函授师范專科数学科

幾何復习與研究講義

（平面部分）

河北省教师进修学院

編写說明

本講义是为我省函授师范專科的"几何复习与研究"課編写的。平面、立体兩部分，分为兩册出版。

在編写时參考了北京师范大学平面几何講义、河北北京师范学院几何复习与研究講义、別列标尔金著的初等几何教程及中学几何課本。

为了增进函授生处理中学几何教材的能力，对几何学里的一些基本概念、証題的一般方法、軌迹与作图、合同变换及位似变换等項，作了較严密較詳細的講述；对中学几何定理，作了一些必要的补充。

为了适应业余进修的特点，將师范專科試行教学大綱里所規定的某些內容，作了精簡。

本講义初稿，虽然經过集体討論修正，力求体系完整、論証准確、叙述通暢，但是不妥之处，仍难避免，希望同志們指正。

目 录

第一章　引　言

§1　几何的产生

几何观念的发生牽涉到非常远的年代，有些数学家認为几何的产生与古代埃及的文化有关。

由于尼罗河的定期泛濫，兩岸田亩地界常被淹没，測量土地的方法自然要应运产生。根据历史遺留下来的材料，証实大約在公元前1700年，埃及人就采取了边長为單位長度的正方形的面积作为面积的單位，知道了矩形、三角形和梯形面积的計算方法。他們把边長为圓的直徑的$\frac{8}{9}$的正方形面积作为圓面积（相当于$\pi=3.1605$）。他們对体积計算也有很多成就，知道了以兩正方形为底的棱台体积公式：

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2),\qquad a、b是底边長，h为高。$$

在我国方面，对几何問題的研究，也有許多光輝的成就。我国最早的数学書周髀算經和九章算术里記載了許多关于几何的研究（其中方亭体积公式，与前棱台体积公式相同）。周髀算經上記有周公和商高（約当公元前1120年）的問答語，其中有："……勾广三，股修四，徑隅五"。勾广就是勾長，股修就是股長，徑隅就是弦長。簡單說来，就是"勾三股四弦五"。一切直角三角形中，三边之比最簡單的莫过于"勾三股四弦五"，因此，这种三角形叫做商高三角形。該書又記載陈子（約当公元前700年）答荣方問，說："若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日"。这就是有名的勾股定理。

再者，我国战国时代的墨子（約当公元前480——390年），著有墨經十五卷，其中有关于几何的理論。例如墨經上說："圜，一中同長也"。这里的"圜"就是圓，就是說圓有唯一中心，并且这个中心

至圓上任何点的距离相等。又說：“方，柱隅四杂也”。这里的“方”是指矩形，“隅”就是直角，“杂”同匝，就是边的意思，就是說矩形有四边，且各角就是直角。这样对“圜”、“方”所下的定义，字句簡單確切。

总括說来，在很远的年代，我国和埃及都單独地累积了許多几何材料。这門科学也和其他科学一样，是由于人类生活和生产的需要而发生的。

古代埃及和我国虽然累积了許多几何材料，但是还沒有組織成为一門系統的科学，这只不过几何发展的第一个阶段。后来，埃及的几何知識漸漸傳入希臘，希臘学者把丰富的几何材料加以去粗取精，去伪存眞，由此及彼，由表及里的改造功夫，造成概念和理論的系統，是几何发展的第二个阶段。用邏輯推理方法来研究几何学，是希臘学者的功劳，集其大成的就是欧几里得(大約当公元前330——275年)。十九世紀以前，所有初等几何的著作都离不了欧几里得的“几何原本”的巢臼。到了十九世紀，有了非欧几何与近代公理学的建立，几何学才获得了新的生命，擺脫了傳統的几何观念，这是几何发展的第三个阶段，应归功于俄国的数学家罗巴切夫斯基及德国的数学家希尔伯特。

§2 欧几里得及其几何原本

一、几何原本 欧几里得是古代大几何学家之一，他所編写的“几何原本”給出几何原理完全而且是有系統的叙述。

“几何原本”共分十三卷，前十卷的內容是平面几何、比例理論、算术理論(包括有名的輾轉相除法)，后三卷的內容是立体几何。第一卷包含着三角形合同的条件、三角形边和角間的关系、平行綫的理論和三角形及多边形等积的条件。第二卷包含着代数恒等式的几何解釋和黃金分割。第三卷講圓。第四卷講圓的內接和外切正多边形。第五卷講比例理論。第六卷講相似形。

由上可知，“几何原本”的內容是普通初等几何材料，有許多在欧几里得时代已經知道的几何材料(如圓錐曲綫理論)，在“几何原本”

里并沒有提到。

二、欧氏定义、公設和公理 "几何原本"的每一卷都对一些概念給出了定义。对某些基本概念（点、直綫、平面），是用通俗語言来描述它的特性。这样的定义方法叫描述法。因为初学者容易接受，所以直到现在，中学几何課本还沿用这种方法。"几何原本"的突出特点是提出一些公理、公設(欧几里得并沒有說明公理和公設的区别)作为論証其他命題的根据，建立了几何学的邏輯体系。

"几何原本"第一卷先提出二十三个定义，我們引进其中最先的八个：

定义 1 点沒有部分。

定义 2 綫有長度沒有寬度。

定义 3 綫的界限是点。

定义 4 直綫是这样的綫，它对于它的所有各点都有同样的位置。

定义 5 面只有長度和寬度。

定义 6 面的界限是綫。

定义 7 平面是这样的面，它对于在它上面的所有直綫有同样的位置。

定义 8 平面角是位置在一个平面上的兩条相交直綫的傾斜度。

在定义以后欧几里得引进公設和公理。

公設 1 从每个点到每一个别的点必定可以引直綫。

公設 2 每条直綫都可以无限延長。

公設 3 以任意点作中心可以用任意半徑作圓。

公設 4 所有的直角都相等。

公設 5 每当一条直綫与另外兩条直綫相交，有一側的兩个同側內角的和小于兩直角时，这兩条直綫就在同側內角的和小于兩直角的那一側相交。

公理 1 等于同量的量相等。

公理 2 等量加等量得到等量。

公理 3 等量减等量得到等量。

公理 4 不等量加等量得到不等量。

公理 5 等量的兩倍相等。

公理 6 等量的一半相等。

公理 7 能迭合的量相等。

公理 8 全部大于部分。

公理 9 兩条直綫不能包圍一部分空間。

在公理后面歐几里得叙述定理，按着邏輯的相关决定它們的次序，每一个命題都要根据前面的公設、公理和命題来証明。

明万历三十五年徐光启（**1562——1638**）与意大利人利瑪竇合譯"几何原本"前六卷，人类历史上关于几何的第一部杰作傳入了我国。

§3 "几何复习与研究"課的对象

現在中等学校所用的初等几何課本，在内容上基本和歐几里得的"几何原本"相同，在方法上也采用綜合法。为了初学几何的学习方便，对某些几何概念及邏輯論証不得不在一定程度上依靠图形的直觉，而不按公理法来严格要求。

"几何复习与研究"課的主要內容和中学所用的初等几何課本大致相同，但是对某些主要概念則用較严密的观点講述，对定理的內容作了必要的整理与补充。

在几何学里，对一个概念要有確切的定义，也就是說，新概念要用以前已下过定义的旧概念来解釋，而旧概念也要有它自己的定义。这样繼續下去，当然沒有止境，因而不得不从具体事物找出一些認为最簡單的无需也不可能解釋的概念当做最原始的不定义的概念。在近代几何学里，把"点"、"直綫"、"平面"当做原始不定义的概念，对它們的基本性質，則用一些不加証明而認为眞確的命題——公理——来描述，根据这些少数的公理，用严格的邏輯推理方法，推导其他性質。例如：根据公理"通过兩个已知点，有一条且只有一条直

綫”，可以推導出“兩直綫至多只有一个公共点”。

本講义所采用的公理体系，將由第三章开始介紹。为了作較严密的論証，举出了中学几何課本里缺少的一些公理；另一方面，为了切合实际，便于教学，又把某些可由严格公理体系推証出来的定理当做公理，并且把一些按严格講法应当添加公理为根据的概念当做明显的事实。

总括說来，“几何复习与研究”課的主要对象是初等几何学，在材料处理上是对中学几何課本作了必要的补充和整理，在邏輯論証上，比起中学几何課本来是比較严密的。

§4 “几何复习与研究”課的任务

本学科的設置目的是使初級中学教师能充分地指导中等学校学生的几何学习。其具体任务是：

对中学几何作系統地复习，从而加深学員对几何邏輯結構的知識；

对中学几何里的主要概念作深入研究，对定理作系統地整理与补充，从而使学員掌握比中学教材較深較广的科学知識。

第二章　几何命題与推証通法

§5　几何命題

命題　数学里判断一种事物的語言叫做命題。它包括兩部分——前提与結論。引言中所說的公理及本节里要講的定义都是命題，它們是不需要証明而規定的命題；除此以外，还有需要証明后才能断定它的眞实性的命題——定理。

公理　在实踐中，由經驗总結出来的，不加証明而認为眞確的命題叫做公理。公理是推理的根据。

定义　几何里有很多專用名詞，知道了这个名詞的意义，就是对它有了一个概念。除了少数的基本概念（最簡單而无需解釋的概念）外，对每一个概念必須說明它的特殊性質，用以区别于别的概念，并確定它所适用的是哪些对象。这样，对一个概念的確切說明就叫做这个概念的定义。定义也是推理的根据。

給一个名詞下定义，要注意下列四点：

一、定义的条件不应广泛或偏狹　例如："圓是閉口的曲綫"，这样的定义太广泛了；"各边相等的四边形是平行四边形"，这样的定义太偏狹了。

二、定义不要顚倒循环　例如："直角就是含有九十度的角，而一度的角就是一直角九十分之一"，这样就根本沒有說明直角与度的意义。

三、定义不应是否定的　例如："菱形不是正方形"，这样就无法說明菱形的特征。

四、定义要显明精確　例如："无起止的綫叫做直綫"，这样就难以明確直綫的特征。

定理 定理是根据公理或定义而証明为真实的命題。定理包括題設和題断（結論）兩部分。定理中已知条件部分叫做題設；需要証明的部分叫做題断。例如："若兩条直綫有一公共点，則它們不可能有第二公共点"，这个定理的題設是"兩条直綫有一公共点"；題断是"它們不可能有第二公共点"。

"系" 系是直接根据某定理証明为真实的命題，所以有的書上也叫做推論。系和定理沒有本質的不同。当然，系也可以直接根据某公理某定义来証明。总之，它是属于某公理、某定义或某定理的一些較明显的命題。

§6 定理的形式

一、定理的結構

定理是根据公理或其他已由公理証明为真实的命題經过邏輯推証認为真实的命題，所以定理就是叙述題設和題断間的必然关系；換句話說，定理无非是說有了这样的題設就必然得到那样的題断。所以定理的意义就是題設隐含題断，可用記号表示如下：

題設$\Longrightarrow$題断。

例如："等腰三角形的底角相等"，这个定理的意义是說："一个三角形若是等腰的（題設）"，則"它的底角必相等（題断）"。用記号表示，就是：

在$\triangle ABC$中，$AB=AC\Longrightarrow\angle B=\angle C$。（图1）

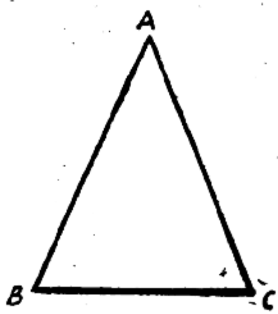


图 1

有一些定理的題設中和題断中或者二者中所指出的事件不是單一的，这时便需要把它們詳細分为若干条，才能清楚地了解这个定理的結構。例如"等角的鄰补角相等"一定理，它的題設里面含有三个事項，而題断則仅含一个事項，用記号表

示时，应如（图2）：

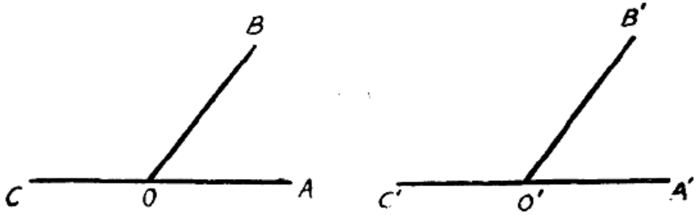


图 2

$$\left.\begin{array}{l}\angle AOB=\angle A'O'B'\\ \angle BOC\text{是}\angle AOB\text{的鄰补角}\\ \angle B'O'C'\text{是}\angle A'O'B'\text{的鄰补角}\end{array}\right\}\Longrightarrow\angle BOC=\angle B'O'C'。$$

二、定理的变位和变質

定理是由題設和題断兩部分構成的。把一个定理中的題設和題断兩部分的位置互相交换，也就是說把題設部分改换为題断，而把原来的題断部分改换为題設，这样的位置交换叫做变位。經过变位得到的新命題叫做原定理的“逆命題”。

例如：定理“在△ABC中，若AC>BC，則∠B>∠A”的逆命題是：“在△ABC中，若∠B>∠A，則AC>BC”。这样，换位后得到的是眞实的命題，就把它叫做原定理的逆定理。

又如：定理“凡直角都相等”的逆命題是：“凡相等的角都是直角”。我們知道，这个命題并不眞实。

通过这兩个例，可以知道一个定理的逆命題可以眞实，另一个定理的逆命題可以不眞实。当一个定理的逆命題为眞实时，才叫做原定理的逆定理。

如將一个定理中的題設和題断都改变为其反面，原为“肯定語气”变为“否定語气”，这样的变换叫做变質。經过变質得到的新命題叫做原定理的“否命題”。

例如：定理“在△ABC中，若AC>BC，則∠B>∠A”的否命題

是："在△ABC中，若$AC \ngtr BC$，則$\angle B \ngtr \angle A$"。这样，变質后得到的是眞实的命題，就把它叫做原定理的否定理。

又如：定理"凡直角都相等"的否命題是"凡不是直角的角都不等"，这个命題不眞实。

通过这兩个例，可以知道一个定理的否命題可以眞实，另一个定理的否命題可以不眞实。当一个定理的否命題为眞实时，它就叫做原定理的否定理。

一个定理經过变位和变質，得到的新命題叫做原定理的"逆否命題"。

例如：定理"在△ABC中，若$AC > BC$，則$\angle B > \angle A$"的逆否命題是"在△ABC中，若$\angle B \ngtr \angle C$，則$AC \ngtr BC$"。这样，經过变位和变質后得到的新命題是眞实的，就把它叫做原定理的逆否定理。

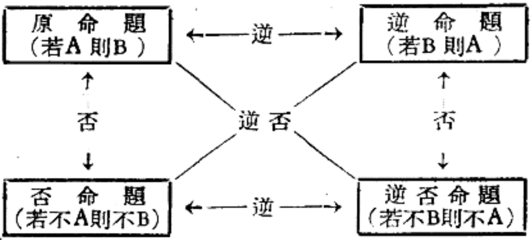
又如：定理"凡直角都相等"的逆否命題是"凡不相等的角不都是直角"，这个新命題也眞实，所以它也叫做原定理的逆否定理。

三、定理的四种形式及其等效性

把一个定理的題設和題断經过变位或变質或变位和变質，就得到四种不同的形式如下：

甲	原命題	若A則B
乙	逆命題	若B則A
丙	否命題	若不A則不B
丁	逆否命題	若不B則不A

乙、丙、丁三种命題对甲定理來說，依次叫做逆命題、否命題和逆否命題，如果能够判断为眞实时，就依次叫做逆定理、否定理、逆否定理。这四种命題間的相互关系，可以用下图来表示：



图中用横綫連結的命題互为逆命題，用縱綫連結的命題互为否命題，用斜綫連結的命題互为逆否命題。

应当注意的是兩个互逆命題或兩个互否命題，可以都眞实，可以都不眞实，也可以一个眞实而另一个不眞实。但是互为逆否的兩个命題一定是同为眞实或同为不眞实，也就是說，原定理的逆否命題一定眞实而为逆否定理。因为根据定理“若A 則B ”可以利用間接証法来証明这个定理的逆否命題“若不B 則不A ”一定眞实而成为逆否定理。証明如下：

引用間接証法，否定“若不B則不A”的結論。假定“有A”；那么，根据“若A則 B ”則应当有“有 B”，而这就与所要証明的命題“若不B則不A”里的題設“不B”互相矛盾。故知“若不B 則不 A ”为眞实。

反过来，若知“若不B則不A”为眞实，也可以証明“若A則B ”为眞实，所以說原命題与其逆否命題間有等效关系，也就是說，这兩个命題的叙述形式虽然不同，实际上是有完全相同的意义和作用。

命題的等效关系，在几何学里有很大的价值，因为有了这个等效关系，就可以只討論原定理和逆命題了；或者只討論原定理和否命題。这就是說，四个命題中，只要研究其中兩个就可以了。

例如：

（1）原定理　三角形中，若兩边相等，則其对角也相等；（眞）

（2）逆命題　三角形中，若兩角相等，則其对边也相等；（眞）

（3）否命題　三角形中，若兩边不等，則其对角也不等；（眞）

（4）**逆否命題**　三角形中，若兩角不等，則其对边也不等。（眞）

又如：

（1）**原定理**　若二綫段是矩形的对角綫，則它們相等；　（眞）

（2）**逆命題**　若二綫段相等，則它們是矩形的对角綫；　（伪）

（3）**否命題**　若二綫段不是矩形的对角綫，則它們不相等；（伪）

（4）**逆否命題**　若二綫段不相等，則它們不是矩形的对角綫。（眞）

下面研究“充分条件”、“必要条件”及“充分且必要条件”。

（1）**充分条件**　如命題“若A則B”成立，我們就說A是B的充分条件；也就是說，只要有条件A就可以保証結論B的存在。

（2）**必要条件**　如命題“若不A則不B”成立，我們就說A是B的必要条件；也就是說，若沒有A則沒有B，条件A对結論B的出現是必要的。应当注意命題“若不A則不B”与命題“若B則A”等效，所以命題“若B則A”成立时，我們就說A是B的必要条件。

（3）**充分且必要条件**

如命題“若A則B”成立，

且命題“若不A則不B”也成立，

我們就說A是B的充分且必要条件；或者

如命題“若A則B”成立，

且命題“若B則A”也成立，

我們就說A是B的充分且必要条件。

因而要說条件A是結論B的充分且必要条件时，必須就兩个命題（原命題与其否命題或原命題与其逆命題）来研究。

所以当一个定理的逆命題眞实而成为逆定理时，則題設同时是題断的充分且必要条件；而題断同时也是題設的充分且必要条件。

§7　逆定理的制造法

一个定理的逆命題如果眞实，則这个逆命題就叫做原定理的逆定理。逆定理是把原定理的題設和題断变位而得到的。故若原定理的題