集　合　论　讲　义

下　册

张锦文

北京广播电视大学印
一九八二年五月

第八章　等价与同构

§ 1　等价类及其相应的关系……（1）
§ 2　划分……（2）
§ 3　商集合与采样集合……（3）
§ 4　等价关系R 与映射 f 的相容性……（6）
§ 5　同构……（9）

第九章　整数与有理数

§ 1　整数……（13）
§ 2　有理数……（16）

第十章　实数的构造

§ 1　基本函数与基本序列……（20）
§ 2　实数的定义……（22）
§ 3　实数的自然次序和四则运算……（23）
§ 4　实数的完备性定理……（24）

第十一章　基数与集合的基数（势）

§ 1　无穷集合与集合的基数……（26）
§ 2　Cantor—Bernstein定理……（27）
§ 3　可数集合……（29）
§ 4　可数集合的一些主要性质……（31）
§ 5　Cantor 定 理……（35）
§ 6　Ca的线 序 问 题……（37）
§ 7　基数……（37）
*§ 8　连续统假设……（38）

第十二章　选择公理

§ 1　良序定理……（42）

§ 2　Zorn引理……………………………………………………………… (43)
§ 3　七条定理……………………………………………………………… (44)
§ 4　六项注记……………………………………………………………… (47)

第十三章　决定性公理及其推论

§ 1　决定性公理…………………………………………………………… (50)
§ 2　在ZFC中AD是不成立的…………………………………………… (50)
§ 3　ZF＋AD的两条定理………………………………………………… (51)

第十四章　自然模型

§ 1　集合的分层…………………………………………………………… (52)
§ 2　Zermelo公理系统的模型…………………………………………… (54)
§ 3　不可达基数与ZF公理系统的模型 ………………………………… (57)

第十五章　弗晰（Fuzzy）集合

§ 1　基本定义……………………………………………………………… (60)
§ 2　弗晰集合的域………………………………………………………… (62)
§ 3　〔0,1〕上的一布尔代数结构…………………………………………… (64)
§ 4　弗晰集合结构………………………………………………………… (64)

第八章　等价与同构

等价和同构是整个数学的两个基本概念，也是本书第九、十章讨论数系扩充的基本工具，当然在后边其它各章中也还要用到它们。

§1　等价类及其相应的关系

在日常生活中，在数学的许多领域中，区分等价类的思想是很普遍的。

例1　人们的姓氏把人类区分为不同的等价类：赵、钱、孙、李、张、王、刘、陈等等都是一些等价类，由姓氏的分类法我们可以看出这里有一个关系 R_1，$R_1(x, y)$ 意指x和y是同姓的。

当然，人们的民族也把人类区分为不同的等价类；人们的阶级同样把人类区分为又一种不的等价类，即不同的阶级；人们的性别又把人类区分为男性与女性两大类别。这些不同的分类方法都对应着相应的关系。

例2　人们常常把自然数集合区分为两个类别：偶数集合与奇数集合。这种对ω的区分也可以由一关系R_2所确定，例如，我们令

$$R_2(x,y):=\{\langle x,y\rangle \mid x-y\text{是可被 2 整除的}\}$$

$$=\{\langle x,y\rangle \mid x\in\omega\wedge y\in\omega\wedge\exists z\in\omega(2\cdot z=x-y)\}$$

例3　把ω区分为如下十个部分：

S_0：$=\{0, 10, 20, 30, \cdots\}$

S_1：$=\{1, 11, 21, 31, \cdots\}$

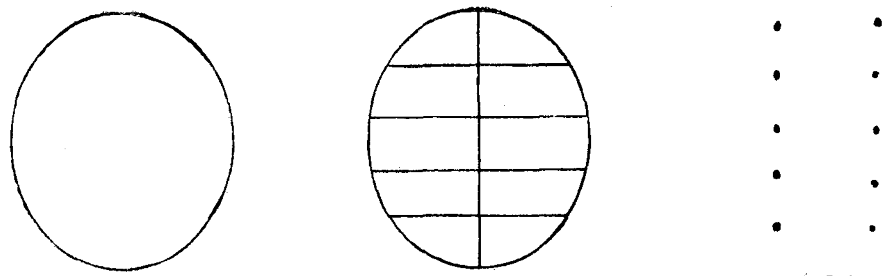
S_2：$=\{2, 12, 22, 32, \cdots\}$

…

S_9：$=\{9, 19, 29, 39, \cdots\}$

"分类"或称"划分"的含意是指：把一集合S的每一元素恰好分在某一个小盒子中而且每个盒子都是不空的子集合（或子类），它是以小盒子为元素的，这些小盒子的集合（或汇合）就称之为划分。

这里，需要有个抽象的过程和能力、或者说智力的敏捷。我们还要把小盒子作为一个单体（在S是一集合的前提下）、而不是多个单体。当S是一真类时，我们也把这些小盒子作为某种汇合的总体，这就使图形引起了变化（见图1的a，b，c）。这时，每个盒子在我们的心目中就是一个单体，单点。盒子的集合B：$=\{S_e, S_1, \cdots, S_9\}$完全不同于集合ω。在这一例子中B仅有十个元素，而ω是无穷多个元素。



(a) (b) (c)

图 1 把一集合区分为十个小盒子

把图 1（a）转换为（c）的过程在抽象代数以及其它数学分支中都是常见的，并且常常是通过某种关系来实现的，这种关系有些什么性质呢？我们来作一些分析：

假定把S上的二元关系R定义为：对于S中的x与y，

R（x，y）当且仅当x与y在同一个小盒子中，

那么，我们容易看出，R有下述三条性质。

（1） R对于S是自返的，亦即

$\forall x R(x,x)$；

（2） R是传递的，亦即

$\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$；

（3） R是对称的，亦即

$\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$。

上述三条正是第七章§ 1中的Ⅰ、Ⅲ、Ⅴ。这种关系是一类重要的关系。

定义 1 一二元关系R叫做关于S是等价的，如果R在S上是自返的，对称的和传递的。

引理 8.1 如果R是S上一个对称的和传递的关系，则R一定是fldR上的一个等价关系。

证明：我们知道任何的关系R，都有

$R \subset \mathrm{dom}R \times \mathrm{ran}R \subset \mathrm{fld}R \times \mathrm{fld}R$。

因之，我们仅需证明R在fldR是自返的，我们有：

$x \in \mathrm{dom}R \rightarrow R(x,y)$，对于某一y

$\rightarrow R(x,y) \wedge R(y,x)$ 由对称性

$\rightarrow R(x,x)$ 由传递性。

类似地，对于ranR中元，也可有相应的推演过程，亦即R在fldR上是自返的。

$\dashv$

注记 1 并不能从上述引理推出："如果一关系R在S上是对称的和传递的，则R为S上一个等价关系"。因为上述引理推得R在fldR上是自返的，但可能在S上不是自返的，因为可能有：

$$S \subset_{+} \mathrm{fld}R$$

这样，就可能存在一$x \in S$，但在S中不存在y，使得$R(x,y)$或者$R(y,x)$

我们要将上述这种过程反过来，说明由S上任意的一个等价关系R我们也能够获得S的一个分类。

定义 2　　对于任一关系R，我们曾令：

$$O_R(x) := \{t \mid tRx\} \qquad (8.1)$$

并且当R为一等价关系且$x \in \mathrm{fld}R$时，就称$O_R(x)$为R模中x的那一等价类。在上下文中R为不变时，也可以把它写做$O(x)$

引理 8.2　若R为集合S上一等价关系，且$x \in S$，则 $O_R(x)$为一集合。

证明：由（8.1），我们有$O_R(x) \subset \mathrm{dom}R$，故

$$O_R(x) = \{t \mid tRx \wedge t \in \mathrm{dom}R\} \qquad (8.2)$$

由子集合公理，即得欲证结果

⊣

引理 8.3　若R为集合S上的一等价关系：R 造成的分类即等价类的汇合：

$$C_R := \{y \mid 有一x,\ y = O_R(x) \wedge x \in S\}, \qquad (8.3)$$

也是一集合。

证明：由（8.1），我们可知，对于任意$x \in S$，我们都有：

$$O_R(x) \subset \mathrm{dom}R$$

$$O_R(x) \in P(\mathrm{dom}R)$$

所以，就有

$$C_R = \{y \mid 有一x,\ y = O_R(x) \wedge x \in S \wedge y \in P(\mathrm{dom}R)\}$$

由子集合公理，即得欲证结果　⊣

引理 8.4　假定R为S上的一等价关系，又假定x，$y \in S$，那么

$$O_R(x) = O_R(y) \longleftrightarrow xRy \qquad (8.4)$$

证明：（$\rightarrow$）假定$O_R(x) = O_R(y)$。由yRy，故有 $y \in O_R(y) = O_R(x)$，从而$y \in O_R(x)$）从定义 2，即得xRy。

（$\leftarrow$）设xRy，那么，对于任意$t \in S$，有：

$t \in O_R(y) \rightarrow tRy$	
$\rightarrow yRt$	对称性
$\rightarrow xRt$	由xRy及传递性
$\rightarrow tRx$	对称性
$\rightarrow t \in O_R(x)$	

因此，就有$O_R(x) \subset O_R(x)$。类似地，由xRy可得yRx，并且可得$O_R(x) \subset O_R(y)$，故$O_R(x) = O_R(y)$，这就获得了（8.4）成立，欲证结果得证。

⊣

§ 2　划分

现在，我们给出划分的一个数学定义

定义3　集合S的划分B是S的非空子集合的集合，它是两两不交的和穷竭的。也就是说，B是集合S的一个划分，如果有：

$\exists x(x\in B\wedge\forall y\in B(y\subset S)$；　　(8.5)

$\forall x\in B\forall y\in B(y\cap y=\varnothing\vee x=y)$；　　(8.6)

$\forall x\in S\exists y\in B(x\in y)$。　　(8,7)

定理8.5　假定R为非空的集合S上的一等价关系。那么，所有等价类的集合c_R是一个划分，

证明：假定R为一等价关系，S非空，我们来证明c_R满足(8.5)—(8.7)。首先，我们有x，使得$x\in S$，因之，

(1)　$O_R(x)\in c_R$

(2)　$O_R(x)$不空，因为$R(x,x)$，即$x\in O_R(x)$

(3)　对于任意x，$y\in S$，我们假定有t使得：

$t\in O_R(x)\cap O_R(y)$

所以我们就有

$R(t,x)\wedge R(t,y)$

因之，　$R(x,t)\wedge R(t,y)$

所以，有$R(x,y)$，即$O_R(x)=O_R(y)$　　$\dashv$

上节我们已经指出，一个集合S的分类是怎样导至一个等价关系的。现在，我们从一集合S的划分B出发，形式地给出一个关系R_B，不难证明R_B是S上的一个等价关系。

定义4　假定B是集合S的一个划分，我们称下述关系R_B是划分B的相应关系：

$R_B(x,y)\longleftrightarrow\exists u\in B(x\in u\wedge y\in u)$　　(8.8)

定理8.6　如果B是S的一个划分，那么定义4中给出的R_B是S上一等价关系。

证明：由定义4，不难验证R_B是自返的，对称的和传递的。　　$\dashv$

§3　商集合与采样集合

定义5　如果R为S上的一个等价关系，那么我们称集合c_R为一商集合，它的元素是等价类并且，常常记做S/R，有时也把表达式S/R读做"S模R"，这时我们也有一个自然映射：

φ：$S\to S/R$　　(8.9)

它被定义为，对于任意$x\in S$都有

$\varphi(x)=O_R(x)$　　(8.10)

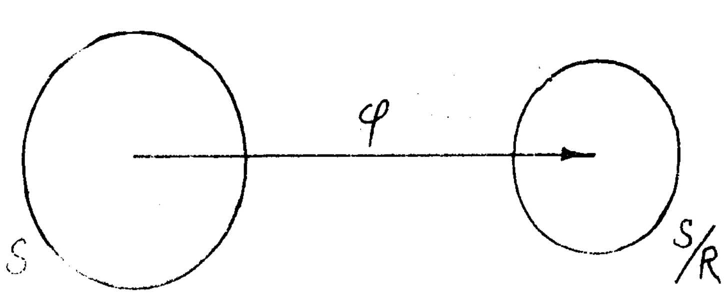


图2　自然映射φ

例 1　令R为ω上满足下式的二元关系：其中m－n表示m与n的算术差。

$$R(m,n)\longleftrightarrow m-n\text{可被10整除}$$
$$\longleftrightarrow \exists z\in\omega(1<z\wedge 10\cdot z=m-n\wedge n\leqslant m$$

那么，不难验证R为ω上一个等价关系，这个商集合有10个元：

$$O_R(0),\ O_R(1),\ O_R(2),\ \cdots,\ O_R(9)。$$

它们分别对应于被10除之后的十种可能的余数。很显然，这十个元恰好是我们在§1的例3中所给出的集合S_0，S_1，$S_2\cdots S_9$。

我们已经注意到商集合的三个有趣的特点：不空的，任意元也不空的并且两两不交的，对于有这种性质的集合，我们能否在其中每一个元中恰好挑选一个元素使其组成新的集合呢？我们可以称这一集合为商集合的采样集合，对特殊情况，例如在例1中，我们能否在S_0，S_1，…，S_9中分别各个恰好择选一个元素而组成新的集合呢？当然可以，我们可以有集合｛0，1，2，…，9｝等等，但是，是否在任何情况下都能这样做呢？这又涉及到一个根本的原则，亦即选择公理的一种形式，让我们来陈述这一形式如下：

选择公理（形式Ⅳ）

$$\forall x\forall y\in x(y\neq\varnothing\wedge\forall y_1\in x\forall y_2\in x(y_1\neq y_3\to y_1\cap y_2=\varnothing)\to\exists c(\forall z\in x\exists!t$$
$$(t\in c)\wedge\forall t\in c\exists!z\in x(t\in z)))\tag{8.11}$$

上述公式的直观含意是很清楚的，就是对于任一由不空的两两不交的集合组成的集合x，我们总可以从它的不空的两两不交的集合中同时恰好各取一个元素组成一新的集合c。

定理8.7　若选择公理的形式Ⅱ成立，则选择公理的形式Ⅳ成立，

证明：选择公理的形式Ⅱ说设H是具有定义域I的一函数，且$\forall i\in I(H(i)\neq\varnothing)$，则$\prod\limits_{i\in I}H(i)$不空，也就是说，有一$f\in\prod\limits_{i\in I}H(i)$，这里我们有

$$\forall i\in I\ f(i)\in H(i)\tag{8.12}$$

现在，我们使用形式Ⅳ的前提，构造这一函数f，我们取I为满足形式Ⅳ的前提的集合，即I是由不空的两两不交的集合所组成的集合。令$H(i)=i$（当$i\in I$）时，由假定，我们有

$$\forall i\in(H(i)\neq\varnothing)$$

所以，使用形式Ⅱ，就有一函数f，满足（8.12），我们令

$$c:=\mathrm{ran}(f)\tag{8.13}$$

这样，由（8.12），（8.13）和f为一函数的定义，我们就有：

$$\forall z\in I\exists!\ t(t\in c)\wedge\forall t\in c\exists!\ z\in I(t\in z)$$

亦即，我们获得了欲证结果。

⊣

§ 4　等价关系R与映射f的相容性

现在我们令R为S上一等价关系，并且令函数f：S→T，它们满足：

$$R(x, y) \longleftrightarrow f(x) = f(y) \tag{8.14}$$

也就是说，可以一方面，通过函数f

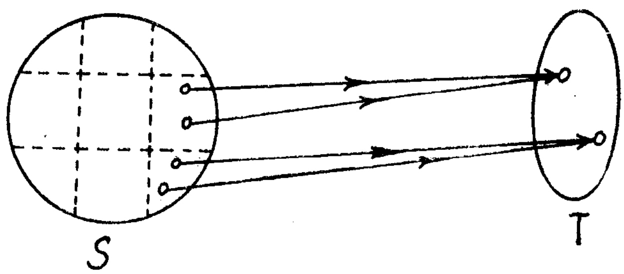


图 3　等价关系R的相关映射f

把S映射到集合T，这个f有这种性质：同一等价类中的各点都映射到T中一个点，反之，对于ran(f)⊆T中任一点t，$f^{-1}(t)$恰好是S中在R之下某一个等价类。这样，我就们应当有一映射$\hat{f}$，

$$\hat{f}: S/R \to T \tag{8.15}$$

但是，是否有

$$f = \hat{f} \circ \varphi \tag{8.16}$$

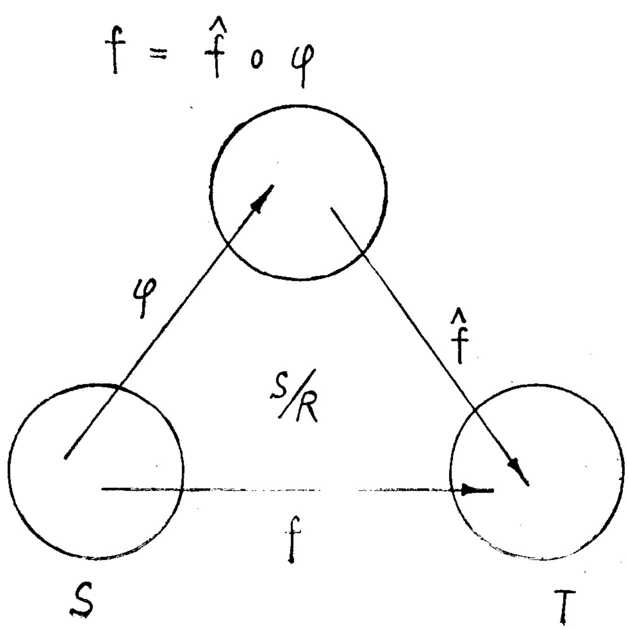


图 4　把 f 分解成服从一一对应的自然映时

呢？（见图4）也就是说，$\hat{f}$在等价类$O_R(x)$的值是否等于f在x的值呢？或者说，（8.16）成立的条件是什么呢？现在，我们就来考察定义在商集合上的函数问题，我们取T为S，即f：S→S，这时，我们要问是否存在一个相应的函数$\hat{f}$。

$$\hat{f}：S/R\to S/R,$$

使得对于每一$x\in S$，都有

$$\hat{f}(O_R(x)) = O_R(f(x))$$

成立呢？我们试图运用从等价类中选取一个特定的元素x，并构成$O_R(f(x))$的途径去定义函数$\hat{f}$在等价类上的值。（见图5）但是，假定x_1与x_2都在同一个等价类中，只有当$f(x_1)$与$f(x_2)$

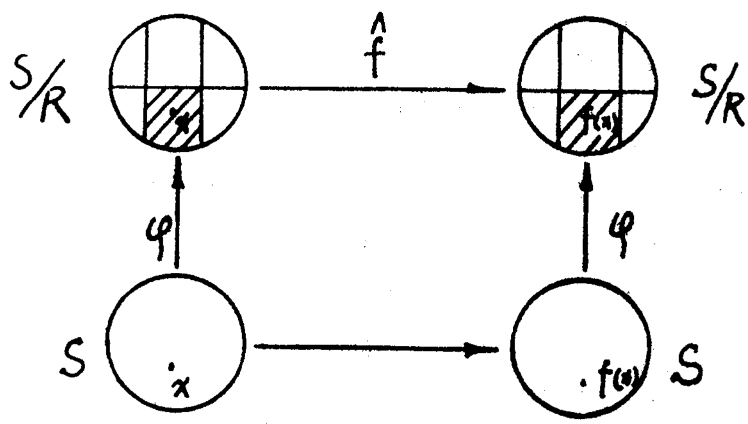


图5　当$\hat{f}\circ\varphi=\varphi\circ f$时称f与$\hat{f}$是交换的

也都属于同一等价类之中，$\hat{f}$才能被定义的。

为了进一步说明这一观念，我们考虑把集合ω区分为六个等价类，使得

$$R(m,n)\longleftrightarrow m-n\text{能被}6\text{整除} \tag{8.17}$$

现在考虑三个函数：

$$f_i：\omega\to\omega \qquad (i=1,2,3)$$

并且，对于任一$n\in\omega$，它们分别取值为：

$$f_1(n)=2n,\qquad f_2(n)=n^2,\qquad f_3(n)=2^n$$

我们可以问及，在每一种情况下，是否有：

$$\hat{f}_i：\omega/R\to\omega/R,\qquad (i=1,2,3)$$

使得，为于任一$n\in\omega$，都有

$$\hat{f}_1(O_R(n))=O_R(2n),$$

$$\hat{f}_2(O_R(n))=O_R(n^2),$$

$$\hat{f}_3(O_R(n))=O_R(2^n)$$

成立呢？对f_1而言，对任意的n，$m\in\omega$，若R（n,m），显然有R（2n,2m），所以$\hat{f}_1$可被定义了。对f_1而言，亦即，存在一函数$\hat{f}_1$满足等式$\hat{f}_1(O(n))=O(2n)$，也就是说，无论类O(n)中的那一个元素m，总能得到相同的等价类O（2m）。类似地，如果R(n，m)那么由$m^2-n^2=(m+n)\cdot(m-n)$，因此有R（m^2,n^2），所以，$\hat{f}_2$也被定义了。但是$\hat{f}_3$是不能被定义的，也就是说，满足条件（8.17）的f_3不能是良定义的，因为，R（0，6），但是$2^0=1$，$2^6=64$，且$\overline{R(1,64)}$亦即，虽然O(0)=O(6)，却没有O(1)=O(64)，所以不能有任何函数$\hat{f}_3$，使得条件（8.17）成立。

定义6　我们称S上的等价关系R和函数

$$f: S\to S$$

是相容的，如果对于任意的$x,y\in S$，都有

$$R(x,y)\to R(f(x),f(y))$$

定理8.7　设R为S上的一等价关系，又设函数$f: S\to S$，如果R与f是相容的，那么存在唯一的函数$\hat{f}: S/R\to S/R$，使得：

$$\hat{f}(O_R(x))=O_R(f(x)) \tag{8.18}$$

成立，如果R与f不相容，那么就不存在这样的函数$\hat{f}$。类似的结论适用于二元函数：

$$f: S\times S\to S$$

证明：假定R与f是相容的。因为（8.18）要求有序对$\langle O(x), O_R(f(x))\rangle\in\hat{f}$，因此，我们将试图给出下述定义：

$$\hat{f}:=\{\langle O(x), O(f(x))\rangle \mid x\in S\}$$

现在来验证此关系f是一函数，为此我们考察其中任意的两个有序对：$\langle O(x), O(f(x))\rangle$和$\langle O(y), O(f(y))\rangle$。

我们有

$O(x)=O(y)\to R(x,y)$	由引的8,4
$\to R(f(x),f(y)$	由相容性
$\to O(f(x))=O(f(y))$，	由引理8.4

这就说明$\hat{f}$是一函数。另一方面，由$\hat{f}$的定义，显然$dom(\hat{f})=S/R$，而且$\hat{f}\subset S/R\times S/R$所以，就有：

$$\hat{f}: S/S\to S/R$$

而且，由于$\langle O(x), O(f(x))\rangle\in\hat{f}$、所以（8.18）成立。

现在，假定R与f不相容，我们将证明不可能存在函数$\hat{f}$满足（8.18），因为，不相容，就意味着在S中有某些x,y，使得R（x,y）即

$O(x)=O(y)$，但是没有$O(f(x))\neq O(f(y))$

然而，为了使得（8.18）成立，我们需要有

$$\hat{f}(O(x))=O(f(x))\text{和}\hat{f}(O(y))=O(f(x))$$

而这是不可能的，因为二等式的左边相等，而右边不相等。

综上，我们完成了定理8.7的证明，

$\dashv$

习题：

1　证明：R是对称的，传递的关系，当且仅当$R=R^{-1}$。R

2　假定f：$S\to T$，又设R为T上一等价关系，令

$$Q:=\{\langle x,y\rangle \mid x\in S\wedge x\in S\wedge \langle f(x),\ f(y)\rangle\in R\}$$

证明：Q为S上一等价关系

3　令$N^*:=\omega-\{0\}$，令N^*上的等价关系定义为：对于任意n、m，$\in N^*$，

$R(m,n)\longleftrightarrow$m与n有相同个数的素数因子。

问是否有一函数$\hat{f}$，使得对于每一$n\in N^*$，都有：$\hat{f}(O_R(n)=O_R(3n)$呢？

§5　同构

定义7　两个有序集合$\langle S_1,R_1\rangle$和$\langle S_2,R_2\rangle$之间的同构是指具有定义域为S_1和值域为S_2的一个1—1的函数f，使得对于任意的$x,y\in S_1$，都有：

$$R_1(x,y)\longleftrightarrow R_2(f(x),\ f(y)) \tag{8.19}$$

成立。这里有序集合是指线序集合或偏序集合。

引理8.8　令$\langle S_1,\ R_1\rangle$和$\langle S_2,R_2\rangle$是强线序集合，f是S_1与S_2之间一双射函数，使得对于任意的$x,y\in S_1$都有

$$R_1(x,y)\to R_2(f(x),f(y))$$

那么，f是$\langle S_1,R_1\rangle$与$\langle S_1,R_2\rangle$之间的一同构。

证明：我们仅需证明：对于使得$R_2(f(x),f(y))$成立的任意的$x,y\in S$，都有$R_1(x,y)$成立。假定不然，因为R_1是S_1的线序关系，就必然有$x=y$或$R(y,x)$。由题设，$x=y$时，有$f(x)=f(y)$；当$R_1(y,x)$时，有$R_2(f(y),f(x))$，从而获得矛盾。所以就获得欲证结果。$\dashv$

在第七章中，我们曾谈到结构的概念，我们现在再作一个推广。

定义8　我们称有序对$\langle U,R\rangle$为一结构，如果$U\subset V$（U可以是一集合；也可以是一真类，$R=R_1\cup R_2$，而R_1为U上的关系集合，R_2为U上的函数集合。在通常情况下，，R是有穷集合（亦即存在一自然n，和R与n之间的一双射）。特别地，R可以仅由一个关系或一个函数所组成，并且称U为此结构的域，R_1中元为此结构的基本关系，R_2中元为此结构的基本函数。

例 1　令S为一集合，R_1, R_2为S上二关系，f，g分别为S上的一元函数和二元函数，并且令R：$=\{R_1, R_2, f, g\}$，那么，这时有序对$\langle S, R\rangle$就是一结构，为了醒目，有时，也把此结构写作$\langle S, R_1, R_2, f, g\rangle$

例 2，我们令$<$表示自然数集合ω上的自然次序，＋表示ω上的加法运算，· 表示ω上的乘法运算，我们可以用$\langle \omega, <\rangle$表示自然数的有序结构，用$\langle \omega, +\rangle$表示加法算术，用$\langle \omega, +, \cdot\rangle$表示Peano算术结构，当我们还要强调基上的次序关系时，也可以写作$\langle \omega, <, +\rangle$或$\langle \omega, <, +, \cdot\rangle$。

例 3　每一个有序集合$\langle S, R\rangle$都是一结构（具有一二元关系）。

例 4　$\langle S, \subset_S, \cup_S, \cap_S\rangle$是一结构（具其一个二元关系$\subset_S$和二个二元函数$\cup_S$，$\cap_S$）。

例 5，$\langle V, \in\rangle$是一结构，其中V为全域。

定义 9　两个结构$\langle U, \mathbf{R}\rangle$与$\langle U', \mathbf{R}'\rangle$之间的同构是指具有以U为定义域，U′为值域的一个1－1的函数f，使得当U中元素x，y对在**R**中元素R成立时，即xRy成立，当且仅当x与y在U′中的对应元素f(x)，f(y)对于**R′**中对应元素R′也成立，即f(x)R′f(y)成立，（见图6）；并且对于R中任一函数h和任意元$x\in U$，

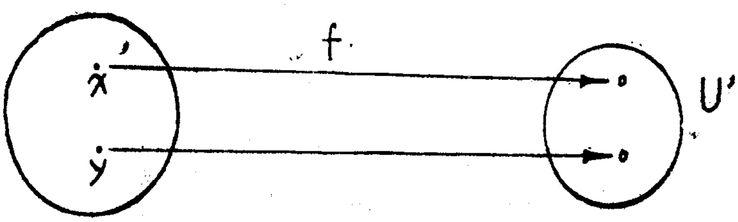


图6　相应元对相应关系xRy与f(x)R′f(y)
同时成立或不成立

$y\in U$，若$h(x)=y$，则对于R中的相应函数h′和相应元f(x)，f(y)也有$h'(f(x))=f(y)$，反之亦然（见图7）。对于多元函数也保持上述对应的结果，也可概括地说U与U′之间的双射函数f保持结构的关系与函数的性质。

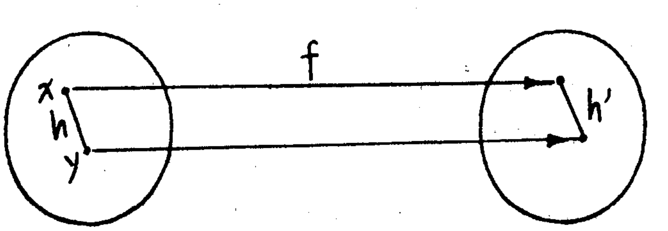


图7　h，h′为二相应函数，$h(x)=y$当且仅当$h'(f(x))=f(y)$

例6　令$<\cap,R_1,R_2,g,h>$，$<U',R_1'R_2'g'h'>$是两个结构，并且它们分别具有二元关系R_1,R_2与R_1',R_2'一元函数g，g′二元函数h，h′，那么f是此二结构之间的一同构映射，如果下述五条均成立。

（1）　f为U与U′之间的一双射函数；

（2）　对于任意$x,y\in U$，都有

$$xR_1y\longleftrightarrow f(x)R_1'f(y)$$

（3）对于任意x，$y\in U$，都有

$$xR_2y\longleftrightarrow f(x)R_2'f(y);$$

（4）　对于任意$x\in U$，$g(x)$有定义，当且仅当$g'(f(x))$有定义并且$f(g(x))=g'(f(x))$；

5）　对于任意$x,y\in U$，$h(x,y)$有定义当且仅当$h'(f(x),f(y))$有定义，并且$f(h(x,y))=h'(f(x),f(y))$。

二结构叫做同构的，如果它们之间存在着一同构映射。

定理8.9　若$<S_1,R_1>$与$<S_2,R_2>$是同构的（其中R_1，R_2是二元关系）那么，有

（1）R_1是S_1的一偏序当且次当R_2是S_2的一偏序；

（2）S_1有一最小元当且仅当S_2有一最小元，

证明：令f是$<S_1,R_1>$与$<S_2,R_2>$的同构。假定R_1是S_1的一偏序，我们来证明R_2是S_2的一偏序。首先，让我们证明R_2在S_2中是传递的。因为，令$y_1,y_2,y_3\in S_2$，且$y_1R_2y_2$，$y_2R_2y_3$，由于f是S_1与S_2的双射，故存在$x_1,x_2,x_3\in S_1$，使得$y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，$y_3=f(x_3)$，并且$x_1R_1x_2$当且仅当$f(x_1)R_2fx_2)$，亦即$y_1R_2y_2$，因$y_1R_2y_2$，所以有$x_1R_1x_2$类似地，我们由$y_2R_2y_3$可得到$x_2R_1x_3$，并且有R_1对S_1传递。因此，我们有$x_1R_1x_3$成立。由同构，我们有$f(x_1)R_2f(x_3)$，亦即$y_1R_2y_3$成立，故R_2对S_2是传递的，对于偏序的其它条件是不难验证的。

现在，假定S_1有最小元，我们来推断S_2也有一最小元，令$a\in S_1$是S_1的最小元，亦即对所有$x\in S$，都有aRx成立，由同构就有：$f(a)R_2f(x)$成立，$f(a)$就应当是S_2的最小元，因为如果$y\in S_2$，由f的性质，必有$x\in S_1$使得$y=f(x)$，但是，对于这一x我们有aRx，故有$f(a)Rf(x)$，所以，$f(a)$是S_2的最小元。

从$<S_2,R_2>$到$<S_1,R_1>$的证明是类似的。

⊣

定理8.10　令$<S,<_s>$是一不空的线序集合并具有下述性质：

（1）　对于任一$x\in S$，都有$y\in S$使得$x<_sy$，

（2）　S的每一不空子集合都有一个$<_s$最小元，

（3）　S的每一不空的有界子集合，都有一个$<_s$最大元，

那么$<S,<_s>$与$<\omega,<>$同构

证明：我们使用递归定理来构造这一同构，令a是S的最小元并且令$g(x)$是S中比x大的最小元。由于条件（2），对于每一$x\in S$函数，$g(x)$是被定义的。

由递归定理，保证下述函数f：$N\to S$是存在的：

（i）$f(0)=a$

（ii）$f(n^+)=g(f(n))$，亦即它是S的大于$f(n)$的那个最小元。

显然，对于每一$n\in\omega$我们有$f(n)<_S f(n^+)$，其中$n^+=n+1$，由归纳法，我们不难得到$n<m$时，$f(n)<f(m)$，而且，f是一个1—1的函数，现在，我们仅需证明：$S=\mathrm{ran}(f)$

假定不然，即$S-\mathrm{ram}(f)\neq\varnothing$，由之，可令b是$S-\mathrm{ram}(f)$的最小元，那么集合T：

$$T:=\{x\mid x<_S b\}$$

是有界的（上界为b）和不空的，令c是T的最大元。因为$c<_S b$，我们就有一$m\in\omega$，使得$c=f(m)$，但是，不难看出，b是S的大于c的最小元，所以$b=f(n^+)$，即$b\in\mathrm{ran}(f)$，这与b的选择相矛盾，故$S=\mathrm{ran}(f)$ ⊣

习题

4　令A为一不空集合，$S:=P(A)$，证明：$\langle S,\cup_S,\cap_S\rangle$与$\langle S,\cap_S,\cup_S\rangle$为同构结构，（指示：当$x\in S$时，令$f(x)=A-x$，并且注意：在第一结构中的$\cup_S$对应于第二结构中的$\cap_S$）

5　证明

Ⅰ　$\langle S,R,f\rangle$与$\langle S,R,f\rangle$同构

Ⅱ　若$\langle S_1,R_1,f_1\rangle$与$\langle S_2,R_2,f_2\rangle$同构，则$\langle S_2,R_2,f_2\rangle$与$\langle S_1,R_1,f_1\rangle$同构

Ⅳ　若$\langle S_1,R_1,f_1\rangle$与$\langle S_2,R_2,f_2\rangle$同构，$\langle S_2,R_2,f_2\rangle$与$\langle S_3,R_3,f_3\rangle$同构，则$\langle S_1,R_1,f_1\rangle$与$\langle S_3,R_3,f_3\rangle$同构，也就是说，同构可以看作是两个有序对之间的一关系，而且这一关系是一等价关系。

第九章　　整数与有理数

在第四章中我们已经讨论了自然数，它们的自然序次和它们的算术，但是从算术的观点上来看，自然数域不是一个很满意的数域，因为减法仅对$x\leqslant y$时，$y-x$才有定义，而除法仅在非常特殊的情况下才能被定义，从次序角度来看也缺乏对称性，例如，它有最小元而无最大元，而从应用角度看，自然数域也显然是不够的。

我们将逐步扩充数域。

§1　整数

在本节中，我们来构造整数的集合Z，其中的次序和算术运算，Z对减法是封闭的，它对于次序是对称的。

如果对于每一个数n，都有一个与它相反的数，亦即"反号数"例如记作$-n$，那么这时减法就总是可能的，因为，这时我们能够令$0-n=-n$，一般地，当$x<y$时，$x-y=-(y-x)$。

现在，我们来实现这一想法，令$N:=\omega$，$N^*:=N-\{0\}$，$N^-:=\{<0,n>\mid n\in N^*\}$，然后，令$Z=N^*\cup\{0\}\cup N^-$，我们称Z的元素为整数，$N^*$的元素叫正整数，$N^-$的元素叫做负整数。

现在定义"反号"运算$-$。

定义1　一数的反号数是指：

$-n:=<0,n>$　　当$n\in N^*$时，

$-0:=0$

$-<0,n>=n$　　当$n\in N^*$时。

定义2　在整数集合Z上，我们建立一次序关系$<_Z$如下：对于x，$y\in Z$，$x<_Z y$当且仅当：

$$(x\in N\wedge y\in N\wedge x<_N y)\vee(x\in N^-\wedge y\in N)$$
$$\vee(x\in N^-\wedge y\in N^-\wedge -y<_N -x)$$

其中　$<_N$是N上的自然次序。

我们将证明$<_Z$是Z上的一线序关系，并称之为Z的自然次序，也称$<_Z$为整数的自然次序，在不引起误会时，常常记做$<$。

定理9.1　结构$<Z,<,->$有如下的性质：

①、Z是被$<$所线序的；

②、$N\subset Z$　并且Z的次序延拓了N的自然次序；

③、对于所有$x\in Z$，$x\in N$当且仅当$0\leqslant x$

④、对于所有的$x\in Z$，$-(-x)=x$

并且$-0=0$

⑤、对于所有的x，$y\in Z$，若$x<y$，则$-y<-x$

性质①—⑤决定了$<Z,<,->$是$<N,<>$上的唯一的同构开拓，也就是说，如果$<Z',<',-'>$也有性质①—⑤，那么就有在$<Z,<,->$与$<Z',<',-'>$之间的一个同构i，使得对于所有的$x\in N$，都有$i(x)=x'$。

证明：①—④的验证明容易的，现在我们仅证明(5)，假定$x,y\in Z$，且$x<_Z y$，则：

若x，$y\in N$，故$x<_N y$，因之有$-y<_Z -x$。

若$x\in N^-$，$y\in N$，我们获得$-x\in N^*$，而且$-y\in N^-\cup\{0\}$，这样$-y<-x$。

若x，$y\in N^-$，那么由$<_Z$的定义，我们就有：$-y<-x$。

现在来证唯一性，令$<Z',<',-'>$也满足性质①—⑤，我们定义一映射i如下：

$i(a):=a$，　当$a\in N$，

$i(-a):=-'a$，　当$a\in N^*$。

这样，i是从Z到Z'的一个一函数，使得对于所有的$a\in N$，$i(a)=a$，现在证明i也是从Z到Z'之上的，令$a\in Z'$，若$0\leqslant' a$，则$a\in N$，由③就有$a=i(a)$，若$a<'0$，则$0=-'0<'-'a$，这样$-'a=b\in N$，我们就断定$i(-b)=-'b=-'(a)=a$、类似地，我们能够证明i是一对一的，并且由之，它就是一个同构，(借助于$i(-a)=-'i(a)$并且$a<b$当且仅当$i(a)<'i(b)$。

按照通常的规则，容易去定义整数上的算术运算，并证明算术的基本性质、定义和证明都区分为使用非负整数和负整数这两种情况：首先，当$a\in Z$时，我们定义a的绝对值如下：

$|a|=a$　　当$0\leq a$

$|a|=-a$　　当$a<0$

显然，对于所有的$a\in Z$，都有$0\leqslant|a|$；并且$|a|=0$　当且仅当$a=0$。

在下边的定义中，我们使用具有下足标N的运算表示在自然数集合上的运算。

定义3　现在我们建立整数的加法如下：

① 当　$0\leqslant a$且$0\leqslant b$时，$a+b:=a+_N b$，

② 当　$a\leqslant 0$且$b\leqslant 0$时，$a+b:=-(|a|+_N|b|)$

③ 当　$0\leq a$，且$b<0$，且$|b|\leqslant|a|$时，$a+b:=|a|-_N|b|$

④ 当　$0\leq a$且$b<0$且$|a|<|b|$时，$a+b:=-(|b|-_N|a|)$

⑤　$a<0$，$0\leq b$时，$a+b:=b+a$

定理9.2　对任意a，$b\in Z$，关于它们的加法，我们有以下性质：

Ⅰ、　$a+b=b+a$，

Ⅱ、　$a+(b+c)=(a+b)+c$，

Ⅲ、　$a+0=a$，

Ⅳ、　$a+(-a)=0$，

定义4　对于任意的a、$b\in Z$，关于它们的减法是被定义作：

$a-b:=a+(-b)$

特别地，$0-b=-b$、并且有

Ⅴ、　$(a-b)+b=a$