)$，且在 $(-1, 0)$ 内 $f(x)>0$，试讨论 a 的取值范围以及 $f(x)$ 的单调性。

【错解】 (1) 当 $a>1$ 时，$f(x)=\log_a(x+1)$ 单调增加。(2) 当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a(x+1)$ 单调减少。

【辨析】 错解只是教条地搬用基本对数函数的单调性，而不联系实际情况，忽视了在 $(-1, 0)$ 内 $f(x)>0$ 的条件，因而造成错误。其实条件当 $x\in(-1, 0)$ 时 $f(x)>0$ 就是 $(1+x)\in(0, 1)$ 时，$\log_a(1+x)>0$，∴ 当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a(1+x)$ 是减函数。

21．求函数 $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x^2-x-6)$ 的单调增大区间。

【错解】 由$2x^2-x-6>0$，得$x>2$，$x<-\frac{3}{2}$。∴函数

$$y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x^2-x-6)$$

的定义域为$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)\cup(2, +\infty)$。又

$$2x^2-x-6=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-6\frac{1}{8}。$$

当$x>\frac{1}{4}$时，二次函数$2x^2-x-6$单调增大。∴函数$y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x^2-x-6)$的单调增大区间为$x>2$。

【辨析】 错解没有考虑对数函数的底数与单调性的关系，又没有依照函数单调性的定义进行讨论而只考虑二次函数的单调性，因而发生错误。函数$y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x^2-x-6)$是由函数$y=f(u)=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}u$，与函数$u=u(x)=2x^2-x-6$复合而成的。当$x_1<x_2<-\frac{3}{2}$时，$u(x)$是单调减小的，即有$u(x_1)>u(x_2)$。又$\because 0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ ∴ $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}u$是单调减小函数，由于$u_1>u_2$，于是$f(u_1)<f(u_2)$，于是当$x_1<x_2<-\frac{3}{2}$时，$f[u(x_1)]<f[u(x_2)]$，即$y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x^2-x-6)$的单调增大区间为$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$。顺便指出单调减小区间是$(2, +\infty)$。

22. 已知$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$，若$B\subseteq A$，求实数$a$的范围。

【错解】 依题意，不等式$x^2-2ax+a+2\leqslant 0$的解集应是A的子集。令$f(x)=x^2-2ax+a+2$，只需