第四章 控制系统的状态空间表示法

4—1 引 言

在系统的状态空间分析中，我们常常希望得到下列标量微分方程的状态空间表示式：

$$\overset{(n)}{x} + a_1 \overset{(n-1)}{x} + \cdots\cdots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x$$

$$= b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots\cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

其中 a_i b_j 这些系数均为常数；或者，反之，我们希望将 $x = Ax + Bu$ 这种形式的状态空间方程变换为标量微分方程式。

在本章我们将主要讨论从标量微分方程式推导出状态空间方程的问题以及其逆问题。具体说，4—2节中我们将推导出 n 阶标量微分方程所描述的系统的状态空间表示式。4—3节中我们讨论相反的问题，即从状态空间方程得出标量微分方程。4—4节中我们将叙述用部分分式展开法，得出传递函数之对应的状态空间方程的方法。最后，4—5节讨论差分方程及其状态空间表示。

4—2 用标量微分方程描述的系统之状态空间表示

本节中我们将推导用标量微分方程描述的系统之状态空间表示。我们将只限于讨论线性系统。注意，假若一个状态空间表示方程和一个标量微分方程代表的是同一个物理系统，则它们应有相同的特征方程。很清楚，如果标量微分方程为 n 阶，则对应的状态空间方程应包含 n 个一阶微分方程。

在由标量微分方程推导状态空间方程时，我们不应当把方程左面和右面的公共项消去，同样我们也不把传递函数分母和分子的共同项

约去。举例来看，考虑下列描述一个运动系统的方程：

$$\dddot{x}+3\ddot{x}+2\dot{x}=\dot{u}+u$$

其中x和u分别为系统的输出和输入。此方程对应于下列传递函数：

$$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s(s+1)(s+2)}$$

若将上式中分母分子内共同因子s+1约去，则传递函数将简化为

$$\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{1}{s(s+2)}$$

这也就对应于下列微分方程

$$\ddot{x}+2\dot{x}=u$$

原始的微分方程之特征方程为

$$\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda=0$$

而简化后之微分方程则有如下之特征方程

$$\lambda^2+2\lambda=0$$

因此，原始的三阶微分方程和简化后的二阶微分方程并不代表同一系统。

根据上述分析，很清楚，当我们推导一个系统的状态空间方程时，我们不应当将方程左右两边的共同因子约去。现在我们将推导下列标量量微分方程之状态空间表示：

$$\overset{(n)}{x}+a_1\overset{(n-1)}{x}+\cdots\cdots+a_{n-1}\dot{x}+a_nx$$

$$=b_0\overset{(n)}{u}+b_1\overset{(n-1)}{u}+\cdots\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu \qquad (4-1)$$

其中a_i，b_j均为常系数。注意，这里我们假设x之最高阶导数的系数值为“1”，这并不影响讨论之普遍适用性。系统a_i和b_j中之

任一个均可能为零。我们将先考虑一个简单的情况，即

$b_0 = b_1 = \cdots\cdots = b_{n-1} = 0$，而 $b_n = b \neq 0$。然后我们再处理方程（4—1）的一般情况。

<u>只含有简单驱动项之N阶标量微分方程式</u>　考虑如下方程：

$$\overset{(n)}{X} + a_1 \overset{(n-1)}{X} + \cdots\cdots + a_{n-1} \dot{X} + a_n X = bu \quad (4\text{—}2)$$

置

$$X_1 = X$$

$$X_2 = \dot{X}_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$X_n = X^{(n-1)}$$

则方程（4—2）可写成

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad (4\text{—}3)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots\cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将A变换为约当规范式可使计算问题简化，并使我们容易看出系统如何进行补偿。在下述讨论中，我们假设特性方程的特征根均为实数且无重根（很容易推广到具有共轭复根的情况）。具有重根的情况将在后面研究。

设通过变换矩阵P将X变换为Y，即 $X = PY$，则状态空间方程变为

$$\dot{X} = P\dot{Y} = APY + Bu$$

或　　$\dot{Y} = P^{-1}APY + P^{-1}Bu = DY + P^{-1}Bu$　　（4—4）

其中D为一对角线矩阵。驱动项Bu现在变为$P^{-1}Bu$。由于$P^{-1}Bu$可如下计算

$$P^{-1}Bu = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta n_1}{|P|}u \\ \frac{\Delta n_2}{|P|}u \\ \vdots \\ \frac{\Delta nn}{|P|}u \end{bmatrix}$$

其中Δnj是P之第（n，j）个元素的余因子，方程（4—4）可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + \frac{\Delta n_1}{|P|}u \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + \frac{\Delta n_2}{|P|}u \\ &\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ \dot{y}_n &= \lambda_n y_n + \frac{\Delta nn}{|P|}u \end{aligned}\right\} \quad (4\text{—}5)$$

注意，在存在驱动函数的情况中，所得变换后的形式并非唯一的，因为驱动函数项的系数将取决于变换矩阵P之选择。这个事实启示我们，如果我们选择合适的P，则可使驱动函数u的系数均变为1。我们将在下面看到这一点。假设我们写出

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & U_2 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = VF$$

其中：

$$V=\begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & U_n \end{bmatrix}=\text{非奇异矩阵} \qquad (4\text{—}6)$$

$$F=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

则方程（4—4）即可改写成

$$\dot{Y}=DY+VFu$$

现在假设我们引入一个新变量Z，定义如下

$$Y=VZ$$

则
$$\dot{Z}=V^{-1}DVZ+Fu \qquad (4\text{—}7)$$

因为V是一个对角线矩阵，我们有

$$V^{-1}DV=D$$

方程（4—7）于是可简化为

$$\dot{Z}=DZ+Fu$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}[u] \qquad (4\text{-}8)$$

或

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1+u \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2+u \\ &\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n+u \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{—}9)$$

这样一来，我们就证明了这样一件事，即我们可通过下列变换

$$X = PY \qquad Y = VZ$$

将方程（4—2）变换为（4—8）或（4—9）的形式。而初始条件项则变换为

$$Z(0) = V^{-1}P^{-1}X(0)$$

注意，$Z(t)$是由$X(0)$和$u(t)$来唯一地确定的。

现在我们要考虑A含有重根特征的情况。在此情况中，方程（4—8）的形式将有所不同。考虑下列系统：

$$\dddot{X} - 3\lambda_1\ddot{X} + 3\lambda_1^2\dot{X} - \lambda_1^3 X = u \qquad (4—10)$$

特征方程的三个根是相等的，即$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$。在第三章我们已证明，方程（4—10）对应的齐次方程的最简单形式是

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

对于非齐次方程则可写成

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} [u]$$

其中a，b及c均为待定的常数。从上述方程中将X_2，X_3消去，然后置$X_1 = X$，则可得

$$\dddot{X} - 3\lambda_1\ddot{X} + 3\lambda_1^2\dot{X} - \lambda_1^3 X$$
$$= a\ddot{u} + (b - 2a\lambda_1)\dot{u} + (\lambda_1^2 a - \lambda_1 b + c)u$$

此方程之右端必须等于u，因此

$$a\ddot{u} + (b - 2a\lambda_1)\dot{u} + (\lambda_1^2 a - \lambda_1 b + c)u = u$$

于是得出 $\quad a = b = 0 \qquad c = 1$

而方程（4—10）的最简单形式便可写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

同样，方程（4—3）中若A含有比如七个特征根（$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \lambda_7$）则可得其最简单形式如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\\ \dot{y}_4\\ \dot{y}_5\\ \dot{y}_6\\ \dot{y}_7\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|cc|cc}\lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & \\ \hline & & & & & \lambda_6 & 0\\ & & & & & 0 & \lambda_7\end{array}\right]\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6\\ y_7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

（对于重根的情况，还可参阅4—4节）

例4—1　考虑由下列标量微分方程描述的系统：

$$\dddot{x}+6\ddot{x}+11\dot{x}+6x=u \qquad (4-11)$$

试求该系统方程的状态空间表示式，并使其中状态矢量的系统矩阵成为对角线形式，驱动函数u的系数矩阵的元素则取值1。

令　　$x_1=x$，　$x_2=\dot{x}$，　$x_3=\ddot{x}$，则

其中　　$\dot{x}=Ax+Bu$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

A之特征根为−1，−2，−3。设y_1, y_2, y_3为主坐标，通过下列更换

$$x=Py$$

其中

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix} \quad (4—12)$$

可得

$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}+P^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

或 $\dot{Y}=DY+P^{-1}Bu$

实际上只要我们知道了特征方程的根，则我们根本不必计算 $P^{-1}AP$，因为 $P^{-1}AP$ 是一个对角线矩阵，其对角线上的元素就是特征根的数值。但 P^{-1} 还是需要计算的，因为驱动函数的系数矩阵与 P^{-1} 有关。P^{-1} 如下：

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & -4 & -1\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

于是

$$P^{-1}Bu=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}[u]$$

则方程（4—11）可被变换成为

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1+\tfrac{1}{2}u\\ \dot{y}_2 &= -2y_2-u\\ \dot{y}_3 &= -3y_3+\tfrac{1}{2}u\end{aligned}\right\}\qquad(4-13)$$

为了将（4—13）变换成（4—9）的形式，令

$$Y=Vz$$

即

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\end{bmatrix}$$

由于

$$V^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

而

$$V^{-1}P^{-1}Bu=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}[u]=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[u]$$

所以方程（4—13）可变换成为如下形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= -Z_1+u\\ \dot{Z}_2 &= -2Z_2+u\\ \dot{Z}_3 &= -3Z_3+u\end{aligned}\right\}\qquad(4-14)$$

或即

$$\begin{bmatrix}\dot{Z}_1\\\dot{Z}_2\\\dot{Z}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\Z_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[u]$$

初始条件 $Z(0)$ 将由下式给出：

$$Z(0)=V^{-1}P^{-1}X(0)$$

若 u 已给出，则方程（4-14）很容易解出。要得到 X 之解，则应将 Z 变换为 X。在现在这个问题中，可通过下列变换得到 X：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

<u>驱动项含有驱动函数 u 之导数时 N 阶标量微分方程之情况：</u>

现在我们来考虑方程（4—1）所描述之系统的状态空间表示式。在这样一个系统中，我们应适当选择一组变量，使该状态空间中之运动不会出现无限大的突跳。确定这样一个合适的状态矢量是可能的，因为 x 和 u 的导数提供了足以确定该系统未来轨迹的全部必须的数据。每一个可能的状态矢量的分量由 x 和 u 的各阶导数之适当组合构成。对于这种情况可有几个寻找可能的状态矢量的方法。我们将在本节中讨论三种方法，并在 4—4 节讨论另一种方法。

方法 1：我们通过一个三阶系统来说明第一种方法。然后我们把此方法推广到 n 阶系统。试看下列方程：

$$\dddot{x} + a_1\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_3 x = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

利用算子 $p = d/dt$，可将此方程改写成

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)x = (b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3)u$$

或 $$p^3(x - b_0 u) + p^2(a_1 x - b_1 u) + p(a_1 x - b_2 u) + (a_3 x - b_3 u) = 0$$

由此又可得

$$x = b_0 u + \frac{1}{p}(b_1 u - a_1 x) + \frac{1}{p^2}(b_2 u - a_2 x) + \frac{1}{p^3}(b_3 u - a_3 x)$$

上列最后一个方程之模拟计算图解示于图 4—1 中，积分器的输出构成一组状态变量。我们规定各积分器的输出分别为 $-x_1$，x_2 和 $-x_3$，它们就是所述系统的一组状态变量。这些状态变量 x_1，x_2，x_3 可用原

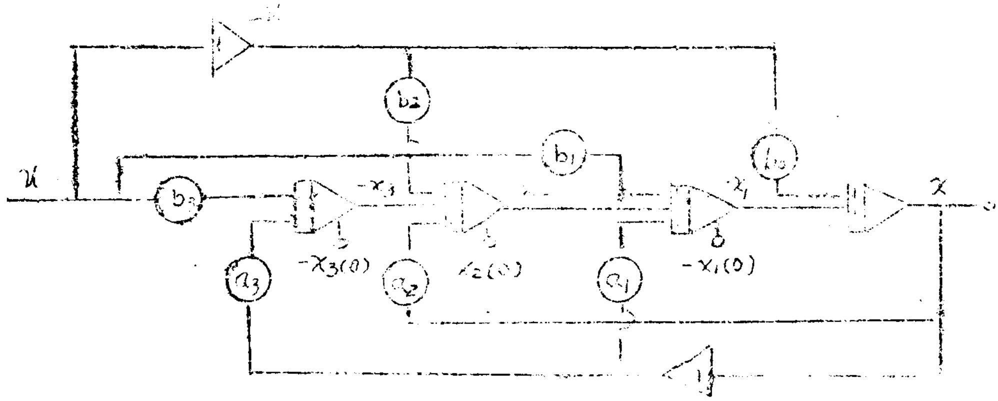

图4—1　三阶微分方程 $\dddot{X}+a_1\ddot{X}+a_2\dot{X}+a_3X=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u$ 之模拟计算图解

始变量X和u表示如下：

$$\left.\begin{aligned}X_1&=X-b_0u\\X_2&=p(X-b_0u)+(a_1X-b_1u)\\X_3&=p^2(X-b_0u)+p(a_1X-b_1u)+a_2X-b_2u\end{aligned}\right\}\quad(4\text{-}15)$$

注　意

$$px_3=(a_3x-b_3u)\qquad(4\text{-}16)$$

写成矩阵表示形式为

$$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_2&a_1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\dot{x}\\\ddot{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-b_0&0&0\\-b_1&-b_0&0\\-b_2&-b_1&-b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\\dot{u}\\\ddot{u}\end{bmatrix}$$

方程（4—15）和（4—16）可改写为

$$\left.\begin{aligned}X_1&=X-b_0u\\X_2&=\dot{X}_1+a_1X-b_1u\\X_3&=\dot{X}_2+a_2X-b_2u\\\dot{X}_3&=-a_3x+b_3u\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}17)$$

在方程（4-17）中，利用关系式 $X=X_1+b_0u$ 将X消去则可得：

$$\dot{X}_1 = -a_1X_1 + X_2 + (b_1 - a_1 b_0)u$$
$$\dot{X}_2 = -a_2X_1 + X_3 + (b_2 - a_2 b_0)u$$
$$\dot{X}_3 = -a_3X_1 + (b_3 - a_3 b_0)u$$

或
$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix} [u] \qquad (4\text{-}18)$$

其 中

$$X_1 = X - b_0 u$$

（注意：虽然状态矢量是连续的，但原始变量X在u之值有突跳时也是不连续的）。

方程（4－18）可写成

$$\dot{X} = CX + Hu \qquad (4\text{-}19)$$

利用一个适当的变换 $X = PY$ 可将方程（4－19）变成

$$\dot{Y} = P^{-1}CPY + P^{-1}Hu$$

其中 $P^{-1}CP$ 为约当标准型，而如果特征方程之根均非重根，则该矩阵为对角线形式。如果需要的话，还可通过又一个变换 $Y = VZ$ 将u之系数矩阵正规化，其中V由方程（4-6）来定义。这样对于没有重根特征根的系统，其正化方程式：

$$\dot{Z} = DZ + Fu \qquad (4\text{-}20)$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

初始条件将作如下变换

$$Z(0) = V^{-1}P^{-1}X(0) \qquad (4\text{-}21)$$

其中 x（0）由下式给出

$$
x(0)=\begin{bmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ a_1 & 1 & 0\\ a_2 & a_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0)\\ \dot{x}(0)\\ \ddot{x}(0)\end{bmatrix}+
$$

$$
+\begin{bmatrix} -b_0 & 0 & 0\\ -b_1 & -b_0 & 0\\ -b_2 & -b_1 & -b_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0)\\ \dot{u}(0)\\ \ddot{u}(0)\end{bmatrix}
$$

例 4—2　设有系统如下

$$
\dddot{x}+6\ddot{x}+11\dot{x}+6x=\dddot{u}+8\ddot{u}+17\dot{u}+8u \qquad (4\text{-}22)
$$

试以方程（4—20）之形式求出其状态空间表示式。

利用方程（4-15）所定义之变换，将方程（4-22）变成：

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 1 & 0\\ -11 & 0 & 1\\ -6 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2\\ 6\\ 2\end{bmatrix}[u] \qquad (4\text{-}23)
$$

特征方程之根为 -1，-2，-3。用下列变换将（4-23）变成 Y 的方程：

$$
X=PY
$$

其中 P 由矩阵（3—21）定义为

$$
P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 3\\ 6 & 3 & 2\end{bmatrix}
$$

则 为

$$
P^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1\\ 8 & -4 & 2\\ -9 & 3 & -1\end{bmatrix}
$$

于 是

4—14

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & -1 \\ \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} [u]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [u] \quad (4—24)$$

再变换一次

$$Y = V Z$$

其 中

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则方程可简化为

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

初始条件 Z(0) 则由方程（4—2[illegible]）确定

给定 u 就很容易计算响应 Z。而只要 Z 求出了，则原始变量 X 的响应也就能立即求出。由于

$$X = PVZ$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 3 \\ -6 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$$

而 $\quad X = X_1 + b_0 u$

故有 $\quad X = X_1 + b_0 u = -Z_1 + 2Z_2 + Z_3 + u$

关于系统响应或状态空间方程之解法一般讨论在第六章中进行。

现在我们来考虑一般情况，即系统的微分方程如下：

$$\overset{(n)}{X} + a_1 \overset{(n-1)}{X} + \cdots\cdots + a_{n-1} \dot{X} + a_n X = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots\cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \qquad (4-25)$$

其中系数 a_i 和 b_j 均为常数。我们按下述方法定义一组状态变量：

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ a_1 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_0 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ -b_1 & -b_0 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{n-1} & -b_{n-2} & -b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ \overset{(n-1)}{u} \end{bmatrix} \qquad (4-26)$$

也就是

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X - b_0 u \\ X_2 &= \dot{X}_1 + a_1 X - b_1 u \\ X_3 &= \dot{X}_2 + a_2 X - b_2 u \\ &\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ X_n &= \dot{X}_{n-1} + a_{n-1} X - b_{n-1} u \\ \dot{X}_n &= -a_n X + b_n u \end{aligned}\right\} \qquad (4-27)$$

利用下列关系式可从方程（4—27）中消去X

$$X = X_1 + b_0 u \qquad (4-28)$$

于是可得下列方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_{n-1} \\ \dot{X}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -a_1 b_0 \\ b_2 & -a_2 b_0 \\ & \vdots \\ b_{n-1} & -a_{n-1} b_0 \\ b_n & -a_n b_0 \end{bmatrix} [u] \qquad (4-29)$$

其中X_i和原始变量x通过方程（4-28）联系起来。初始条件$X(0)$可用方程（4-26）由$x(0)$，$\dot{x}(0)$，……$x^{(n-1)}(0)$以及$u(0)$，$\dot{u}(0)$，……，$u^{(n-1)}(0)$之值计算求得。

如果方程（4-29）中之$n\times n$矩阵的特征根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$均无相等者，则系统方程可用下述变换矩阵P加以简化：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1 + a_1 & \lambda_2 + a_1 & \cdots\cdots & \lambda_n + a_1 \\ \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 & \lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2 + a_1\lambda_n + a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} + a_1\lambda_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1} & \lambda_2^{n-1} + a_1\lambda_2^{n-1} + \cdots + a_{n-1} & \cdots\cdots & \lambda_n^{n-1} + a_1\lambda_2^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

（此变换矩阵之推导可参阅问题 A—3—10）

我们考虑例 4—2 之系统为例，例中由于 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$，$a_1=6$，$a_2=11$，$a_3=6$，故得

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1+a_1 & \lambda_2+a_1 & \lambda_3+a_1 \\ \lambda_1^2+a_1\lambda_1+a_2 & \lambda_2^2+a_1\lambda_2+a_2 & \lambda_3^2+a_1\lambda_3+a_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

此矩阵 P 与例 4—2 中所得相同，如果方程（4—29）中之 $n\times n$ 矩阵之根 λ_1 为 m 重根，则变换矩阵将变成如下：第 j 列（$2\leq j\leq m$）之元素为第一列相应元素，对于 λ_1 之（j−1）阶导数被除以（j−1）!

例如，前三个特征根相同，而其余的均不同，则 P 变成如下：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \lambda_1+a_1 & 1 & 0 & \lambda_4+a_1 & \cdots\cdots & \lambda_n+a_1 \\ \lambda_1^2+a_1\lambda_1+a_2 & 2\lambda_1+a_1 & 1 & \lambda_4^2+a_1\lambda_4+a_2 & \cdots\cdots & \lambda_n^2+a_1\lambda_n+a_2 \\ g_3(\lambda_1) & 3\lambda_1^2+2a_1\lambda_1+a_2 & 3\lambda_1+a_1 & g_3(\lambda_4) & \cdots\cdots & g_3(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ g_{n-2}(\lambda_1) & \frac{d}{d\lambda_1}g_{n-2}(\lambda_1) & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda_1^2}g_{n-2}(\lambda_1) & & & \\ g_{n-1}(\lambda_1) & \frac{d}{d\lambda_1}g_{n-1}(\lambda_1) & \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda_1^2}g_{n-1}(\lambda_1) & & & \end{bmatrix}$$