

說 明

本题解是我们根据汇集的中国科学院高能物理研究所、研究所、科学技术大学、北京大学、南京大学、复旦大学、大学、四川大学、兰州大学、北京师范大学、华东师范大学、上海交通大学等三十余所研究单位和高等院校硕士学位研究生量子力学招生考试题（一九八〇年——一九八三年）作出解答编写而成的。

为了便于教学和报考有关专业研究生的读者参考，我们将题解基本上按现行《量子力学教学大纲》的内容加以分类。将超出大纲内容的题目及少数难度较大或综合性较强的题目放在其他问题类。并在附录中附有题解中各单位完整的试题及解答参照表。

由于编者水平有限，经验不足，时间仓促，错误和不当之处在所难免。敬请各位老师和读者提出批评、指正。

阜阳师范学院物理系

一九八三年十月

目 录

一、量子力学的基本概念、基本原理和基本方法	(1)
二、量子力学基本理论的简单应用 (一维问题、中心力场、带电粒子在电磁场中的运动)	(79)
三、角动量与角动量理论	(148)
四、微扰理论 (定态微扰、量子跃迁)	(215)
五、散射问题	(277)
六、多粒子体系	(291)
七、其它问题 (综合题目、二次量子化方法、相对论量子力学)	(309)
附录：试题	(337)

一、量子力学的基本概念、基本原理和基本方法

试作为公理般的概括量子力学中的一些基本假定。

解：一、状态用波函数描述。波函数满足态叠加原理。反映了微观粒子的波性。

二、力学量用厄米算符表示。

一对正则共轭变量之间满足对易式： $[p, q] = i\hbar$
反映了量子性。

三、力学量的可能值为该力学量算符的本征值，取可能值的几率为该本征态展开系数的模方。反映了统计规律性。

四、状态满足方程：

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad \text{反映运动规律}$$

五、全同粒子不可区分。二粒子对称或反对称波函数描述。

自旋为半整数称为费米子，波函数反对称。

自旋为整数，称为玻色子，波函数对称。反映了交换对称性。

何谓全同性原理：微观粒子应择按全同性原理分类！举例说明之。

解：全同粒子不可分辨，任意交换两个粒子状态不变。故波函数只能是对称或反对称的。据此可以把微观粒子分为

两类:

波函数对称, 玻色子, 自旋为整数, 如: 光子, π 介子等, 服从玻色统计。

波函数反对称, 费米子, 自旋为半整数, 如: 电子, 质子, 中子等, 服从费米统计。

3. 简单解释: 隧道效应 ② 本征函数 ③ 狄拉克记号 ④ 宇称

解: ①: 粒子在势垒高度 U_0 时, 仍能贯穿势垒的现象, 称为隧道效应。这种效应完全是微观粒子具有波动性形成的。

② 若算符作用于一函数上等于一个数乘以那个函数, 称这个数为该算符的本征值, 此函数称为算符对应这个本征值的本征函数。表示为:

$$\hat{F}\varphi_n = \lambda\varphi_n \quad \text{其中 } \lambda \text{ 为本征值, } \varphi_n \text{ 为本征函数。}$$

③ 量子力学中的状态 (波函数) 可以用抽象的线性空间中——希尔伯特空间中的矢量 (一般为复) 表示, 记为 $|\psi\rangle$, 其共轭矢量为 $\langle\psi|$, 两矢量的内积记为 $\langle\psi|\psi\rangle$, 且有: $\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle^*$, 状态的这种抽象地表示, 我们称为狄拉克记号。

④ 描述空间反射对称性的物理量称为宇称, 定义: 宇称算符 $\hat{P}$

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

其本征值 $\lambda = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$, 即 $\hat{P}\varphi_n(\vec{r}) = \begin{cases} \varphi_n(\vec{r}) & \text{为偶宇称态} \\ -\varphi_n(\vec{r}) & \text{为奇宇称态} \end{cases}$

⑤. 以某一力学量 (或一组力学量) 的完备的正交归一化的本征函数作为基矢, 构造一希尔伯特空间, 在此空间中把量子体系的状态, 力学量、量子力学基本公式都可具体地表示出来, 三种表象称为该力学量的表象。不同力学量的表象之间存在着随时的变换——么正变换。

4. 就状态波函数和力学量算符作简单说明:

- 1) 坐标表象和动量表象的差别和它们之间的关系。
- 2) 薛定谔图象和海森堡图象的差别和它们之间的关系。

解: 1)

坐标表象

动量表象

波函数

$$\langle \vec{r} | \psi \rangle = \psi(\vec{r})$$

$$\langle \vec{p} | \psi \rangle = \psi(\vec{p})$$

$|\psi(\vec{r})|$ 为粒子位于 $\vec{r}$ 处的

$|\psi(\vec{p})|^2$ 为粒子的动量

几率密度:

量 $\vec{p}$ 的几率密度。

力学量:

$$\langle \vec{r} | \hat{O} | \vec{r} \rangle = O(\vec{r}, \vec{r})$$

$$\langle \vec{p} | \hat{O} | \vec{p} \rangle = O(\vec{p}, \vec{p})$$

或写成 $O(\vec{r}, -i\hbar \nabla)$

$O(\vec{p}, i\hbar \nabla_p)$

关系:

$$\langle \vec{r} | \psi \rangle = \int \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle d\vec{p} \langle \vec{p} | \psi \rangle$$

$$\langle \vec{r} | \hat{O} | \vec{r} \rangle = \int \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle d\vec{p} \langle \vec{p} | \hat{O} | \vec{p} \rangle d\vec{p} \langle \vec{p} | \vec{r} \rangle$$

2)

S 图象

H 图象

波函数:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |x\rangle_S = \hat{H} |x\rangle_S$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |x\rangle_H = 0$$

力学量:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}_S = 0$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}_H = [\hat{O}_H, \hat{H}]$$

关系:

$$|x\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |x\rangle_H$$

($\hat{H}$ 不显含时间)

$$\hat{O}_H = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{O}_S e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$$

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle t | \hat{O} | t \rangle_S = \langle x | \hat{O} | x \rangle_H$$

5. 以角动量为例说明量子对易关系的数学形式和物理意义。

解：角动量算符各分量之间对易关系式：

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k$$

角动量平方算符与各分量对易即： $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$

由上面角动量算符的对易式，我们可以写出任意两个代表力学量的厄米算符 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ 对易关系的普遍形式。

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}$$

其中 $\hat{C}$ 为一算符。

i) 当 $\hat{C}$ 为非零算符时，($\hat{C}$ 可为常数算符如 $\hat{C} = C = 1$)：

力学量 A 、 B 存在相互制约关系：

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} |\langle C \rangle|, \quad \langle C \rangle \text{ 表示力学量 } C \text{ 的平均值。}$$

一般情况下 $\langle C \rangle \neq 0$ ， A 、 B 不能同时取确定值。

在特殊情况下， $\langle C \rangle = 0$ ， A 、 B 可以同时取确定值，可以具有共同本征态，但不是共同本征态的完全集。例如，在 $[\hat{L}^2, \hat{L}_z]$ 的共同本征态 $|l, m\rangle$ 中，当 $l=0, m=0$ 时， $\Delta L_z = 0, \Delta L_y = \Delta L_x = 0$ 即 L_x, L_y, L_z 在态 $|0, 0\rangle$ 下都同时取确定值。

ii) 当 $\hat{C} = 0$ 时：

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0, \quad \Delta A \cdot \Delta B \geq 0 \quad \text{表明 } A, B \text{ 无制约}$$

关系，可以同时取确定值。

它们存在共同本征态的完全集。

如： $\hat{L}^2$ 与 $\hat{L}_z$ 对易， $\{|l, m\rangle\}$ $l=0, 1, 2, \dots, m=0, 1, 2, \dots$

$\pm l$ 为其共同本征态的完全集。

综上所述，对易式 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \hat{C}$ ，反映了量子力学中，力学量的相互制约程度，这也正是导致一些力学量只能是量子化的原因。若一切力学量都相互对易，即 $\hbar \rightarrow 0$ ，量子力学就回到了经典力学。

6. 试列举并简单说明光的量子性的实验根据:

解: 1) 黑体辐射:

完全黑体与热辐射 (一种电磁辐射) 达到平衡时, 辐射能量密度 E_ν 随频率而变化. 普朗克由实验数据找到了著名的经验公式:

$$E_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \text{ 但这个公式不符合经典物理公式}$$

去是经典物理理论所解释不了的. 对于频率极低的电子辐射, 物体只能以 $h\nu$ 为单元吸收或发射它, (h 为一普适常数), 即是量子化的, 且每个量子的能量为 $\epsilon = h\nu$.

2) 光电效应

实验发现, 光照射到金属表面上有电子从金属中逸出, 其规律为:

i) 对于一定金属材料制成的电极, 有一确定的临界频率 ν_0 . 且 $\nu_{光} < \nu_0$ 时, 无光电子逸出.

ii) $\nu_{光} > \nu_0$ 时, 不论照射光强度多弱; 光一照射, 立刻有光电子逸出.

iii) 逸出的光电子的能量仅与 $\nu_{光}$ 有关, 与照射光的强度无关.

以上实验事实由光的电磁理论无论如何也解释不了的. 只能把光看成是“光量子”. 照射到金属表面上, 即电子“光量子”的能量 $h\nu$ 使电子克服逸出功而逸出金属表面. 即:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - A, \text{ 其中 } A \text{ 为逸出功.}$$

3) 康普顿散射:

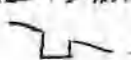
高频的X射线被轻元素中的电子散射后, 波长随散射角增加而增大. 康普顿由散射实验得到波长的改变为:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta),$$

其中 h 为普朗克常数， θ 为散射角。这种波长在散射中改变的效应，只是光散射的“光量子”与电子碰撞的结果，由粒子在碰撞过程中能量、动量守恒，从理论上即可导出与康普顿散射实验完全一致的结果。

7. 用简洁的语言回答下列问题：

- 为什么金属在电场作用下能发射电子？
- 为什么自然界中不存在正、仲二种氮？
- 为什么自然界中只存在 H_2 而不存在 H_3 ？
- 为什么卢瑟福能用经典力学计算出正确的 α 散射截面公式？
- 原子核 β^- 放射性放出的电子通常只有 1MeV 左右，根据测不准关系我们可知这个电子不是原来就存在于原子核中的，为什么？

解：a) 金属中电子可近似看成约束在方阱中运动，外电场的作使势阱变为  由隧道效应，电子有一定的贯穿几率，所以可以发射电子。

b) 正氮是电子总自旋 $S=1$ 的态（三重态），仲氮是电子总自旋 $S=0$ 的态（单态）。由耦合法则的选择定则 $\Delta S=0$ ，两种态之间几乎不能相互转化。故它们有稳定的最低能级，可以存在正、仲二种氮。

c) 对于二个 H 原子，二电子自旋部分可以形成反对称态 $S=0$ ，由泡利原理，二电子的空间部分应为对称态，电子云可以重叠重叠，形成分子。

但对于三个 H 原子，电子自旋部分又能形成对称态，由泡利原理，三电子的空间部分应为反对称态，电子云彼此排斥，不能形成分子。

d) 经典理论适用条件为: $\left| \frac{d \ln V}{dr} \lambda \right| \ll 1$; 对 α 粒子散射

$$V = \frac{Zze^2}{r} \quad \left| \frac{d \ln V}{dr} \right| = \frac{1}{r}$$

α 粒子的能量 $E \approx 10^6 \text{ eV}$; 波长 $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx 10^{-15} \text{ M}$

而由 $E = \frac{Zze^2}{r_m}$ $r > r_m = \frac{Zze^2}{E} \approx 10^{-14} \text{ M}$

所以 $\left| \frac{d \ln V}{dr} \lambda \right| = \frac{\lambda}{r} < \frac{1}{10}$ 即 $\frac{\lambda}{r} \ll 1$ 满足适用条件

因此对于 α 粒子散射由核径力等可以计算出正确的散射截面。

e) 若假设 β^- 放射出的电子原来就存在于原子核中, 则有
测不准关系: $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{2}$

$\Delta x \approx a = 10^{-15} \text{ M}$ 为核线度。

其能量 $E \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{h^2}{8ma^2} = 10^{-9} \text{ J} = 10^4 \text{ MeV} \gg 1 \text{ MeV}$

与实验矛盾, 故知电子不是原来存在于原子核中的。

8. 是非题: (在题后括号内填上正确或错误)

1) 1000 电子伏的质子的德布罗意波长比 10000 电子伏特的电子的德布罗意波波长长。 ($\checkmark$)

2) 粒子在方向的动量 p_x 与在方向的角动量 L_x 是不相容的力学量。 ($\times$)

3) 如果算子 $\hat{A}$ 是厄米算子, α 是任意一个复数, 则 $\alpha \hat{A}$ 也是一个厄米算子。 ($\times$)

4) He 有 2 种同位素, He^3 和 He^4 。由 He^4 组成的系统遵从玻色统计。 ($\checkmark$) 由 He^3 组成的系统遵从费米统计。 ($\checkmark$)

9. 举出五个与微观现象相关的普遍适用的自然常数, 以 =

位有效数字写出其近似值，说出其物理意义。在其中任选两个简单说明判据其值的依据的原理。

解：1) 普朗克常数 $h = 6.63 \times 10^{-27}$ 焦·秒

2) 真空光速 $c = 3.00 \times 10^{10}$ 厘米/秒

3) 电子电荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ 库仑

4) 精细结构常数 $\alpha = 7.30 \times 10^{-3}$

5) 阿佛加德累常数 $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ (摩尔) $^{-1}$

物理意义：

h ：基本作用量子，是判断一物理体系在何种情况下经典物理规律可应用的简单判据。即当物理体系任何具有作用量纲的“物理”动力学变量 $\gg h$ 时，用经典规律描述已足够精确，反之必须由量子理论代替。

c ：为任何物质粒子速度的上限，也是真空中能量或信息传播的速度上限，是判断经典物理规律在较高速度的情况下能否通用的简单判据，即当 $v \ll c$ 时用经典规律描述已足够精确，反之，必须由相对论来代替。

e ：电荷的基本单元，即任何电荷粒子所带电量只能是 e 的整数倍。

α ：精细荷电量为 e 的粒子与电磁场之间耦合程度的耦合常数。

N_0 ：为在 12 克同位素 C^{12} 中包含的原子数目，是联系微观物理学与宏观物理学的纽带。

大的判据原理：

由爱因斯坦光电方程

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - W$$

(其中： W 为材料的逸出功，对于一定材料制成的光阴极 W 为

常数)

如: 光电子动能 $E_e = \frac{1}{2} m_e v^2$ 与入射光的频率 ν 有线性关系, 每改变入射到光阴极的单色光的频率 ν , 可测出光电子的动能 E_e (利用在光阴极与收集极之间加截止电势 V_0 , 即 $E_e = eV_0$) 以入射光频率 ν 为横坐标, E_e 为纵坐标, 作出 E_e 随 ν 的变化曲线, 其斜率即为 h .

电子电荷 e 的测量: 可用密立根油滴实验测出.

原理: 荷电量为 q 的油滴在电场中作匀速运动时, 其电场力与重力平衡.

$$\text{即 } qE = \rho_{\text{油滴}} V g \quad \text{其中: } E \text{ 电场强度, } V \text{ 油滴体积, } \rho \text{ 油滴密度.}$$

$$\text{或 } q = \frac{\rho V g}{E}$$

每改变 E 和油滴带电量 q , 使满足上式, 可测出一系列值 $q_1, q_2, q_3, \dots$ 由这些数据可推得基本电荷的值.

10. 在讨论与时间有关的微扰理论时 $\psi_R^{(0)}(\vec{r})$ 是 H^0 的本征态, 为什么我们可以把它取为 $H = H^0 + H'(t)$ 的本征的初态.

解: 因为在讨论与时间有关的微扰理论时, 实际上求解薛定谔方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H(t) \psi(\vec{r}, t)$$

其中: $H(t) = H^0 + H'(t)$, $H'(t)$ 为微扰.

将任意时刻的状态 $\psi(\vec{r}, t)$ 由上方程和初始条件唯一地确定. 在未加微扰时即初始时刻体系的状态为 $H(t) = H^0$ 不是含时间, 其本征函数构成完全集. 一般情况下体系的初态 $\psi(\vec{r}, 0) = \sum_n C_n \psi_n^{(0)}(\vec{r})$, 为 H^0 的本征态的叠加, 加微扰 $H'(t)$ 后, 状态

随时间变化，遵从薛定谔方程由初态 $\psi(\vec{r}, 0) \xrightarrow{1 \pm \tau} \psi(\vec{r}, t)$ 。

在讨论跃迁几率问题时，为方便起见取 $E_n = \sqrt{n}k$ ，即认为系统初始状态为 H^0 的某一本征态 $\psi_n^{(0)}(\vec{r})$ 。微扰 $H'(t)$ 仅引起粒子在不同能级之间的跃迁，这样做并不影响讨论问题的物理实质。

11. 说明微扰论做法（不必写出推导过程）和计算公式。

解：微扰论的主要思想是：当薛定谔方程不能直接要求解或求解很困难时，我们将体系的哈密顿量适当地分成两部分：

$$H = H^0 + H' = H^0 + \lambda \hat{W} \quad \dots\dots (1)$$

其中 $|\lambda| \ll 1$ ，为描述相互作用强度的参数。

且 H^0 的本征值及本征函数为已知或可求解得出，把 H' 看成微扰，将 H' 对体系的影响，按 λ 的幂次逐级考虑进去。求解各级近似的薛定谔方程。

下面以非简并定态微扰论为例说明此方法的主要步骤：

1) 按 λ 的幂次写出各级近似方程

$$\lambda^0: H^0 \psi^{(0)} = E^{(0)} \psi^{(0)} \quad \dots\dots (2) \text{ 零级近似方程}$$

$$\lambda^1: H^0 \psi^{(1)} + \hat{W} \psi^{(0)} = E^{(0)} \psi^{(1)} + E^{(1)} \psi^{(0)} \quad \dots\dots (3)$$

一级近似方程

2) 将 H^0 的本征函数 $\psi_n^{(0)}$ 作为体系的一级近似波函数，相应的本征值 $E_n^{(0)}$ 作为零级近似能量。

$$\text{令: } \psi^{(1)} = \sum_n a_n^{(1)} \psi_n^{(0)} \quad \dots\dots (4)$$

代入一级近似方程 (3)，求解 (3) 得到体系能量的一级修正和波函数的一级修正。

$$E_n^{(1)} = H'_{nn} = (\psi_n^{(0)}, \hat{H}' \psi_n^{(0)}) \quad \dots\dots (5)$$

$$\psi_n^{(1)} = \sum_n' \frac{H'_{nr}}{E_n^{(0)} - E_r^{(0)}} \psi_r^{(0)} \quad \dots\dots (6)$$

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

本征值。

$$\therefore [\hat{F}, \hat{G}] = 0$$
$$\hat{F}\hat{G}|f\rangle = \hat{G}\hat{F}|f\rangle = \hat{G}a_+|f\rangle = a_+\hat{G}|f\rangle$$

即 $\hat{G}|f\rangle$ 亦为算符 $\hat{F}$ 对应本征值 a_+ 的本征态。

又 $\hat{F}$ 的本征值问题是非简并的，则 $\hat{G}|f\rangle$ 最多与 $|f\rangle$ 差一个常数因子。

$$\text{即 } \hat{G}|f\rangle = b_+|f\rangle \quad b_+ \text{ 为常数。}$$

故 $|f\rangle$ 亦为算符 $\hat{G}$ 的本征态，其本征值为 b_+ 。

2) 设有简并，~~非简并~~

$$\text{则 } \hat{F}|f, \alpha\rangle = a_+|f, \alpha\rangle$$

$$\hat{F}\hat{G}|f, \alpha\rangle = \hat{G}\hat{F}|f, \alpha\rangle = \hat{G}a_+|f, \alpha\rangle = a_+\hat{G}|f, \alpha\rangle$$

$$\therefore \hat{G}|f, \alpha\rangle \text{ 亦为 } \hat{F} \text{ 的本征值为 } a_+ \text{ 的本征态。}$$

但因有简并，一般有：

$$\hat{G}|f, \alpha\rangle = \sum_{\alpha'=1}^R c_{\alpha'}|f, \alpha'\rangle$$

即：算符 $\hat{G}$ 不一定将 $|f, \alpha\rangle$ 变为 $b_+|f, \alpha\rangle$ ，而一般情况是 $|f, \alpha\rangle$ 对不同的 α 值的态的迭加。

因此，算符 $\hat{G}$ 在态 $|f, \alpha\rangle$ 中，不一定有确定值。

例如：在氢原子中的电子， $\hat{H}$ 、 $\hat{L}^2$ 、 $\hat{L}_z$ 对易，有共同的本征态 $|nlm\rangle$ 。

但 $\hat{H}$ 、 $\hat{L}^2$ 有确定值的态是简并的，故在 $|nlm\rangle$ 中 $\hat{L}_z$ 亦不一定取确定值。

如，在态 $|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|210\rangle + |211\rangle]$ 中， $\hat{H}$ 有确定值。

$$E_2 = \frac{-11e^4}{8a^2} \quad \hat{L}^2 \text{ 有确定值，} \hat{L}_z \text{ 无确定值。}$$

17. 回答下列问题：