教材

機械工程師進修大學

18

齿轮啮合原理

大连工学院 刘 健

西安交通大学 吴序堂

机械工程师进修大学教材

（18下）

1987年7月出版

目　录

齿轮啮合原理

齿 轮 啮 合 原 理

刘健，教授。1956年毕业于大连工学院机械系，后留校任教至今。主讲过：机械制造工艺学、互换性原理及技术测量；微分几何学、啮合原理、统计分析及实验设计等课程。主要著作有：《机械制造工艺学》、《啮合原理》，主要论文有：《精车齿轮（Gerac）的基本原理》、《法向圆弧齿轮的基本原理》、《运动群方法及其在曲面共轭原理中的应用》、《齿轮的线外啮合与过渡过程》、《电解珩齿原理的探讨》、《齿轮在误差状态下的啮合理论》等。

吴序堂，1954年毕业于苏南工业专科学校机械科。现任西安交通大学机械工程系教授，副系主任。长期从事《复杂刀具设计》、《齿轮啮合原理》等课程的教学及科研工作，主要著作有：《齿轮啮合原理》，参加编写《磨齿工作原理》及《金属切削刀具》，并发表了有关齿轮啮合及加工的学术论文多篇。

序　　言

刘　健

啮合原理所研究的主要内容，是齿轮啮合中的几何学及运动学问题，这是一门实践性很强、应用范围很广的技术基础课。

啮合原理广泛应用于齿轮的设计、制造、检测及研究开发中。在传动方面：象齿轮副啮合规律及传动质量的研究；新型齿形的探索；齿轮误差对接触精度，振动、动载、噪声影响的研究等等，都离不开啮合原理知识。在制造工艺方面：如各种齿廓面及其它成型表面加工时，有关运动几何原理的确立；复杂刀具、工具廓形的设计；齿轮的误差、公差及检测仪器的研究；齿廓面及其它曲面加工中工艺精度的研究等等，也将涉及到大量的啮合原理问题。

啮合原理发展到现阶段，已有比较完整的理论体系，所涉及的内容也很丰富。为了在有限的时间里，学到较多的知识，在编写本教材时，我们注意到：尽量精选内容，不拘泥于具体传动副的讨论，而着眼于一般原理的介绍，并尽可能多举一些实际例子，以便打好基础，学以致用。

在学习本课程之前，学员应该熟悉空间解析几何、微积分、机械原理等基础知识，并对矢量运算、线性代数有所了解。为了方便大家学习，教材中还对某些数学知识作了介绍。

教材中在内容的表述上，较多地采用解析方法，这是进行深入研究所必须的。解析方法固然重要，但对于啮合原理来说，它毕竟只是一个工具。重要的问题在于，运用这些工具解决具体问题。因此在学习中，搞清楚各种啮合问题的提出；解决问题的过程与方法；啮合的运动几何规律；有关结论的具体意义等等，就显得十分重要了。

啮合原理的研究方法虽然比较抽象，但它的研究内容却是具体而形象的。因此为了学好本门课程，不但要重视解析能力的培养，还应该不断丰富自己的空间想象力，提高形象思维能力。处理好这个抽象与形象的关系，乃是提高学习质量的关键之一。此外一定要多做练习，除了做好教材中给出的习题、思考题之外*，如果能够结合自己的工作，找一些与学习有关的小题目来做，将会收到更好的效果。

习题中带“”号的题，表示有一定难度，或计算过程较繁。

第一章　基础知识

刘　健

为了学好啮合原理这门课，本章介绍一些基础的数学知识，主要是矢量解析及微分几何两个方面，所涉及的内容以够用为原则，在问题的表述方面不追求数学上的严谨，但力求说理中肯，容易接受。

第一节　矢量的代数运算

矢量（亦称向量）是大家所熟悉的概念，在数学、物理学、力学等许多课程中都遇见过。一般我们把矢量理解为：具有大小及方向的量。反之，仅需要大小即可决定的量称为标量。象有向线段、加速度、力等等为矢量；线段的长度、温度、速率等则为标量。严格地说，这里所说的矢量为“自由矢量”，它具有大小及方向，但在空间没有确定的位置，即它可以平行于自身移动。自由矢量的这种性质，给理论分析及具体计算带来很大方便，因而应用很广。

矢量一般用字母上加箭号表示，如：$\vec{x}$，这种记法很便于书写。矢量的大小称为模，记为$|x|$或者x。量的图示为一带有箭头的线段，线段长度表示矢量大小，箭头表示其方向。下面将矢量的代数运算作一回顾。

一、矢量的代数运算

1．矢量的加减

两个矢量相加，形成一个新矢量

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} \tag{1.1-1}$$

矢量加法的图示，符合平行四边形法则，如图 1.1-1 所示。如果在某矢量前加以负号：$-\vec{x}$，则表示与$\vec{x}$大小相等方向相反的矢量，称为逆矢量。可以利用逆矢量来定义矢量减法

$$\vec{w} = \vec{y} - \vec{x} = \vec{y} + (-\vec{x}) \tag{1.1-2}$$

其图示仍在图 1.1-1 中。矢量加法符合交换律、结合律。

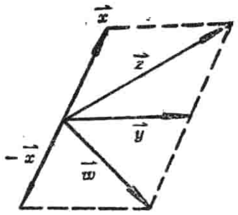

图 1.1-1　矢量的加减

若$|\vec{x}| = 0$称为零矢量；若$|\vec{x}| = 1$称为单位矢量。如果一个标量与矢量相乘，可得一新矢量

$$\vec{z} = C\vec{x}$$

矢量$\vec{z}$与$\vec{x}$同方向，但模扩大了C倍，即$|\vec{z}| = C|\vec{x}|$。若已知两个矢量$\vec{x}$、$\vec{y}$，并且存在两个标量α、β，使下式成立

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = 0 \tag{1.1-3a}$$

此时称矢量$\vec{x}$与$\vec{y}$线性相关；否则找不到一组数α、β使上式成立，则两矢量线性无关。由上式可知，两个线性相关的矢量可以互相表示，如：$\vec{x} = (-\beta/\alpha)\vec{y}$，或$\vec{y} = -(\alpha/\beta)\vec{x}$。这说明两个线性相关的矢量互相平行。同理，若已知三个矢量$\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{z}$，并有三个标量存在，使下式成立

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = 0 \tag{1.1-3b}$$

则称此三个矢量线性相关；否则若找不到三个标量而使上式成立，则此三个矢量线性无关。三个线性相关矢量中的任意一个，都可以用其它两个矢量的线性组合来表示，例如：

$$\vec{z} = -\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\vec{x} - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{y}$$

现在选择三个互相正交的单位矢量，如：$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，或$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$。它们构成了一个右手系，称为正交标架。则任意矢量可以表示在此标架之中，见图 1.1-2。

$$\vec{x} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 = \sum_1^3 \vec{e}_i x_i \tag{1.1-4}$$

很显然，$\vec{x}$的模可写成

$$|\vec{x}| = oP = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.1-5}$$

式(1.1-4)即为矢量的坐标表达式，x_1、

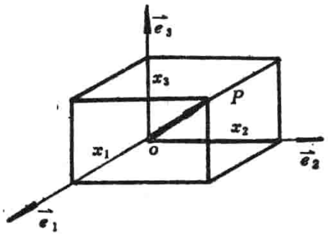

图 1.1-2 矢量在标架中的表示

x_2、x_3 这三个标量，称为坐标。如果略去单位矢量$\vec{e}_i$，而将矢量的三个坐标按顺序排成列阵或行阵：

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\text{ 或 }\vec{x}=[\,x_1\ \ x_2\ \ x_3\,]\qquad(1.1\text{-}6)$$

这就是矢量的矩阵表示法，它很简便，应用也很广泛。

2. 矢量的标积(内积)

两个矢量的标积是一个标量，其定义为

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\theta\qquad(1.1\text{-}7)$$

标积用“·”号表示，θ为$\vec{x}$、$\vec{y}$之间的夹角。标积运算满足交换律及分配律。

若$\vec{x}=\vec{y}$则$\theta=0$，此时由上式得$\vec{x}^2=\vec{x}\cdot\vec{x}=|\vec{x}|^2$，可用这个关系式求矢量的模

$$|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}^2}\qquad(1.1\text{-}8a)$$

若两矢量正交，则$\theta=\pi/2$，即有

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=0\qquad(1.1\text{-}8b)$$

反之，当上式成立时，由式(1.1-7)可知，必有$\theta=\pi/2$。因此两个矢量的标积为零是它们正交的充分和必要条件。对于正交标架来说，下面等式必定成立

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

或 $$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=0\qquad(i\neq j)\qquad(1.1\text{-}8c)$$

若已知两个矢量，要求它们之间的夹角，可以利用式(1.1-7)，

即 $$\cos\theta=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\sqrt{\vec{x}^2}\sqrt{\vec{y}^2}}\qquad(1.1\text{-}8b)$$

若两个矢量的坐标表达式为

$$\vec{x}=\vec{e}_1x_1+\vec{e}_2x_2+\vec{e}_3x_3$$

$$\vec{y}=\vec{e}_1y_1+\vec{e}_2y_2+\vec{e}_3y_3$$

则由式(1.1-8c)和矢量标积的定义可得标积的坐标表达式

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\qquad(1.1\text{-}9)$$

这个公式与线性代数中给出的内积公式是一致的。

3. 矢量的矢积(外积)

两个矢量的矢积仍为一个矢量，如图1.1-3所示。其定义为

$$\vec{x}\times\vec{y}=|\vec{x}|\,|\vec{y}|\sin\theta\,\vec{z}\qquad(1.1\text{-}10)$$

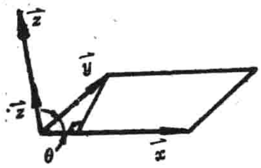

图 1.1-3 矢量的矢积

矢积用“×”号表示。矢积的模为两个矢量所构成的平行四边形的面积；$\vec{z}$为一单位矢量，它与$\vec{x}$、$\vec{y}$正交，并按右手规则决定其指向。由于$\vec{x}\times\vec{y}$与$\vec{y}\times\vec{x}$指向相反，因此有

$$\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}$$

这说明矢积不满足交换律，但满足分配律。

当两矢量平行，则$\theta=0$，故有

$$\vec{x}\times\vec{y}=0\qquad(1.1\text{-}11)$$

反之，当上式成立时必有$\theta=0$。因此两个矢量平行的充要条件是矢积等于零。很显然，这也是两个矢量的线性相关条件。由此可知，$\vec{x}\times\vec{x}=0$，故对正交标架来说，下面等式成立

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{e}_i\times\vec{e}_i=0,\qquad \vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3\\ \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\qquad \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2\end{array}\right\}\qquad(1.1\text{-}12)$$

利用上式可推导出

$$\vec{x}\times\vec{y}=\vec{e}_1(x_2y_3-x_3y_2)+\vec{e}_2(x_3y_1-x_1y_3)+\vec{e}_3(x_1y_2-x_2y_1)\qquad(1.1\text{-}13a)$$

借用行列式记法，可将上式改写为

$$\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} \qquad (1.1\text{-}13b)$$

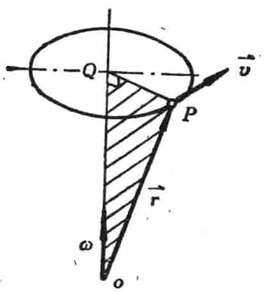

图 1.1-4 回转线速度

矢积在运动学上有着广泛的应用，表示回转线速度就是一例。如图 1.1-4 所示，$\vec{\omega}$ 为回转角速度矢量，它的模表示回转角速度大小，即 $|\vec{\omega}|=\omega$；它的方向按右手规则决定，即右手四指顺着转向时，大拇指的指向即为 $\vec{\omega}$ 的方向。则 P 点的回转线速度矢量为

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (1.1\text{-}14)$$

式中 $\vec{r}$ 为原点到 P 点的矢径，注意 $|\vec{r}|=oP$，故 $|\vec{r}|\sin\theta=QP$，因此有：$|\vec{v}|=|\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\theta=\omega(QP)$。$\vec{v}$ 的方向与 $\triangle oQP$ 所决定的平面垂直，即 $\vec{v}$ 与回转半径 QP 垂直。由此可见，按上式决定的 $\vec{v}$ 即为回转线速度矢量。

4．矢量的混合积

两个矢量 $\vec{x}$、$\vec{y}$ 的矢积再与矢量 $\vec{z}$ 作标积，即得三个矢量的混合积

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=(\vec{x}\times\vec{y})\vec{z} \qquad (1.1\text{-}15)$$

混合积是标量，它等于 $\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{z}$ 三个矢量构成的平行六面体的体积。如果混合积为零，即

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=(\vec{x}\times\vec{y})\vec{z}=0 \qquad (1.1\text{-}16)$$

这表明矢积 $\vec{x}\times\vec{y}$ 与 $\vec{z}$ 正交，因此 $\vec{x}$、$\vec{y}$、$\vec{z}$ 三个矢量必定共面；反之，若三矢量共面，必有 $\vec{x}\times\vec{y}$ 与 $\vec{z}$ 正交，所以上式成立。因此三个矢量共面的充要条件是混合积为零。很显然这也是三矢量的线性相关条件。利用式（1.1-9）、（1.1-13b）可得

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} \qquad (1.1\text{-}17)$$

上式读者可自行证明。它表明三个矢量的混合积，实质上表示一个行列式。按行列式的轮转规则，必有

$$(\vec{x}\times\vec{y})\vec{z}=(\vec{y}\times\vec{z})\vec{x}=(\vec{z}\times\vec{x})\vec{y} \qquad (1.1\text{-}18)$$

这说明，混合积中三个矢量按顺序轮转其值不变。

5．矢量的二重矢积

三个矢量的二重矢积定义为

$$\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y}) \qquad (1.1\text{-}19)$$

如果令上面的二重矢积为矢量 $\vec{w}$，并且把 $\vec{z}$ 与 $\vec{x}\times\vec{y}$ 视为两个矢量，则按矢积定义 $\vec{w}$ 必然与 $\vec{x}\times\vec{y}$ 及 $\vec{z}$ 垂直，因此有：$\vec{w}(\vec{x}\times\vec{y})=0$。这说明 $\vec{w}$，$\vec{x}$，$\vec{y}$ 这三个矢量线性相关。于是 $\vec{w}$ 可以用 $\vec{x}$，$\vec{y}$ 的线性组合来表示

$$\vec{w}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \qquad (1.1\text{-}20)$$

可以证明上式中的 $\alpha=\vec{z}\cdot\vec{y}$，　$\beta=-\vec{z}\cdot\vec{x}$，

则有

$$\vec{w}=\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y})$$
$$=(\vec{z}\cdot\vec{y})\vec{x}-(\vec{z}\cdot\vec{x})\vec{y} \qquad (1.1\text{-}21)$$

矢量代数运算的主要内容已如上述，由于是复习性质的，介绍得比较简要。

二、矢量代数运算的应用举例

为了使矢量成为得心应手的工具，应当多做一些练习，学会处理实际问题的技巧，下面就举几个应用的例子。

〔**例1.1-1**〕证明拉格朗日恒等式

$$(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})$$
$$=(\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{y}\cdot\vec{w})-(\vec{y}\cdot\vec{z})(\vec{x}\cdot\vec{w}) \qquad (1.1\text{-}22a)$$

〔**解**〕如果把上式左端的矢积 $(\vec{x}\times\vec{y})$ 看成是一个矢量，那么上式表示了一个混合积。由式（1.1-18）关于混合积的轮转公式可有

$$(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})$$
$$=[(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}]\vec{w}$$
$$=-[\vec{z}\times(\vec{x}\times\vec{y})]\vec{w}$$

利用式（1.1-21）可将上式右端方括弧中二重矢积展开。因此有

$$(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})$$
$$=-[(\vec{z}\cdot\vec{y})\vec{x}-(\vec{z}\cdot\vec{x})\vec{y}]\vec{w}$$
$$=(\vec{x}\cdot\vec{z})(\vec{y}\cdot\vec{w})-(\vec{y}\cdot\vec{z})(\vec{x}\cdot\vec{w})$$

如果上式中$\vec{z}=\vec{x}$，$\vec{w}=\vec{y}$，则由上式可得

$$(\vec{x}\times\vec{y})^2=\vec{x}^2\vec{y}^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2 \qquad (1.1\text{-}22b)$$

这也是常用的一个等式。

〔**例1.1-2**〕用矢量方法证明余弦公式，见图1.1-5。

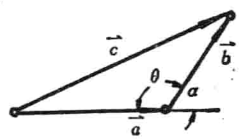

图 1.1-5　余弦公式

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

〔**解**〕如果把三角形的三个边视为三个矢量，由它们的封闭性可知

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

两端平方

$$\vec{c}^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

上式中$\vec{c}^2=c^2$，$\vec{a}^2=a^2$，$\vec{b}^2=b^2$，若$\vec{a}$，$\vec{b}$两矢量的夹角为α，由图1.1-5可知$\theta=\pi-\alpha$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha=-ab\cos\theta$，由上式可知

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

〔**例1.1-3**〕由图1.1-6知A为过原点的直线，过A作一平面，使它与oxy平面的交线T同A正交，求此平面的单位法矢。

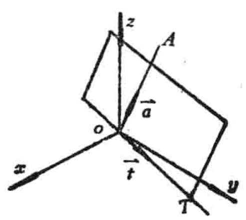

图 1.1-6

〔**解**〕由于直线A已知，可令它的单位矢为$\vec{a}$。

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad a_x^2+a_y^2+a_z^2=1$$

设交线T的单位矢为$\vec{t}$，由于它在oxy平面上，则$\vec{t}$的z轴坐标必为零，因此有

$$\vec{t}=t_x\vec{i}+t_y\vec{j},\quad t_x^2+t_y^2=1 \qquad (1.1\text{-}23a、b)$$

由题意可知，直线A、T正交，则有

$$\vec{t}\cdot\vec{a}=a_xt_x+a_yt_y=0$$

将上式与式(1.1-23b)联立，可解得

$$t_x=\pm a_y/\sqrt{a_x^2+a_y^2} \qquad (1.1\text{-}24a)$$
$$t_y=\mp a_x/\sqrt{a_x^2+a_y^2} \qquad (1.1\text{-}24b)$$

由于直线A、T均在所作平面上，因此平面的法矢$\vec{n}$必定与矢量$\vec{a}$、$\vec{t}$正交，故有

$$\vec{n}=\vec{t}\times\vec{a}=a_zt_y\vec{i}-a_zt_x\vec{j}+(a_yt_x-a_xt_y)\vec{k}$$

将式(1.1-24a、b)置上式，即得

$$\vec{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}[-a_za_x\vec{i}$$
$$-a_za_y\vec{j}+(a_x^2+a_y^2)\vec{k}] \qquad (1.1\text{-}25)$$

求$\vec{n}$的模，并注意$a_x^2+a_y^2+a_z^2=1$，则可有

$$|\vec{n}|=\sqrt{\vec{n}^2}$$
$$=\sqrt{a_z^2(a_x^2+a_y^2)+a_x^2+a_y^2)^2}\Big/\sqrt{a_x^2+a_y^2}=1$$

上式表明$\vec{n}$为单位矢量，因此式(1.1-25)即为单位法矢表达式。

〔**例1.1-4**〕利用矢量方法求平面方程。

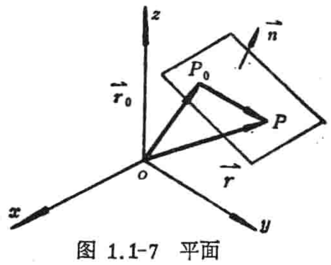

图 1.1-7　平面

〔**解**〕如图1.1-7所式，已知平面的单位法矢为$\vec{n}$；平面上一定点P_0，另在平面上任选一动点P，则有

$$\left.\begin{aligned}&\vec{n}=n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k},\quad n_x^2+n_y^2+n_z^2=1\\&\vec{r}_0=\overrightarrow{oP_0}=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}\\&\vec{r}=\overrightarrow{oP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\end{aligned}\right\} \qquad (1.1\text{-}26)$$

利用矢量减法，可知 $\overrightarrow{P_0P}=\vec{r}-\vec{r}_0$，由于 $\overrightarrow{P_0P}$ 恒在平面上，必与 $\vec{n}$ 正交，故得

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{n}=0 \qquad (1.1\text{-}27)$$

上式即为平面的矢量方程。若将式（1.1-26)置上式，还可有

$$(x-x_0)n_x+(y-y_0)n_y+(z-z_0)n_z=0 \qquad (1.1\text{-}28)$$

上式中 x、y、z 为变量；n_x、n_y、n_z，x_0，y_0、z_0 为常量，上式即为平面的法式方程。

第二节　矢量的解析

一、矢量函数及其导矢

1. 变矢、矢量函数

矢量的大小及方向是可以变化的，称之为变矢，它类似于标量中的变量。大小不变，仅方向变化的矢量称为定长矢量；方向不变，仅大小变化的矢量称为定向矢量；当然更一般的情况是，矢量的大小及方向均产生变化，这三种情况都是变矢。

当一个矢量可随一个或几个标量而变化，则称之为矢量函数，或简称矢函数，见图1.2-1。记为

$$\vec{r}=\vec{r}(t),\quad \vec{r}=\vec{r}(u、v)$$

上面的 $\vec{r}(t)$ 为一元矢函数，t 为标量变元；$\vec{r}(u、v)$ 为二元矢函数，u、v 为标量变元。变矢及矢函数仍然具有自由矢量的性质，通过平行移动可将变矢的起端集在一个定点上，过定点的矢量常常称为矢径。这时变矢的矢径端部将描绘出一个图形，一元矢函数的矢端图形为空间曲线，二元矢数函的矢端图形为曲面，如图1.2-1所示。

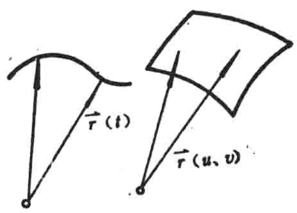

图 1.2-1　矢函数图示

2. 导矢、矢量函数的微分法

当变元由 t 变到 $t+\Delta t$ 时，矢径也将由 $\vec{r}(t)$ 变至 $\vec{r}(t+\Delta t)$，此时增量为

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t) \qquad (1.2\text{-}1)$$

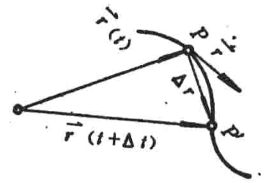

图 1.2-2　导矢

由图1.2-2可知，$\Delta\vec{r}=\overrightarrow{PP'}$ 它表示矢端曲线的弦矢量。

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t}$$

很显然 $\Delta\vec{r}/\Delta t$ 仍然表示一个矢量，它的方向与 $\Delta\vec{r}$ 相同，模缩小了 Δt 倍。当 $\Delta t\to 0$ 时，$P'\to P$，$|\Delta\vec{r}|\to 0$。在极限情况下，上式表示一确定的矢量，称为导矢

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dot{\vec{r}} \qquad (1.2\text{-}2)$$

导矢常用 $\dot{\vec{r}}$ 来表示，由于弦矢量的极限必然为 P 点的切线方向，因此导矢 $\dot{\vec{r}}$ 必与矢端曲线相切。由此可知，若 t 为时间，则 $\dot{\vec{r}}$ 表示瞬时速度矢量；若 $\vec{r}(t)$ 表示一条曲线，则 $\dot{\vec{r}}$ 表示它的切线矢量。将式(1.2-2)改写，可有

$$d\vec{r}=\dot{\vec{r}}dt \qquad (1.2\text{-}3)$$

此时 $d\vec{r}$ 称为矢函数的微分。可以看出，上式与标量函数的微分公式：$dy=y'dx$ 很类似。矢量函数与标量函数的微分法也基本一致，将其主要公式列在下面：

$$\frac{d(\lambda\vec{x})}{dt}=\dot{\lambda}\vec{x}+\lambda\dot{\vec{x}} \qquad (1.2\text{-}4a)$$

$$\frac{d(\vec{x}\pm\vec{y})}{dt}=\dot{\vec{x}}\pm\dot{\vec{y}} \qquad (1.2\text{-}4b)$$

$$\frac{d(\vec{x}\cdot\vec{y})}{dt}=\dot{\vec{x}}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\dot{\vec{y}} \qquad (1.2\text{-}4c)$$

$$\frac{d(\vec{x}^2)}{dt}=2\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}} \qquad (1.2\text{-}4d)$$

$$\frac{d(\vec{x}\times\vec{y})}{dt}=\dot{\vec{x}}\times\vec{y}+\vec{x}\times\dot{\vec{y}} \qquad (1.2\text{-}4e)$$

导矢在坐标系中的表达式为

$$\dot{\vec{x}}=\vec{e}_1\dot{x}_1+\vec{e}_2\dot{x}_2+\vec{e}_3\dot{x}_3=\sum_{1}^{3}\vec{e}_i\cdot\dot{x}_i \qquad (1.2\text{-}5)$$

利用上述微分公式，可以证明一条有用的引理。

引理1.2-1 变矢$\vec{a}$为定长矢量的充要条件为

$$\dot{\vec{a}}\cdot\vec{a}=0$$

证 若$\vec{a}$为定长矢量，则有$\vec{a}^2$=常数，则求导可得：$\dot{\vec{a}}\cdot\vec{a}=0$；反之，若已知$\dot{\vec{a}}\cdot\vec{a}=0$，则必有$d(\vec{a}^2)/dt=0$，则$\vec{a}$的模必为常数，即定长矢量。

3. 矢量函数的台劳级数

我们记得标量函数$f(x)$，在x_0处可展开成台劳级数

$$f(x)=f(x_0)\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+R_n \qquad (1.2\text{-}6)$$

R_n为高阶无穷小，称为余项。同样，对于矢函数$\vec{r}(t)$如果在t_0处解析，也可以展开成台劳级数

$$(\vec{r})(t)=\vec{r}(t_0)+\frac{\dot{\vec{r}}(t_0)}{1!}(t-t_0)+\frac{\ddot{\vec{r}}(t_0)}{2!}$$

$$(t-t_0)^2+\cdots+\vec{R}_n \qquad (1.2\text{-}7)$$

式中$\vec{R}_n$为高阶无穷小矢量，亦称余项。证明上式并不困难，可将$\vec{r}(t)$展开在坐标系中：$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$，再把$x(t)$、$y(t)$、$z(t)$展开成台劳级数，将此三个级数分别乘以$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$并求和，即可归纳出式(1.2-7)。

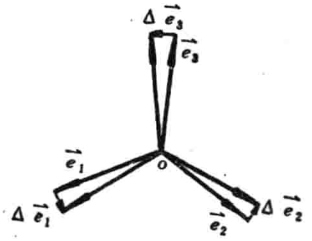

图 1.2-3 标架的导矢

二、活动标架的导矢

活动标架方法是研究微分几何的现代方法之一。所谓活动标架，是指依附于曲线或曲面上的三个正文单位矢量，它们构成了一个右手系，并记为$\{o,\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\}$，其中$o$为标架原点，$\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$表示标架单位矢，如果它们都是变元$t$的函数，即$\vec{e}_i=\vec{e}_i\cdot(t)$，$i=1$、2、3，则可对它们求导，如图1.2-3所示。注意$\vec{e}_i$为单位矢量，即定长矢量，则由引理1.2-1可知

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt}\cdot\vec{e}_1=\frac{d\vec{e}_2}{dt}\cdot\vec{e}_2=\frac{d\vec{e}_3}{dt}\cdot\vec{e}_3=0 \qquad (1.2\text{-}8)$$

将式(1.1-12)置上式，即有

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt}(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)=\frac{d\vec{e}_2}{dt}(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)$$

$$=\frac{d\vec{e}_3}{dt}(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)=0 \qquad (1.2\text{-}9)$$

上面表示了三组三矢量共面条件式。以第一式为例，它表明$d\vec{e}_1/dt$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$三个矢量共面，则$d\vec{e}_1/dt$可以用$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$的线性组合来表示

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt}=\vec{e}_2\omega_{12}+\vec{e}_3\omega_{13} \qquad (1.2\text{-}10a)$$

同理，由式(1.2-9)后两式可求得

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt}=\vec{e}_3\omega_{23}+\vec{e}_1\omega_{21} \qquad (1.2\text{-}10b)$$

$$\frac{d\vec{e}_3}{dt}=\vec{e}_1\omega_{31}+\vec{e}_2\omega_{32} \qquad (1.2\text{-}10c)$$

如果用$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$分别与上面式(1.2-10a、b、c)作标积，并注意式(1.1-8c)即可求得

$$\left.\begin{aligned}&\omega_{12}=\frac{d\vec{e_1}}{dt}\cdot\vec{e_2},\quad \omega_{23}=\frac{d\vec{e_2}}{dt}\cdot\vec{e_3},\\ &\omega_{31}=\frac{d\vec{e_3}}{dt}\cdot\vec{e_1}\\ &\omega_{21}=\frac{d\vec{e_2}}{dt}\cdot\vec{e_1},\quad \omega_{32}=\frac{d\vec{e_3}}{dt}\cdot\vec{e_2},\\ &\omega_{13}=\frac{d\vec{e_1}}{dt}\cdot\vec{e_3}\end{aligned}\right\}\qquad(1.2\text{-}11)$$

另外，由于$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=\vec{e_3}\cdot\vec{e_1}=0$，对这些公式求导，可有

$$\frac{d\vec{e_1}}{dt}\cdot\vec{e_2}+\vec{e_1}\cdot\frac{d\vec{e_2}}{dt}=\frac{d\vec{e_2}}{dt}\cdot\vec{e_3}+\vec{e_2}\cdot\frac{d\vec{e_3}}{dt}$$
$$=\frac{d\vec{e_3}}{dt}\cdot\vec{e_1}+\vec{e_3}\cdot\frac{d\vec{e_1}}{dt}=0$$

由上式及式(1.2-11)可知

$$\omega_{12}-\omega_{21}=0,\omega_{23}+\omega_{32}=0,\omega_{31}+\omega_{13}=0$$

上式表明式(1.2-11)中表示的六个系数中，仅有三个独立，并记为

$$\omega_1=\omega_{23}=-\omega_{32},\quad \omega_2=\omega_{31}=-\omega_{13},$$
$$\omega_3=\omega_{12}=-\omega_{21}\qquad(1.2\text{-}12)$$

于是式(1.2-10a、b、c)可简写为：

$$\frac{d\vec{e_1}}{dt}=\vec{e_2}\omega_3-\vec{e_3}\omega_2,\quad \frac{d\vec{e_2}}{dt}=\vec{e_3}\omega_1-\vec{e_1}\omega_3,$$
$$\frac{d\vec{e_3}}{dt}=\vec{e_1}\omega_2-\vec{e_2}\omega_1\qquad(1.2\text{-}13)$$

这就是应用广泛的标架导矢公式。如果在标架之中存在有一个矢量，$\vec{\omega}=\vec{e_1}\omega_1+\vec{e_2}\omega_2+\vec{e_3}\omega_3$，则不难验证

$$\frac{d\vec{e_1}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e_1},\quad \frac{d\vec{e_2}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e_2}$$
$$\frac{d\vec{e_3}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{e_3}\qquad(1.2\text{-}14)$$

若把$\vec{\omega}$视为回转角速度矢量，对比上式与式（1.1-14）可知，标架的导矢$\frac{d\vec{e_i}}{dt}$，可视为是$\vec{e_i}$绕$\vec{\omega}$的回转线速度矢量，这就是标架导矢的运动学意义。

三、圆矢量函数

1. 圆矢量函数

图1.2-4为圆矢量函数。一个单位矢量$\vec{e}$，与x轴夹角为φ，则$\vec{e}$的位置完全由φ的大小来决定，因此可以定义一个矢量函数

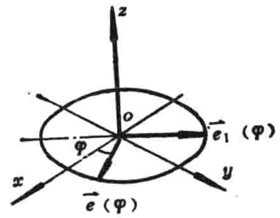

图 1.2-4　圆矢量函数

$$\vec{e}=\vec{e}(\varphi)\qquad(1.2\text{-}15a)$$

当转角越前$\pi/2$时，还可有另一矢量函数

$$\vec{e}_1=\vec{e}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\vec{e}_1(\varphi)\qquad(1.2\text{-}15b)$$

当φ连续变化时，$\vec{e}(\varphi)$、$\vec{e}_1(\varphi)$的矢端绘出单位圆，故称它们为圆矢量函数。不难看出，$\vec{e}(\varphi)$、$\vec{e}_1(\varphi)$、$\vec{k}$构成了右手正交标架，于是有

$$\left.\begin{aligned}&\vec{e}(\varphi)^2=\vec{e}_1(\varphi)^2=\vec{k}^2=1\\ &\vec{e}(\varphi)\cdot\vec{e}_1(\varphi)=\vec{e}(\varphi)\cdot\vec{k}\\ &\qquad=\vec{e}_1(\varphi)\cdot\vec{k}=0\\ &\vec{e}(\varphi)\times\vec{e}_1(\varphi)=\vec{k}\\ &\vec{k}\times\vec{e}(\varphi)=\vec{e}_1(\varphi)\\ &\vec{e}_1(\varphi)\times\vec{k}=\vec{e}(\varphi)\end{aligned}\right\}\qquad(1.2\text{-}16)$$

如果把$\vec{e}(\varphi)$、$\vec{e}_1(\varphi)$展开在$oxyz$坐标系中，则有

$$\vec{e}(\varphi)=\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{e}_1(\varphi)=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j}\qquad(1.2\text{-}17)$$

这就是圆矢量函数的坐标表达式。如对上式求导，可有

$$\frac{d\vec{e}(\varphi)}{d\varphi}=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j}=\vec{e}_1(\varphi)$$
$$\frac{d\vec{e}_1(\varphi)}{d\varphi}=-\cos\varphi\,\vec{i}-\sin\varphi\,\vec{j}=-\vec{e}(\varphi)$$
$$(1.2\text{-}18)$$

这是圆矢量函数的重要微分公式。

2．矢量的回转

设静坐标系为 $\{o, xyz\}$，动坐标系为 $\{o, x'y'z'\}$，z、z' 两轴重合，如图1.2-5所示。静坐标系中有一矢量

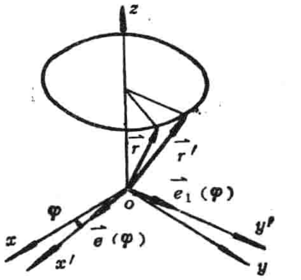

图 1.2-5 矢量的回转

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1.2\text{-}19a)$$

当 $\vec{r}$ 随动坐标系一起绕z轴回转时，转到了 $\vec{r}'$，它在静坐标系中表达式为

$$\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \qquad (1.2\text{-}19b)$$

注意动坐标系的标架，在静坐标系中的表达式为 $\{o, \vec{e}(\varphi)\vec{e}_1(\varphi)\vec{k}\}$；同时 $\vec{r}$ 在回转时，相对于动坐标系的坐标将不变，仍然是x、y、z，故有

$$\vec{r}' = x\vec{e}(\varphi) + y\vec{e}_1(\varphi) + z\vec{k} \qquad (1.2\text{-}19c)$$

将式(1.2-17)置上式，可有

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= x(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}) + y(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) + z\vec{k} \\ &= (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\vec{i} + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned} \qquad (1.2\text{-}20)$$

对比式(1.2-19b)、(1.2-20)，可得回转前后坐标变换公式

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad (1.2\text{-}21)$$

如果采用矩阵方法，可将上式改写成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.2\text{-}22)$$

为了书写简便，可以把上式等号右边第一个矩阵用符号 $\vec{A}_k(\varphi)$ 表示，而把上式写成

$$\vec{r}' = \vec{A}_k(\varphi)\vec{r} \qquad (1.2\text{-}23)$$

即
$$\vec{A}_k(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2\text{-}24)$$

$\vec{A}_k(\varphi)$表示矢量回转矩阵，其中 k是回转轴 z 方向的单位矢量，φ则是转角。

同样，若矢量随动坐标系一起绕 x 轴或 y 轴回转φ 角，则它在静坐标系中的表达式分别为

$$\vec{r}' = \vec{A}_i(\varphi)\vec{r}, \qquad \vec{r}' = \vec{A}_j(\varphi)\vec{r} \qquad (1.2\text{-}25a、b)$$

而
$$\vec{A}_i(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (1.2\text{-}26)$$

$$\vec{A}_j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (1.2\text{-}27)$$

这些公式在后面几章应用极多。

第三节　工程常用曲线

现在讨论工程常用曲线及其简单的性质。由于其种类繁多，这里只能对几种有代表性的曲线作一介绍。

一、平面螺线

1．阿基米德螺线

平面上动点绕定点回转时并作径向平移，当平移与转角成正比时，动点轨迹即为阿基米德螺线，如图 1.3-1 所示。

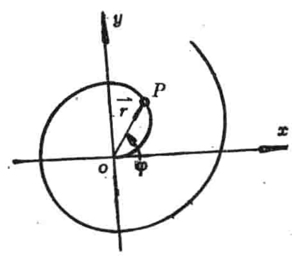

图 1.3-1 螺线

设转角为φ，向径为ρ，$\rho = a\varphi$，a为常数，于是有

$$\vec{r} = \rho\vec{e}(\varphi) = a\varphi\vec{e}(\varphi) \quad (1.3\text{-}1a)$$

将式(1.2-17)置上式。即可得坐标式

$$x = a\varphi\cos\varphi \qquad y = a\varphi\sin\varphi \quad (1.3\text{-}1b)$$

上面两式即为阿基米德螺线方程。它的重要特征是径向等升程。在等速升程凸轮、三爪卡盘、精密测量的读数装置等许多方面，都应用着这种曲线。

2．对数螺线

当向径函数为$\rho = e^{a\varphi}$(a为常数)时，将形成对数螺线。其矢量方程为

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r} = e^{a\varphi}\vec{e}(\varphi) \\ x = e^{a\varphi}\cos\varphi \qquad y = e^{a\varphi}\sin\varphi\end{array}\right\}(1.3\text{-}2a、b)$$

对上面第一式求导，可有

$$\dot{\vec{r}} = ae^{a\varphi}\vec{e}(\varphi) + e^{a\varphi}\vec{e}_1(\varphi)$$

$\dot{\vec{r}}$为螺线的切线矢量，现在来求$\vec{r}$与$\dot{\vec{r}}$的夹角δ。由式(1.1-8d)可知

$$\cos\delta = \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{\sqrt{\vec{r}^2}\sqrt{\dot{\vec{r}}^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

上式表明δ为常数。即对数螺线各点处的切线与向径的夹角恒为常值，这是一个重要性质。

二、圆渐开线、泛渐开线

1．圆渐开线

直线在半径为R的基圆上无滑滚动时，直线上一点的轨迹为圆渐开线，如图1.3-2所示。

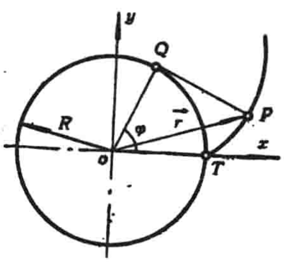

图 1.3-2　圆渐开线

设P为渐开线上动点，则有

$$\vec{r} = \vec{oP} = \vec{oQ} + \vec{QP}$$

$$\vec{oQ} = R\vec{e}(\varphi) \qquad QP = \overset{\frown}{QT} = R\varphi$$

$$故\vec{QP} = -R\varphi\vec{e}_1(\varphi)$$

式中的负号表示$\vec{QP}$与$\vec{e}_1(\varphi)$方向相反。因此得到

$$\vec{r} = R\vec{e}(\varphi) - R\varphi\vec{e}_1(\varphi) \quad (1.3\text{-}3a)$$

若将式(1.2-17)置上式。可得坐标表达式

$$x = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$

$$y = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi \quad (1.3\text{-}3b)$$

对式(1.3-3a)求导，可得

$$\dot{\vec{r}} = R\varphi\vec{e}(\varphi)$$

这说明$\dot{\vec{r}}$与$\vec{oQ}$同向，即点P处的切线与oQ平行。由于$QP\perp oQ$，所以QP必为P点的法线。这是圆渐开线的重要性质之一。

2．泛渐开线

直线外一点与直线呈刚性联结。当直线在半径为R的圆上无滑滚动时，点的轨迹即泛渐开线。如图1.3-3所示。设动点到直线的距离为h，当点在圆内一侧时$h>0$，将形成延长渐开线；当点在圆外一侧时$h<0$，将形成变短渐开线。

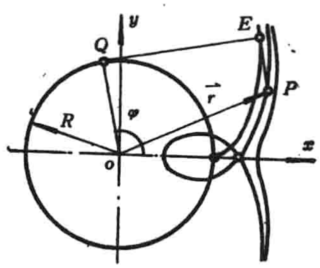

图 1.3-3　泛渐开线

利用同上面类似的方法，可写出

$$\vec{r} = \vec{oP} = \vec{oQ} + \vec{QE} + \vec{EP}$$

其中$\vec{oP} = R\vec{e}(\varphi)$，$\vec{QE} = -R\varphi\vec{e}_1(\omega)$，$\vec{EP} = -h\vec{e}(\varphi)$，于是曲线方程为

$$\vec{r} = (R-h)\vec{e}(\varphi) - R\varphi\vec{e}_1(\varphi) \quad (1.3\text{-}4a)$$

坐标表达式为

$$x = (R-h)\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$

$$y = (R-h)\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi \quad (1.3\text{-}4b)$$

对式(1.3-4a)求导

$$\dot{\vec{r}} = -h\vec{e}_1(\varphi) + R\varphi\vec{e}(\varphi)$$

另外，由图1.3-3可知

$$\vec{QP} = \vec{QE} + \vec{EP} = -R\varphi\vec{e}_1(\varphi) - h\vec{e}(\varphi)$$

因此可知。$\vec{r}\cdot\overrightarrow{QP}=0$，即$\vec{r}\perp\overrightarrow{QP}$。这说明$QP$为泛渐开线的法线，这一点与圆渐开线相类似。

三、摆线

1．外摆线

半径为r的滚圆在半径为R的母圆外侧无滑滚动，滚圆周上一点的轨迹为外摆线。

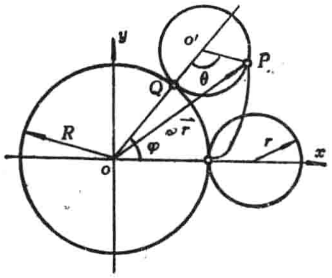

图 1.3-4 外摆线

由图1.3-4可知

$$\vec{r}=\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oo'}+\overrightarrow{o'P}$$

其中$\overrightarrow{oo'}(R+r)\vec{e}\varphi()$，$\overrightarrow{o'P}=-r\vec{e}(\theta+\varphi)$，同时由无滑滚动条件可知：$\varphi=\frac{r}{R}\theta$，因此有

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r}=(R+r)\vec{e}(\frac{r}{R}\theta)-r\vec{e}(\theta+\frac{r}{R}\theta)\\&x=(R+r)\cos(\frac{r}{R}\theta)-r\cos(\theta+\frac{r}{R}\theta)\\&y=(R+r)\sin(\frac{r}{R}\theta)-r\sin(\theta+\frac{r}{R}\theta)\end{aligned}\right\}$$

(1.3-5a、b)

上面就是外摆线的矢量方程及坐标参数方程。若对上面第一式求导，可得

$$\vec{r}=(R+r)\frac{r}{R}\vec{e}_1(\frac{r}{R}\theta)-r(1+\frac{r}{R})\vec{e}_1(\theta+\frac{r}{R}\theta)$$

同时由图1.3-4可知：

$$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{Qo'}+\overrightarrow{o'P}=r\vec{e}(\varphi)-r\vec{e}(\theta+\varphi)$$

$$=r\vec{e}(\frac{r}{R}\theta)-r\vec{e}(\theta+\frac{r}{R}\theta)$$ 由此可知：

$\vec{r}\cdot\overrightarrow{QP}=0$，这说明$QP$为外摆线的法线。

2．内摆线

半径为r的滚圆在半径为R的母圆内无滑滚动，滚圆周上一点的轨迹为内摆线。

由图1.3-5可知

$$\vec{r}=\overrightarrow{oP}=\overrightarrow{oo'}+\overrightarrow{o'P}$$

$$=(R-r)\vec{e}(\varphi)-r\vec{e}(\pi-\theta+\varphi)$$

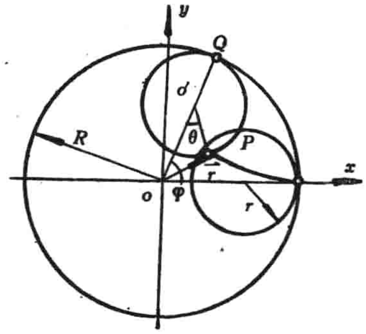

图 1.3-5 内摆线

注意$\varphi=\frac{r}{R}\theta$

$$\begin{aligned}&\vec{e}(\pi-\theta+\varphi)\\&=\cos(\pi-\theta+\varphi)\vec{i}+\sin(\pi-\theta+\varphi)\vec{j}\\&=-\cos(-\theta+\varphi)\vec{i}-\sin(-\theta+\varphi)\vec{j}\\&=-\vec{e}(-\theta+\varphi)\end{aligned}$$

故有

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r}=(R-r)\vec{e}(\frac{r}{R}\theta)+r\vec{e}(-\theta+\frac{r}{R}\theta)\\&x=(R-r)\cos(\frac{r}{R}\theta)+r\cos(-\theta+\frac{r}{R}\theta)\\&y=(R-r)\sin(\frac{r}{R}\theta)+r\sin(-\theta+\frac{r}{R}\theta)\end{aligned}\right\}$$

(1.3-6a、b)

利用同上方法可以证明PQ为内摆线法线，读者可自行证明。

综上所述，圆渐开线、泛渐开线、外摆线、内摆线，都具有一个共同的性质：两个互相无滑滚动的发生线(如圆与直线，圆与圆)的切点，到曲线上P点的连线必定是曲线的法线。这是由旋轮线的一般性质所决定的，上面提到的四种曲线都是旋轮线的特例，详情见本章第五节。

四、螺旋线

1．圆柱螺旋线

圆柱上一动点，它绕轴作螺旋运动时，其轨迹即称圆柱螺旋线，工程上常简称为螺旋线。这里所说的螺旋运动，如无特殊说明，一般是指等距螺旋运动，即轴向平移与转角成正比。比例常数为p时，轴向平移即为$p\varphi$。p称为螺旋常数，它是指动点转过单位角度时轴向移动的距离。工程上常用导程λ这一参数，它是指动点转过一周时轴向移动的距离，很显然

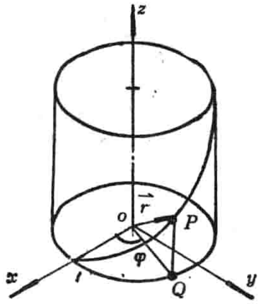

图 1.3-6 圆柱螺旋线

$$p = \lambda/2\pi$$

参考图1.3-6可知

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r} = \overrightarrow{oP} = \overrightarrow{oQ} + \overrightarrow{QP} = R\vec{e}(\varphi) + p\varphi\vec{k}\\&x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ z = p\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(1.3\text{-}7a、b)$$

现在求切线矢量，对上面第一式求导

$$\dot{\vec{r}} = R\dot{\vec{e}}(\varphi) = p\vec{k}\qquad(1.3\text{-}7c)$$

工程上常把螺旋线的切线与 z 轴的夹角称为螺旋角，记为β，可知

$$\left.\begin{aligned}&\cos\beta = \frac{\dot{\vec{r}}\cdot\vec{k}}{\sqrt{\dot{\vec{r}}^2}} = \frac{p}{\sqrt{R^2+p^2}}\\&\text{或}\quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{p}{R}\end{aligned}\right\}\qquad(1.3\text{-}8)$$

可以看出等距圆柱螺旋线各点的螺旋角均相等，即它是一个常数。

2．圆锥面螺旋线

圆锥面上一动点绕轴线作螺旋运动时，其轴迹为圆锥面螺旋线。齿轮滚刀的铲背曲线，就是圆锥面螺旋线的例子。

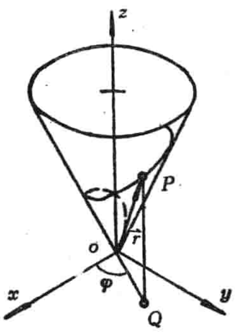

图 1.3-7· 圆锥面螺旋线

参考图 1.3-7，设锥顶半角为α，螺旋常数为p，则

$$\left.\begin{aligned}&\vec{r} = \overrightarrow{oP} = \overrightarrow{oQ} + \overrightarrow{Qp} = p\varphi\operatorname{tg}\alpha\,\vec{e}(\varphi) + p\varphi\vec{k}\\&x = p\varphi\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi,\ y = p\varphi\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi,\ z = p\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(1.3\text{-}9a、b)$$

注意圆锥面螺旋线的切线与 z 轴的夹角不是常数。

第四节 曲线上的活动标架

从本节开始将讨论曲线的微分性质。首先需要找到一种研究方法，以便能够简捷而有效地揭示出：曲线于一个点的无穷小邻域内的微分结构，活动标架方法正是这样一种方法。在曲线的正常点处可以找到三条特征直线：切线、主法线、副法线，同时三条特征直线又构成了三个特征平面：法面、密切面、从切面，它们形成了曲线的三面形。切线、主法线、副法线的单位矢，组成了正交标架，即曲线上的活动标架。

一、曲线的基本三面形

1．切线、法面

曲线的切线可视为弦的极限，它与曲线的关系十分密切。在曲线某点的无穷小邻域中，用切线去取代曲线时，误差为二阶无穷小。同时，一般曲线正常点处的切线只有一条，很有代表性。若曲线方程为

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

则
$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

表示曲线的切线矢量，见图1.4-1。若其单位矢为α，则由上式可求得

$$\vec{\alpha} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\qquad(1.4\text{-}1)$$

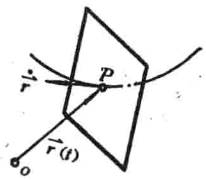

图 1.4-1 切线及法面