数理化生园地

14

1984/12

上海科学技术出版社

数理化生园地

14

(1984/12)

上海科学技术出版社出版
新华书店上海发行所发行
(上海市瑞金二路四五〇号)
上海商务印刷厂印刷

统一书号：13119·1227
定 价： 0.20元

学 辅导

——谈学习立体几何的一种思维方法

朱习华　（中山大学数学系）

（一）从一个定值问题谈起

在立体几何中，有这么一道题目：

证明正四面体内的任意一点到各面的距离之和为定值.

当你看到这道题的时候，你可能联想到平面几何中的一道题目：

证明正三角形内的任意一点到各边的距离之和为定值.

这两道题多么类似啊！在平面几何中已经得到这样的结论：正三角形内的任意一点到各边的距离之和等于它的高. 你如果回忆起这个结论时，你可能很快就想到：正四面体内的任意一点到各面的距离之和是否也等于它的高呢？这个猜想是对的. 不仅如此，还可以运用平面几何中证明正三角形内的任意一点到各边的距离之和等于它的高的类似办法，来证明立体几何的这道题. 我们先回顾平面几何中的证明方法：

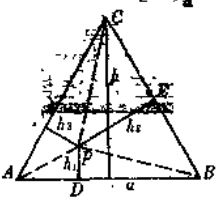


图 1

如图 1 所示，设 P 为正三角形 ABC 内的一点，又设 $\triangle ABC$ 的边长为 a，高为 h，面积为 S.

边引垂线 PD、PE 和 PF，设其长

分别为 h_1、h_2 和 h_3; 连接 PA、PB 和 PC, 又设 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$ 和 $\triangle PCA$ 的面积分别为 S_1、S_2 和 S_3. 则有

$$S_1+S_2+S_3=S,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2+\frac{1}{2}ah_3=\frac{1}{2}ah,$$

$$\therefore \quad h_1+h_2+h_3=h.$$

这就证明了正三角形内的任意一点到各边的距离之和等于它的高. 由于立体几何中的四面体类似于平面几何中的三角形,而四面体的面类似于三角形的边. 因此回到原来的问题,我们可以推想:仿照上面的证明方法,把正四面体内的任意一点与各顶点连接起来,从而把正四面体划分为四个小四面体,然后通过正四面体体积等于它的四个小四面体体积之和的关系来解决. 按照这样的思路,并运用正四面体的体积公式,就不难得到问题的证明. 其证明过程就请同学们去完成了.

解决上面这个定值问题所采用的思维方法,就是**类比法**. 一般地,当我们遇到一个数学问题的时候,联想一个已经解决的数学问题,而新问题和旧问题有某些类似的特征,于是我们推想:新问题和旧问题可能有某些类似的结论,或者可能用解决旧问题的类似办法来解决新问题. 这种寻求解决问题途径的思维方法就叫做类比法,或者类比推理法.

类比法是根据两个问题有一部分特征相类似,从而推出其他特征也可能相类似的一种推理方法. 在科学史上,许多发明创造都广泛地运用了这种推理方法.

(二) 运用类比法解题

在数学上能够运用类比法思考的问题是很多的,对于一些条件结论或者结构形式比较类似的问题,往往可以运用类比的

方法，从简单问题的解决办法想到复杂问题的解决办法，类似地推广到比较复杂的情形中去，从而使问题得到解决。

在立体几何中，许多问题不但和平面几何中的相应问题有类似的结论，而且有类似的解决办法，因此，许多问题能通过类比平面几何中的相应问题而得到解决．下面考察 1982 年全国高考（理科）的一道题：

已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=BC$，$CD=DA$，M，N，P，Q 分别是边 AB，BC，CD，DA 的中点（图 2），求证 $MNPQ$ 是一个矩形。

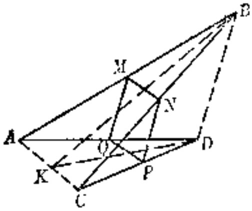


图 2

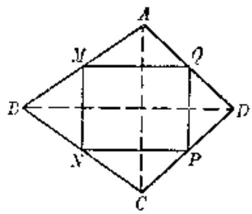


图 3

先考察 $ABCD$ 是平面四边形的情形（图 3）．注意邻边 AB 与 BC 相等，CD 与 DA 相等．由平面几何学知道，当一个四边形是平行四边形，且有一内角为直角时，它就是矩形，因而一般地可分两步证明．

首先连接 AC 和 BD，可见四边形 $MNPQ$ 的四条边恰是四个三角形的中位线．根据三角形中位线的性质，知道四边形 $MNPQ$ 的两组对边分别平行对角线 AC 和 BD，因而可以证明它是一个平行四边形，这就完成了第一步的证明．

第二步考虑证明 $MQ\perp QP$，这只要证明 $BD\perp AC$．为此要充分利用 $AB=BC$ 和 $CD=DA$ 的条件，由这个条件容易证得 $\triangle BAD$ 和 $\triangle BCD$ 全等，于是可证得 BD 是 $\angle B$ 的平分线，

因而也是等腰三角形 ABC 中底边 AC 的垂线．这样就解决了平面四边形情形的证明．

在图3中，把 $\triangle ABC$ 绕 AC 旋转，使它与 $\triangle ADC$ 不在同一个平面上，这样 $ABCD$ 就成了空间四边形(图2)．运用类比推理的方法，从平面情形的证明推想到空间情形的证明也可以分两步来进行：第一步的证明跟平面情形完全类似，而第二步中，为了证明对角线 AC 和 BD 垂直，只要取 AC 的中点 K，连接 BK 和 DK．由于 AC 是等腰三角形 ABC 和 ADC 的底边，所以 AC 同时垂直 BK 和 DK，因而垂直于平面 BKD，于是可证得 AC 垂直 BD．

证明对角线 AC 和 BD 垂直是解决本题的关键．当 $ABCD$ 是平面四边形时，利用图形容易启发我们，想到证明的这一条思路，由此推想到空间情形的证明线索．尽管在证明对角线 AC 和 BD 垂直的过程中，空间情形和平面情形不尽相同，但重要的都是要充分利用等腰三角形的性质和四边形 $ABCD$ 有两组邻边相等的条件．

(三) 探求新知识的有力工具

在数学上运用类比的方法，往往能在已有知识的基础上探求获得新的知识，发现新的定理和公式．例如，勾股定理是每个学过平面几何的读者所熟悉的，能不能在立体几何中找到一个相应的定理呢？我们运用类比法来探求．

首先，考虑在立体几何中，究竟怎样的几何体与平面几何中的直角三角形类似．我们已经知道，四面体与平面几何中的三角形类似，由此联想到，与直角三角形类似的是一个特殊的四面体，这样的四面体应该象图4中的四面体那样，有三条具有公共顶点的棱互相垂直．我们称这样的四面体为“直角四面体”，如

果用一个斜平面从立方体上切下一个角就得到直角四面体.

其次，考虑到勾股定理反映的是直角三角形中边与边之间的长度关系，便不难联想到，相应于勾股定理的是直角四面体中面与面之间的面积关系.

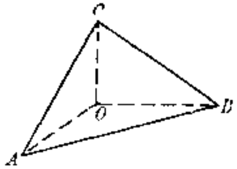


图 4

最后，从勾股定理的结论：直角三角形中斜边的平方等于两直角边的平方和，就联想到在立体几何中相应的定理是：

直角四面体中斜面的面积平方等于其他三个面的面积平方和.

这个定理是否正确，需要经过严格的证明. 在图 4 中只要从 O 点向棱 AB 引垂线，并把垂足和 C 点连接起来，然后直接利用勾股定理和三角形的面积公式就能得到证明，其详细证明就让有兴趣的读者去完成吧. 这个定理的证明并不很难，重要的是这个定理的发现.

在数学上，发现一个定理往往比论证它更为重要. 跟科学史上的许多发明创造一样，数学史上曾经有许多定理和公式是运用类比推理的方法发现的. 因此，类比法是探求数学新知识的有力工具.

上面从勾股定理出发，运用类比推理的方法，得到了立体几何中的相应定理. 不仅这样，还可以把三角形和四面体继续进行类比，在三角形边角关系的一些定理（如射影定理、余弦定理）的启示下，得到四面体的相应定理. 建议有兴趣的读者能把这些作为练习，这样的练习，能启迪我们的思维，提高我们推理和创新的能力.

二阶递归数列的通项公式

吴荣宝　（江苏省无锡县中学）

满足条件

$$a_{n+1}-a_n=d \quad (\text{其中 } d \text{ 为常数}) \tag{1}$$

的数列称为等差数列．由(1)可得

$$a_{n+2}-a_{n+1}=d. \tag{2}$$

由(2)－(1)，得

$$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0. \tag{3}$$

一般地，如果数列 $\{a_n\}$ 已知两项起始值 a_1 和 a_2，并且存在常数 p、q 和 r，使任意相邻三项 a_{n+2}、a_{n+1} 和 a_n 满足等式 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$（其中 p、$r\neq0$，$n=1, 2, 3, \cdots$），则称数列 $\{a_n\}$ 为二阶线性递归数列．本文简称为二阶递归数列．从(3)式可以知道，中学数学中的等差数列是二阶递归数列（顺便指出，等比数列满足等式 $a_{n+1}-qa_n=0$．它是一阶递归数列．它的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 是研究二阶递归数列的基础）．下面结合中学数学知识，来推一般的二阶递归数列的通项公式．

引理　数列 $\{a_n\}$ 是满足 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 的二阶递归数列（p、$r\neq0$）；用 x_1、x_2 表示二次方程 $px^2+qx+r=0$ 的两根（实根或虚根）．那么，以 $a_{n+2}-x_1a_{n+1}$ 为通项的数列 $\{a_{n+2}-x_1a_{n+1}\}$，是以 x_2 为公比的等比数列．

证明　因为 x_1，x_2 是方程 $px^2+qx+r=0$ 的两根，

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{q}{p}, \quad x_1x_2=\frac{r}{p}.$$

即 $q=-p(x_1+x_2)$，$r=px_1x_2$．代入 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$，

得

$$pa_{n+2}-p(x_1+x_2)a_{n+1}+px_1x_2a_n=0,$$

$$\therefore \quad a_{n+2}-x_1a_{n+1}=x_2(a_{n+1}-x_1a_n).$$

因此，数列 $\{a_{n+2}-x_1a_{n+1}\}$ 是以 x_2 为公比的等比数列．

当然，同样可得数列 $\{a_{n+2}-x_2a_{n+1}\}$ 是以 x_1 为公比的等差数列。

定理 设数列 $\{a_n\}$ 是满足 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 的二阶递归数列 $(pr\neq 0)$，用 x_1、x_2 表示二次方程 $px^2+qx+r=0$ 的两根（实根或虚根）。那么，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

（i）当 $x_1\neq x_2$ 时，$a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$；

（ii）当 $x_1=x_2$ 时，$a_n=(A+nB)x_1^{n-1}$。

其中系数 A、B 由初始项 a_1、a_2 待定。

证明 由引理可知，数列 $\{a_{n+2}-x_1a_{n+1}\}$ 和 $\{a_{n+2}-x_2a_{n+1}\}$ 分别是以 x_2 和 x_1 为公比的等比数列。因此，可设

$$a_{n+2}-x_1a_{n+1}=Mx_2^n, \tag{1}$$

$$a_{n+2}-x_2a_{n+1}=Nx_1^n. \tag{2}$$

（i）当 $x_1\neq x_2$ 时，由(1)－(2)，得 $-(x_1-x_2)a_{n+1}=Mx_2^n-Nx_1^n$，

$$\therefore \quad a_{n+1}=\frac{N}{x_1-x_2}x_1^n-\frac{M}{x_1-x_2}x_2^n.$$

设 $A=\dfrac{N}{x_1-x_2}$，$B=-\dfrac{M}{x_1-x_2}$，则 $a_n=Ax_1^{n-1}+Bx_2^{n-1}$。

（ii）当 $x_1=x_2$ 时，由(1)得 $a_{n+2}-x_1a_{n+1}=Mx_1^n$，它可变形为

$$\frac{a_{n+2}}{x_1^{n+2}}-\frac{a_{n+1}}{x_1^{n+1}}=\frac{M}{x_1^2}.$$

这就是说，数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{x_1^{n+1}}\right\}$是以$\dfrac{M}{x_1^2}$为公差的等差数列．于是$\dfrac{a_{n+1}}{x_1^{n+1}}=C+\dfrac{M}{x_1^2}\cdot n$。

即 $a_{n+1}=\left(Cx_1+\dfrac{M}{x_1}\cdot n\right)x_1^n$．设 $A=Cx_1$、$B=\dfrac{M}{x_1}$，则

$$a_n=(A+Bn)x_1^{n-1}.$$

这样，我们完整地给出了二阶递归数列的通项公式。这里顺便指出，对应的二次方程 $px^2+qx+r=0$ 称二阶递归数列的通项公式。下面，我们举例说明公式中的 A 和 B 是如何根据初始项 a_1、a_2 来确定的。

［例 1］ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}=4a_n+2$（其中 $n=1, 2, 3, \cdots$），又 $a_1=1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

解 $\because \quad S_{n+1}=4a_n+2, \quad \therefore \quad S_{n+2}=4a_{n+1}+2$。

于是 $\quad S_{n+2}-S_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n, \quad \because \quad S_{n+2}-S_{n+1}=a_{n+2}$，

$$\therefore \quad a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 是二阶递归数列，特征方程 $x^2-4x+4=0$ 有等根 $x_1=x_2=2$，因此，这数列通项公式为

$$a_n=(A+nB)\cdot 2^{n-1}.$$

由 $a_1=1$、$S_2=4a_1+2=6$ 可得 $a_2=5$，于是

$$\begin{cases}A+B=1,\\ 2A+4B=5;\end{cases}\quad \begin{cases}A=-\dfrac{1}{2},\\ B=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

所求数列的通项公式为

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}n\right)\cdot 2^{n-1}=(3n-1)\cdot 2^{n-2}.$$

[例 2] 设 A_1, A_2, A_3, …, A_n, …是 x 轴上的点列，且 A_{n+2} 是线段 A_nA_{n+1} 的中点($n=1, 2, 3, \cdots$)。当 A_1, A_2 的横坐标分别为 1 和 2 时，求 A_n 的坐标；并求出当 $n\to\infty$ 时，A_n 的极限位置.

解 A_n 的横坐标为 $a_n(n=1, 2, 3, \cdots)$. 由题意得

$$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n),\ \text{即}\quad 2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 是二阶递归数列. 特征方程 $2x^2-x-1=0$ 的两根为 $x_1=1$、$x_2=-\dfrac{1}{2}$，因此，通项公式为

$$a_n=A+B\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

由 $a_1=1$、$a_2=2$ 得

$$\begin{cases}A+B=1,\\ A-\dfrac{B}{2}=2;\end{cases}\quad \begin{cases}A=\dfrac{5}{3},\\ B=-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

A_n 的横坐标为 $a_n=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. 当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to\dfrac{5}{3}$，即 A_n 的极限位置横坐标为 $\dfrac{5}{3}$.

[例 3] 设数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 a_n、a_{n+1} 是方程 $x^2-C_nx+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ 的两根($n=1, 2, 3, \cdots$)，求无穷数列 $\{C_n\}$ 所有项的和. 其中已知 $a_1=2$.

解 由条件可得 $a_na_{n+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，$a_{n+1}a_{n+2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$. 两式相除，得

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{3}$，即 $3a_{n+2}-a_n=0$. 因此，$\{a_n\}$ 是二阶递归数列. 特征方程 $3x^2-1=0$ 的两根为 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}+B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

由 $a_1=2$、$a_1a_2=\frac{1}{3}$，得 $a_2=\frac{1}{6}$.

$$\therefore\quad \begin{cases} A+B=2, \\ \frac{1}{\sqrt{3}}A-\frac{1}{\sqrt{3}}B=\frac{1}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{12+\sqrt{3}}{12}, \\ B=\frac{12-\sqrt{3}}{12}. \end{cases}$$

于是 $$a_n=\frac{12+\sqrt{3}}{12}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}+\frac{12-\sqrt{3}}{12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}.$$

$$\because\quad C_n=a_n+a_{n+1},$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}C_k=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=2\sum_{k=1}^{n}a_k-a_1+a_{n+1}$$

$$=\frac{12+\sqrt{3}}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}+\frac{12-\sqrt{3}}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}-2+a_{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}C_k=\frac{12+\sqrt{3}}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}+\frac{12-\sqrt{3}}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}-2+\lim_{n\to\infty}a_{n+1}$$

$$=\frac{12+\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{12-\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}-2+0=2\frac{1}{4}.$$

因此，无穷数列 $\{C_n\}$ 所有项的和为 $2\frac{1}{4}$.

“独立性”和“等时性”

——从运动合成的规律谈抛体运动

林在珩　（上海市闸北区教育学院）

端午节夜晚，龙船在江面上飞速行驶，船首上有一表演者舞弄着火球急剧转动，岸上的观众只见到火球的轨迹似金蛇般地盘旋着前进．怎样能掌握火球运动的规律呢？

一个复杂的运动，常常可以把它看成是几个简单运动的合运动，这几个简单的运动称为分运动．运用运动合成和分解中的规律就能比较容易地掌握物体的运动情况．刚才所说观众见到的火球的运动，就可以分解为火球在船上的圆周运动和船对河岸的匀速直线运动的合运动来研究，便可知道任一时刻火球运动的速度和任一时刻火球的位置．

把所研究的运动看成是哪几个运动的合运动，这在运动合成的问题中必须首先解决．例如：研究行驶着火车中行走的乘客对地面的运动，可以看成是乘客对车厢的运动和火车对地面的运动的合运动；研究小船横渡河流时的运动，可以看成是小船对水流的运动和水流对河岸运动的合运动；研究车轮边缘上的点对地面的运动，可以看成是这个点对车轴的转动和车轴随车前进运动的合运动等等．

其次，还必须掌握各分运动和合运动关系中的两个重要规律：一个是“各分运动彼此独立，互不相干”，一个是“各分运动和合运动的时间相等”．这两个规律经常被运用着，为了方便，就

简称为“独立性”和“等时性”.

前面例子中乘客在车厢中行走的运动和火车在地面上行驶的运动是彼此独立的,都按各自的规律在运动着,乘客在车厢中行走了多少时间,火车也行驶了多少时间,乘客对地面的合运动也必定是前进了这些时间. 小船横渡河流,不论水流的速度多大,横渡到对岸的时间总是等于静水时小船横渡到对岸的时间,水流速度的大小只是决定了在这一时间内小船被水流冲向下游位移的多少. 表演者使火球旋转的圆周运动,不因船在前进而有所影响,火球的轨迹总是边作圆周运动边向前作直线运动,也就是作螺旋运动;火球每转一圈前进的距离必定等于火球转一圈的时间内龙船所前进的距离.

根据独立性和等时性的规律还可以知道合运动物体的速度和位移. 某一时刻合运动的速度就是这一时刻各分运动速度的合速度,合运动的位移就是这一时刻各分运动位移的合位移.

常见的抛体运动都可以把它们看成是由几个运动的合运动来研究,抛体运动的合运动和分运动的关系也一定符合独立性和等时性的规律.

抛体运动有一个共同的特点,物体抛出后都是只受到重力的作用,因此各个抛体运动的一个分运动都可看作是自由落体运动,另一个分运动就是沿初速度方向的匀速直线运动. 抛体运动的加速度的大小和方向不变,因此,不论是作直线运动还是曲线运动,抛体运动一定是匀变速运动. 下面运用独立性和等时性的规律来研究这三种抛体运动的一些情况.

一、竖直上抛和竖直下抛运动

匀速运动的分运动各个时刻的速度不变,等于初速度 v_0, $v_1=v_0$; 各个时刻的位移 $h_1=v_0t$; 自由落体的分运动各个时

刻的速度 $v_2=gt$，位移 $h_2=\frac{1}{2}gt^2$.

竖直下抛运动的合速度 v 和合位移 h 可以表示为

$$v=v_1+v_2=v_0+gt$$

和 $$h=h_1+h_2=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

竖直上抛运动两个分运动的方向相反，如以向上的方向为正，则合速度 v 和合位移 h 可以表示为

$$v=v_1-v_2=v_0-gt$$

和 $$h=h_1-h_2=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

合速度 v 如为负值，说明这时的速度方向向下，合位移 h 如为负值，说明这时物体的位置在抛出点之下.

竖直上抛运动上升至最高点的时间是 $t_上=v_0/g$，上升的最大高度是 $H=v_0^2/2g$. 因为上升的时间和落回原处的时间相等，所以从抛出至落回原处的飞行时间是 $T=2t_上=2v_0/g$，上升时经过某一点的速度和下落时经过同一点时的速度总是大小相等、方向相反.

竖直上抛运动到达最高点时速度为零，但加速度仍为 g，而物体只是在这一时刻的速度为零，其他时刻的速度都不为零，物体的位置不是随时间而不变，所以，不能说物体在这时刻是静止的.

二、平 抛 运 动

平抛运动的一个分运动是水平方向的匀速运动，另一个是竖直方向的自由落体运动，合运动是匀变速曲线运动. 根据等时性的规律，平抛运动落到地面的时间一定等于同一高度自由落体运动的时间，所以，平抛运动飞行的时间只决定于抛出点的

高度，与抛出速度无关，抛出速度的大小只是改变落地点离抛出点的水平距离.

平抛运动的高度与水平射程跟时间的关系可表示为

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad 和 \quad S=v_0t$$

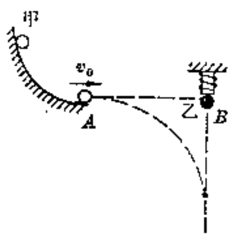
求平抛运动的轨迹，可以先根据各个时刻合运动的位移是各分运动位移的合位移，确定物体在各个时刻所到达的点，然后把这些点连成光滑的曲线，就可得到平抛运动的轨迹.

平抛运动任一时刻的速度是各分运动同一时刻速度的合速度，水平方向的速度始终不变 $v_1=v_0$，竖直方向的速度随时间而变化 $v_2=gt$，用勾股定理可得平抛运动的速度

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2},$$

也可写成
$$v=\sqrt{v_0^2+2gh},$$

速度的方向与水平方向间的夹角 θ 为 $\mathrm{tg}\,\theta=v_2/v_1$.



如图所示是一个有趣的平抛运动实验，甲球在圆弧槽上滚下，从 A 点沿水平方向抛出，与 A 点等高的 B 处被电磁铁吸住的乙球同时作自由落体运动，会看到乙球正好被甲球击中. 如让甲球从不同高度滚下，只要甲球的水平射程超过 AB 间距离，乙球总是会在不同高度处被甲球击中. 这个实验可以用独立性和等时性来说明，甲球运动到 B 点下方的时间等于自由落体分运动的时间，在这段时间内乙球必定也下落了同样的高度，所以两球总是要相碰的.

三、斜上抛和斜下抛运动

斜抛运动的一个分运动是斜向的匀速运动，速度不变，另一

个分运动是自由落体运动，两个分运动的方向互成钝角或锐角，斜抛运动是匀变速曲线运动．求斜抛运动的轨迹，同样可以先根据两个分运动各个时刻的位移求出合运动的位移，确定物体在各个时刻的位置，然后把这些点连成光滑的曲线．

为了计算上的方便，斜抛运动还可以分解为这样两个分运动：把初速度 v_0 分解为水平方向的分速度 $v_x=v_0\cos\theta$（这里θ是投射角）和竖直方向的分速度 $v_y=v_0\sin\theta$．这两个分运动是：沿水平方向的匀速运动，速度是 v_x；沿竖直方向的竖直上抛（或下抛）运动，初速度是 v_y．这两个分运动和合运动的关系同样符合独立性和等时性的规律．

斜下抛运动某一时刻水平方向和竖直方向的位移是

$$S=v_xt \quad \text{和} \quad h=v_yt+\frac{1}{2}gt^2$$

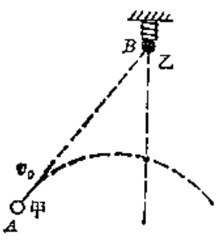
斜上抛运动某一时刻水平方向和竖直方向的位移是

$$S=v_xt \quad \text{和} \quad h=v_yt-\frac{1}{2}gt^2$$

斜上抛运动的最大高度和飞行时间必定等于竖直上抛分运动的最大高度 H 和飞行时间 T

$$H=v_y^2/2g,\ T=2v_y/g$$

落回至同一高度处的水平射程S必定等于在这时间内水平方向分运动的位移，$S=v_xT$．



水平射程S还可以用初速度 v_0 和投射角 θ 来表示

$$S=v_0\cos\theta\cdot\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

从这一表达式可以知道：初速度相同，当 $\theta=45^\circ$ 时，水平射程最大；用相同大小初速度抛出的两个物体，当投射角互为余角时，射程相等．

斜抛运动也有一个说明独立性、等时性的有趣实验．如图，从 A 处斜向射出甲球，瞄着沿初速度方向 B 处的乙球，甲球射出时，乙球同时下落，只要甲球的水平射程有足够大，甲球必定在 B 点下方击中乙球，甲球初速度的大小只是影响击中乙球的高度．读者可运用独立性和等时性的规律来解释这个现象．

浅谈物体的受力分析

潘益善 （上海市第五十一中学）

物体受力情况的分析（简述为物体受力分析），在高中物理学各章节分析、研究问题时甚为重要．本文想针对刚入高中的初学者来谈谈物体受力情况的分析．

一个物体究竟受几个力作用？从什么地方着手考虑？根据什么来分析呢？我认为物体受力情况分析的依据是力的概念．初中和高中物理书中都这样写道："力是物体之间的相互作用．"根据力的这一涵义，我们就很容易得出受力分析的第一个原则："相互接触的物体之间才可能存在力的作用．"

这个原则虽然很简单，但许多初学者往往在受力分析时不是根据此原则来分析，而是根据生活中的"经验"——"传力"观点来进行．如：分析图 1 中 C 的受力情况，按照"传力"观点：因为 A 压在 B 上，所以 A 一定也压 C，且若 $G_A=1$ 公斤则 C 一定受到 A 给 C 的 1 公斤的压力．其实，这里存在两个原则性错误：首先 A 跟 C 没有接触，按力的概念及由此推得的受力分析原则可知：在分析 C 的受力情况时，跟 A 无关，只跟与它接触的物体 B、D 有关．其次，G_A 表示 A 的重力，这个力的施力体是地球、受力体是 A，不分青红皂白地把这 1 公斤重力传给 C 显然是错误的．

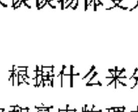


图 1

事实上，当 A、B、C 随支持体 D 一起在竖直方向上作变速运动时，B 对 C