

第五章 线性系统理论引论

§ 5-0 引言	5-0-1
§ 5-1 线性系统的数学描述	5-1-1
5-1-1 线性系统的经典描述方法	5-1-1
一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-1
1. 用微分方程来描述	5-1-1
2. 用传递函数来描述	5-1-2
3. 用频率特性来描述	5-1-4
4. 用脉冲过渡函数来描述	5-1-4
5. 借助图形来描述(符号流程图)	5-1-7
二、常系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-16
1. 用差分方程来描述	5-1-16
2. 用Z传递函数来描述	5-1-17
三、变系数、线性、连续系统的经典描述方法.....	5-1-18
四、变系数、线性、离散系统的经典描述方法.....	5-1-19
5-1-2 线性系统的现代描述方法	5-1-19
一、线性系统的状态空间描述	5-1-19
1. 线性、连续系统的状态空间描述	5-1-19
2. 线性、离散系统的状态空间描述	5-1-25
二、线性系统的结构图表示	5-1-27
三、常系数、线性、连续系统的传递矩阵	5-1-28
四、常系数、线性、离散系统的传递矩阵	5-1-29

五、随机线性系统的数学描述 5-1-30

§ 5-2 线性系统的最佳设计 5-2-1

5-2-1 最佳设计问题的提出 5-2-1

5-2-2 最佳设计的性能指标 5-2-4

5-2-3 最佳滤波原理 5-2-7

一、维纳最佳滤波原理 5-2-7

二、卡尔曼滤波原理 5-2-14

5-2-4 最佳控制原理 5-2-19

一、确定性系统最佳控制原理 5-2-19

二、随机性系统最佳控制原理 5-2-21

三、随机性系统最佳控制问题的分解原理 5-2-23

§ 5-3 线性系统的基本特性 5-3-1

5-3-1 引言 5-3-1

5-3-2 线性系统的可观性 5-3-2

一、系统可观性概念 5-3-2

二、系统完全状态可观性准则 5-3-2

三、系统一致可观性概念 5-3-14

5-3-3 线性系统的可控性 5-3-29

一、系统可控性概念 5-3-29

二、系统完全状态可控性准则 5-3-30

三、系统完全输出可控性准则 5-3-39

四、系统一致可控性概念 5-3-40

5-3-4 线性系统的稳定性	5-3-57
一、系统稳定性概念	5-3-57
1. 系统的描述	5-3-57
2. 平衡状态	5-3-58
3. 稳定性概念	5-3-58
二、李雅普诺夫直接法	5-3-61
三、线性系统的稳定性准则	5-3-68
四、线性系统稳定性的一般形式	5-3-80
五、利用李雅普诺夫函数	
估计系统时间常数的上界	5-3-83
§ 5-4 线性系统的不变量及其规范形式	5-4-1
5-4-1 状态变量的线性变换及	
系统的不变量	5-4-1
5-4-2 线性系统的若当规范形式	5-4-3
5-4-3 线性系统的可控规范形式	5-4-25
5-4-4 线性系统的可观规范形式	5-4-31
§ 5-5 常系数、线性系统的实现问题	5-5-1
5-5-1 常系数、线性系统的可控实现	5-5-1
5-5-2 常系数、线性系统的可观实现	5-5-7
5-5-3 常系数、线性系统的并联形实现	5-5-9
一、并联可控实现	5-5-9
二、并联可观实现	5-5-13

5-5-4	常系数、线性系统的串联形实现	5-5-15
5-5-5	常系数、线性系统的最小实现	5-5-21
§ 5-6	状态反馈问题	5-6-1
5-6-1	反馈问题	5-6-1
5-6-2	极点配置问题	5-6-8
一、	单轨入单轨出系统的极点配置问题	5-6-9
二、	特殊情况下多轨入多轨出系统的 极点配置问题	5-6-18
5-6-3	稳定性问题	5-6-26
一、	能稳定性	5-6-26
二、	衰减速度	5-6-28
三、	减少反馈量	5-6-29
四、	轨出反馈的稳定性	5-6-33
5-6-4	分离性控制问题	5-6-35
§ 5-7	观文口原理	5-7-1
5-7-1	引言	5-7-1
5-7-2	观文口和“可检测系统”	5-7-1
一、	观文口构成的基本思想	5-7-1
二、	观文口和“可检测系统”	5-7-5
5-7-3	观文口的基本关系	5-7-13
5-7-4	基本观文口	5-7-26
5-7-5	降维观文口	5-7-29

一、单轨入单轨出系统的降维观文口	5-7-31
二、多轨入多轨出系统的降维观文口	5-7-39
5-7-6 用观文口构成状态反馈	5-7-46
§ 5-8 灵敏度分析	5-8-1
5-8-1 经典灵敏度和闭环极偏移与增益偏移 以及开环零点, 极点偏移间的关系	5-8-1
5-8-2 比较灵敏度	5-8-8
5-8-3 轨道灵敏度函数	5-8-19
§ 5-9 线性系统的对偶原理	5-9-1
5-9-1 线性系统的可观文性与 可控性之间的对偶特性	5-9-1
5-9-2 随机最佳估计和确定性 最佳控制之间的对偶特性	5-9-2
5-9-3 对偶系统和对偶原理	5-9-5
5-9-4 线性系统的对偶关系式	5-9-7

第六章 最佳滤波原理

§ 6-0 引言	6-0-1
§ 6-1 估计问题	6-1-1
6-1-1 统计估计问题	6-1-1
一、最小方差估计	6-1-1
二、极大验后估计	6-1-5
三、极大似然估计	6-1-6
四、举例	6-1-7
6-1-2 线性估计	6-1-18
一、线性最小方差估计	6-1-18
二、最小二乘估计	6-1-24
6-1-3 估计问题小结	6-1-28
一、几种估计方法的比较	6-1-28
二、几种估计方法间的关系	6-1-30
§ 6-2 线性最佳滤波原理	6-3-1
6-2-1 离散、线性系统的最佳滤波原理	6-2-1
一、概述	6-2-1
二、卡尔曼滤波公式	6-2-3
三、卡尔曼滤波的性质	6-2-21
四、白噪声情况下一般线性系统的滤波公式	6-2-21
五、有色噪声情况下线性系统的滤波	6-2-28

六、举例	6-2-44
6-2-2 连续、线性系统的最佳滤波原理	6-2-67
一、连续、线性系统的最佳滤波问题	6-2-67
二、等效的离散、线性系统	6-2-68
1. 将白噪声过程视为白噪声序列的 极限情况	6-2-68
2 等效的离散、线性系统	6-2-72
三、连续、线性系统滤波的基本标式	6-2-74
四、举例	6-2-81
§ 6-3 最佳滤波的稳定性和误差分析	6-3-1
6-3-1 最佳滤波的稳定性	6-3-1
一、最佳滤波的稳定性概念	6-3-1
二、稳定性准则	6-3-2
6-3-2 最佳滤波的误差分析	6-2-8
一、误差协方差矩阵微分方程和 差分方程的解析解	6-3-8
1. 误差协方差矩阵微分方程的解析解	6-3-8
2 误差协方差矩阵差分方程的解析解	6-3-18
二、误差协方差矩阵的上、下界	6-3-22
三、误差协方差矩阵的渐近特性	6-3-33
§ 6-4 模型误差分析，最佳滤波的 发散现象和克服发散的方法	6-4-1

6-4-1 模型误差分析	6-4-1
一、模型误差分析的一般方法	6-4-1
二、特殊情况的讨论	6-4-6
6-4-2 泸波的发散现象	6-4-15
6-4-3 克服发散的方法	6-4-16
一、限定下界法	6-4-16
二、状态扩充法	6-4-20
三、渐消记(衰减记忆泸波)	6-4-22
四、限定记忆泸波	6-4-31
五、自适应泸波	6-4-35

§ 5-7 观测器原理

5-7-1 引言

上节我们比较详细地介绍了状态反馈的有关问题。我们已知，用状态反馈的方法可以任意配置极点，以致使系统稳定以及满足一定的品质指标。但是，当一个系统的状态变量不能被全下测得时，这个方法就遇到困难，而必需采取别的途径进行反馈，并尽量希望能得到与状态反馈具有相同的效果。一般有三种办法：

(1) 用输出反馈代替状态反馈。这种方法只有在输出反馈能使系统达到稳定的情况下才能使用，而要验证这点是很不方便的，并且它不能任意配置极点，因此在设计系统时，会遇到一些不可克服的矛盾，这点已在上节叙述过；

(2) 在被调对象前串接一个补偿器或在反馈回路中串接一个校正装置，使闭环系统具有希望的品质；

(3) 因为一般系统的输入输出是可以测得的，并且系统的输入是直接影响系统的状态变量的，而系统的输出又是直接受其状态变量的变化所支配的。因此，我们可以设法另外构造一个系统，它以原系统的输入输出作为它的输入，而它的输出等于或接近原系统的状态变量或者状态变量的线性组合。然后将此构成系统的输出作为状态反馈信号进行反馈构成闭环系统，使它达到设计要求。这就是观测器方法。

5-7-2 观测器和“可观测系统”

一、观测器构成的基本思想

我们先来分析一下常系数单输入单输出系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (5-7-1)$$

因为 $\dot{y}(t) = C\dot{X}(t) = CAX(t) + Cbu(t)$

所以

$$\dot{y}(t) - Cbu(t) = CAX(t)$$

同样有

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) - C\dot{b}u(t) - CA\dot{b}u(t) &= CA^2X(t) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t) - Cb^{(n-2)}u(t) - \dots - CA^{n-2}bu(t) &= CA^{n-1}X(t) \end{aligned}$$

设

$$Z_1(t) = y(t) ;$$

$$Z_2(t) = \dot{y}(t) - Cbu(t)$$

$$\vdots$$

$$Z_n(t) = y^{(n-1)}(t) - Cb^{(n-2)}u(t) - \dots - CA^{n-2}bu(t)$$

并且设

$$Z(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ \vdots \\ Z_n(t) \end{pmatrix}$$

则有

$$Z(t) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} X(t) = Q_0 X(t)$$

式中

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{—— } n \times n \text{ 矩阵 (可观矩阵)}$$

当 $\text{rank } Q_0 = n$ 时, 即系统为可观时, 得

$$X(t) = Q_0^{-1} Z(t)$$

这就相当于构造了一个系统 Z , 它以 $u(t)$, $y(t)$ 和它们的高阶导数为轨入, $Z(t)$ 为轨出, 并且由 $Z(t)$ 变换 Q_0^{-1} 可得到 $X(t)$ 。见图 5-7-1。由于系统 Z 中包含了一直到 $n-1$ 次的微分, 因此与 $u(t)$ 和 $y(t)$ 混在一起的干扰, 经过微分后, 就会严重地影响 $Z(t)$, 因此, 这不是我们所希望的可观。

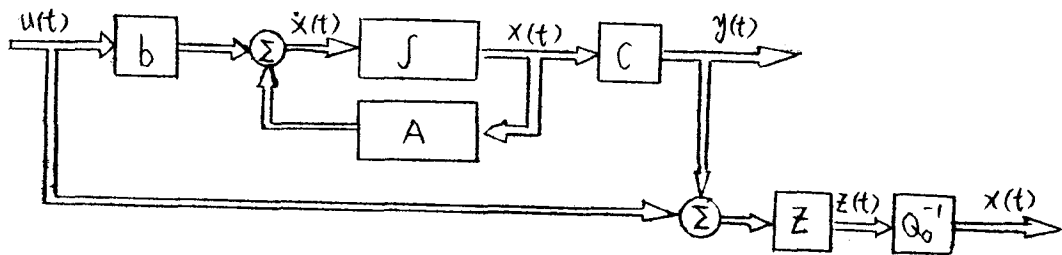


图 5-7-1 由 $u(t)$ 、 $y(t)$ 得到 $X(t)$ 的结构图

另一个很自然的想法是，根据系统 $S: (A, b, c)$ 设计一个结构上与它相同的系统

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A\tilde{X}(t) + \tilde{b}u(t)$$

则有

$$\dot{X}(t) - \dot{\tilde{X}}(t) = A[X(t) - \tilde{X}(t)]$$

因此当初始条件相同，和有相同的控制 $u(t)$ 时，就有 $\tilde{X}(t) = X(t)$ 。若初始值不相同，控制 $u(t)$ 相同，那么，由于

$$X(t) - \tilde{X}(t) = e^{A(t-t_0)} (X(t_0) - \tilde{X}(t_0))$$

因此，当系统 $S: (A, b, c)$ 是渐近稳定时，就有 $\lim_{t \rightarrow \infty} [X(t) - \tilde{X}(t)] = 0$ ，若系统

系统不稳定，那 $\tilde{X}(t)$ 与 $X(t)$ 的差别就会很大。但是由于 $X(t)$ 是无法测得的，也就无法直接知道两者之差，但是由于输出 $y(t)$ 是可以知道的，因此，我们可将 $\tilde{X}(t)$ 变成 $C\tilde{X}(t)$ ，这样 $\tilde{X}(t)$ 与 $X(t)$ 之差就变成了 $y(t) - C\tilde{X}(t)$ ，因此，这时就可用

$y(t) - C\tilde{X}(t)$ 作为反馈，使 $\tilde{X}(t) \rightarrow X(t)$ 得到实现，这就是构成观测器的基本思想。见图 5-7-2。

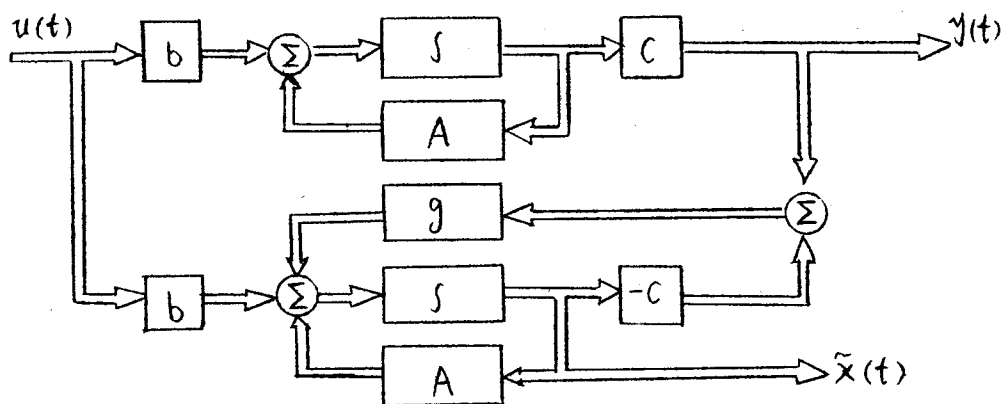


图 5-7-2 由 $u(t)$, $y(t)$ 得到 $X(t)$ 的结构图

三 观测器和“可检测系统”

当一个系统 $S: \{A, B, C\}$ 的状态矢量 $X(t)$ 不可直接测量时，如果有另一个系统 $S_o: \{A_o, B_o, C_o\}$ ，它以系统 $S: \{A, B, C\}$ 的轨入 $u(t)$ 和轨出 $y(t)$ 作为轨入，而它的轨出 $w(t)$ 满足：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{KX(t) - w(t)\} = 0 \quad (5-7-2)$$

式中 K 是预先给定的矩阵，则称系统 $S_o: \{A_o, B_o, C_o\}$ 是系统

$S: \{A, B, C\}$ 的一个 $K \cdot X(t)$ 观测器。特别地，当 $K = I$ 时，称系统 $S_o: \{A_o, B_o, C_o\}$ 为系统 $S: \{A, B, C\}$ 的状态观测器。

对于图 5-7-2 所示的单轨入单轨出系统，经反馈 g 后得

$$\dot{\tilde{X}}(t) = A\tilde{X}(t) + bu(t) + gC(X(t) - \tilde{X}(t))$$

$$\text{因此得: } \dot{X}(t) - \dot{\tilde{X}}(t) = (A - gC)(X(t) - \tilde{X}(t))$$

假如选择了适当的 g ，使 $A - gC$ 的特征值都具有负实部，那么，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (X(t) - \tilde{X}(t)) = 0$$

因此系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = (A - gC)\tilde{X}(t) + bu(t) + gy(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{X}(t) \end{cases} \quad (5-7-3)$$

就是系统 $S: [A, b, c]$ 的一个状态观测器。

如前所述，当系统的 $[A, b]$ 为可控对时，总可以选择 K ，使 $(A + bK)$ 具有任意指定的特征值，用同样的方法可以证明，当系统的 $[A, C]$ 为可观对时，也总可以选择 g ，使 $(A - gC)$ 具有任意指定的特征值。由此可知，对一个可观的单输入单输出系统，状态观测器一定存在。

实际上当系统 $S: [A, b, c]$ 为可观时，由线性系统的规范形式可知，当 $\det(SI - A) = S^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1S + a_0$ 时，则通过坐标变换

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & , & a_2 & , \dots , & a_{n-1} & , & 1 \\ a_2 & , & a_3 & , \dots , & 1 & , & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{n-1} & , & 1 & , \dots , & 0 & , & 0 \\ 1 & , & 0 & , \dots , & 0 & , & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

使系统 $S: [A, b, c]$ 化为可观文规范形式 $S_{oH}: [A_{oH}, b_{oH}, C_{oH}]$

并且有

$$\begin{cases} A_{oH} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ b_{oH} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \\ C_{oH} = (0, \dots, 0, 1) = e_n^T \end{cases}$$

如果取

$$g_o = \begin{bmatrix} g_{o0} \\ g_{o1} \\ \vdots \\ g_{on-1} \end{bmatrix}$$

则得

$$A_{oH} - g_o C_{oH} = \begin{bmatrix} 0, \dots, 0, -(a_0 + g_{o0}) \\ 1, \dots, 0, -(a_1 + g_{o1}) \\ \vdots \\ 0, \dots, 1, -(a_{n-1} + g_{o(n-1)}) \end{bmatrix}$$

因此, 当选择 g_o 使得 $(A_{oH} - g_o C_{oH})$ 的特征值具有负实下时, 那末 $(A - gC)$ 也具有负实下, 并且这时有 $g = Tg_o$, 也就是说, 这时系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = (A - gC)\tilde{x}(t) + bu(t) + gy(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (5-7-4)$$

就成为系统 $S: \{A, b, c\}$ 的状态观文口。

另外，如果注意到系统

$$\dot{Z}(t) = [A_{0\text{II}} - g_{0\text{I}} C_{0\text{II}}] Z(t) + b_{0\text{II}} u(t) + g_{0\text{I}} y(t)$$

的 $Z(t) \rightarrow T^{-1} X(t)$ ，（当 $t \rightarrow \infty$ 时），而 T 是非奇异的，因此系统

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = [A_{0\text{II}} - g_{0\text{I}} C_{0\text{II}}] Z(t) + b_{0\text{II}} u(t) + g_{0\text{I}} y(t) \\ w(t) = TZ(t) \end{cases} \quad (5-7-4)$$

也是系统 $S: \{A, b, c\}$ 的一个状态观文口。

关于 $\tilde{X}(t)$ 趋近 $X(t)$ 的速度，当然由 g 的选择来决定，这是在设计观文口之前要确定的对观文口的性能要求。但是，如果 g 选得使 $\tilde{X}(t)$ 很快地趋近 $X(t)$ ，则所设计的观文口的通频带就会变宽，从而降低了对高频干扰的抗干扰性，因此在设计观文口时，要结合各种指标要求，选择合适的 g 。

〔例题 5-7-1〕 设有系统 $S: \{A, b, c\}$ ，并且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = [1, 1, 0]$$

试设计一个观文口，要求其极点为 $-3, -4, -5$ 。

〔解〕 根据分析，系统 $S: \{A, b, c\}$ 是可观的，并且有

$$\det(SI - A) = (S-1)(S-2)^2 = S^3 - 5S^2 + 8S - 4$$

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \tilde{X}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{X}(t)$$

或

$$\dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60 \\ 1 & 0 & -47 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} Z(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 64 \\ 39 \\ 17 \end{bmatrix} y(t)$$

$$w(t) = TZ(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} Z(t)$$

由上面的讨论和例题 5-7-1 可知, 状态观文并不是唯一的, 它可以用不同的结构来得到。

对于多轨入多轨出系统 $S: \{A, B, C\}$, 当它是可观文时, 则可用同样的方法, 也需选择 G , 使 $(A - GC)$ 的特征值都具有负实部, 则系统

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = (A - GC) \tilde{X}(t) + Bu(t) + GY(t) \\ \tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) \end{cases} \quad (5-7-5)$$

为系统 $S: \{A, B, C\}$ 的状态观文。