

天气分析

齋藤直辅



赵庆泰
王嘉桢 译
翟子航
汪庆甲 校

中国人民解放军空军气象学院

56.1116

出版说明

《天气分析》一书，是日本气象研究所预报研究部部长斋藤直辅所著，载于1979年“气象研究ノート”（第137号）。此书较系统地叙述了天气分析的原理和方法。特别在物理量场的定量分析方面做了较多的论述。对天气预报实际工作和气象专业教学工作都有一定的参考价值。

全书共分“分析前的准备”、“绝热图和热力学分析”、“大气特性的图解分析”、“定量分析”四章。

前言，第一章和第三章由赵庆泰同志翻译，第二章由王嘉楨同志翻译，第四章由翟子航同志翻译。

本书由汪庆甲教授审校。

译者

1982年3月

前 言

当编委会委托作者写一本《天气分析》时，实感踌躇，加之内容听任选择，这就更增加了编写的困难。就天气分析来说，内容是非常广泛的。从云的观测，夜间的冷却到大气环流或用参数化技巧作定量分析，形式多样，范围宽广。捕捉现象的方法也包括从目测到高精度的器测。天气分析已经不是独立部门，而是与现代的广阔领域相关联，从微物理过程到与力学有关的各方面都有联系，因此，重点放在何处难于肯定。作者过去以作天气分析为主，概括起来主要是分析天气图上的天气现象，就尺度而言，是属于天气尺度的现象。即使这样执笔仍有顾虑，因为感到这些内容正在逐渐地脱离时代的兴趣。作为捕捉现象的方法，就现代而言，书中所述已成为最间接的方法了，可以说只是从概念上建立起来的形象。但是，在各种新方法发展的同时，仍然会碰到“天气指的是什么”这个问题，这样势必还要联想到所谓天气尺度的现象和长波（或超长波）的现象。总之，就作者所写的范围来说，不是指向新的未来，而是总结过去。因此，期望精确分析天气图的人们，可能感到对重要实例的分析，虽然具有充分道理，但失之过简。而期望根据各种电子仪器测得的资料作些定量分析、以及立足于现象的理论模式，作些尖端分析的人们，则或许以为太古典了。作者虽不能满足上述愿望，但以此为基础，对作好天气分析是有帮助的。

此外，作者最初预定第五章内容为“高、低压和锋面的综合解释以及长期气候变动的意义”，由于约稿的期限未能如愿。但，锋面和气压系统的结构特点，从分析的立场，在所选的有关章节中，也写进了一些内容。因此，各章节的标题与内容未必完全一致，请读者注意。

1979年3月末

目 录

前 言

附表 1 主要的常数	(1)
附表 2 水面饱和水汽压	(2)
附表 3 标准大气	(2)

第 1 章 分析前的准备

1.1 运动方程和连续方程	(3)
1.2 静力学平衡和位势高度	(3)
1.3 向 P 座标系的转变和标量场的几何学	(5)
1.4 边界条件	(9)
1.5 考虑了地球曲率的场合	(10)
1.6 其他坐标系	(12)
1.7 能量方程	(13)
1.8 热能方程	(14)

第 2 章 绝热图和热力学分析

2.1 绝热图的目的和结构	(18)
2.2 湿空气的焓和等压冷却时发生的凝结现象	(21)
2.3 绝热等压过程—相当温度和湿球温度	(23)
2.4 绝热等压水平混合, 无凝结的情况	(24)
2.5 未饱和空气的绝热膨胀—位温和抬升凝结高度	(26)
2.6 可逆饱和和绝热过程和 假湿球位温 饱和和绝热线, 假湿球位温 (绝热湿球位温) / 假相当位温 / 假相当位温 / 假相当位温 (绝热相当位温)	(28)
2.7 关于气块的保守性和识别气块的注意点	(32)
2.8 铅直混合和混合层	(32)
2.9 用气块法判断 大气稳定度	(34)
2.10 条件性不稳定和 位温不稳定 (气流不稳定)	(38)
2.11 夹卷作用和薄片法	(43)
2.12 稳定度的分析	(44)
2.13 关于气块的路径问题	(49)

第 3 章 大气特性的图解分析

3.1	前言	(54)
3.2	观测值的代表性	(54)
3.3	平滑化或过滤	(59)
3.4	时间剖面图或以时间序列表示的图解	(63)
3.5	剖面图的分析及有关不连续面的事项	(66)
	(a) 温度的分析	(67)
	(b) 湿度的分析	(70)
	(c) 气压和风分析	(71)
	(d) 在对流层顶处的不连续	(77)
	(e) 极锋及其附近的经向剖面图	(78)
	(f) 力管环流(正环流)和逆环流(反环流)	(80)
3.6	综合图和绝热图的利用	(80)
	(a) 综合图	(80)
	(b) 绝热图	(81)
3.7	地面天气图和高空天气图	(81)
	(a) 关于天气图的前言	(81)
	(b) 天气图投影	(82)
	(c) 天气图的缩尺	(86)
3.8	天气图的分析	(86)
	前言	(86)
	(a) 地面天气图的分析	(86)
	(b) 高空分析	(90)
	(c) 天气分析	(95)
	(d) 流线分析	(97)
第4章	定量分析	(101)
4.1	分析的规画和变数的选择	(101)
	(a) 气压场或准地转近似	(102)
	(b) 气压场和实际风有效的情形	(109)
4.2	垂直运动的计算	(111)
	(a) 运动学的方法	(111)
	(b) 绝热法和涡度收支法	(114)
	(c) ω 方程	(115)

4.3 收支的计算.....	(117)
(a) 包含次网格尺度的情况.....	(119)
(b) 有限区域内的收支 (平均场与涡动)	(125)
(c) 以气压系统为标准的能量收支.....	(127)
(d) 与收支计算有关的一些附记.....	(128)
4.4 投影面上的公式.....	(129)
主要符号.....	(137)

附表 1 主要的常数

与地球有关的:

平均半径	$a = 6371$ 公里(Km)
自转角速度	$\Omega = 0.7292 \times 10^{-4}$ 秒 $^{-1}$ (S^{-1})
纬度 45° 科氏力	$2\Omega \sin 45^\circ = 1.030806 \times 10^{-4}$ 秒 $^{-1}$ (S^{-1})
重力标准值	$g = 9.80665$ 米·秒 $^{-2}$ (ms^{-2})
位势米常数	$ g_0 = 9.80665$ (焦耳·千克 $^{-1}$)/位势米(JKg^{-1}/gpm)
纬度 1° 长度	111.137 公里(Km) = 59.969 浬(N.mile)
1 节(Knot)	= 1 浬/时(N.mile/h) = 0.5148 米·秒 $^{-1}$ (ms^{-1})

与热力学有关的:

干 空 气

气体常数 $R_d = 287.05$ 焦耳·千克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($JKg^{-1}K^{-1}$)
 $= 0.069$ 卡·克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($calg^{-1}K^{-1}$)

定容比热 $C_{v,d} = 718$ 焦耳·千克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($JKg^{-1}K^{-1}$)
 $= 0.171$ 卡·克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($calg^{-1}K^{-1}$)

定压比热 $C_{p,d} = 1005$ 焦耳·千克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($JKg^{-1}K^{-1}$)
 $= 0.24$ 卡·克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($calg^{-1}K^{-1}$)

$$C_{p,d}/C_{v,d} = 1.40$$

$$R_d/C_{p,d} = k = 0.286$$

水 汽

气体常数 $R_w = 461.5$ 焦耳·千克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($JKg^{-1}K^{-1}$)
 $= 0.110$ 卡·克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($calg^{-1}K^{-1}$)

定容比热 $C_{v,w} = 1390$ 焦耳·千克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($JKg^{-1}K^{-1}$)
 $= 0.332$ 卡·克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($calg^{-1}K^{-1}$)

定压比热 $C_{p,w} = 1850$ 焦耳·千克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($JKg^{-1}K^{-1}$)
 $= 0.442$ 卡·克 $^{-1}$ ·开 $^{-1}$ ($calg^{-1}K^{-1}$)

$0^\circ C$ 时的水的蒸发潜热 $L(0^\circ C) = 2.501 \times 10^6$ 焦耳·千克 $^{-1}$ (JKg^{-1})
 $= 597$ 卡·克 $^{-1}$ ($calg^{-1}$)

0°C时的升华热 $L_s(0^\circ\text{C}) = 2.834 \times 10^6 \text{ 焦耳} \cdot \text{千克}^{-1} (\text{JKg}^{-1})$

$L_s(0^\circ\text{C}) = 677 \text{ 卡} \cdot \text{克}^{-1} (\text{calg}^{-1})$

$$\varepsilon = R_s/R_v = 0.622$$

标准气压 1013.25毫巴(mb)

标准气温 (冰点) 273.15开(K)

1卡 I_T^* = 4.1868焦耳(J) = 4.1868×10^7 尔格(erg)

1瓦特(W) = 1焦耳·秒⁻¹(JS⁻¹)

附表2 水面饱和水汽压

根据司密斯逊 (Smithson) 气象常用表:

°C	-30	-20	-10	0	+10	+20	+30	+40
0	0.5988	1.2540	2.8627	6.1078	12.272	23.373	42.430	73.777
+1	0.6589	1.3664	3.0971	6.5662	13.119	24.861	44.927	77.802
+2	0.6134	1.4877	3.3484	7.0547	14.017	26.439	47.551	82.015
+3	0.6727	1.6186	3.6177	7.5763	14.969	28.086	50.307	86.423
+4	0.7371	1.7597	3.9061	8.1294	15.977	29.831	53.200	91.034
+5	0.8070	1.9118	4.2148	8.7192	17.044	31.671	56.236	95.855
+6	0.8827	2.0755	4.5451	9.3465	18.173	33.608	59.422	100.89
+7	0.9649	2.2515	4.8981	10.013	19.367	35.649	62.762	106.16
+8	1.0538	2.4409	5.2763	10.722	20.630	37.796	66.264	111.66
+9	1.1500	2.6443	5.6780	11.474	21.964	40.055	69.934	117.40

附表3 标准大气

平均海面气压为1013.25毫巴, 气温为15°C = 288.15开, 在11000米高度范围内, 气温直减率为6.5开/千米的大气, 其气压高度关系为:

P(mb)	H(m)	T(°C)	P(mb)	H(m)	T(°C)
1013.25	0	15.0	600	4200	-12.3
1000	110	14.3	500	5570	-21.2
900	990	8.6	400	7180	-31.7
800	1950	2.3	300	9160	-44.5
700	3010	-4.6	226.3	11000	-56.5

* 卡 (IT) 为国际蒸汽表卡, 是电测热量 (现代方法) 所使用的单位, 与通常使用的热量单位卡有如下关系: 1卡 I_T = 1.00032卡 (译者注)

第 1 章 分析前的准备

1.1 运动方程和连续方程

首先，给出作为下面讨论基础的运动方程。先设坐标为 Z 指向局地天顶， x 指向东， y 指向北的笛卡儿坐标系(简称 z —坐标系)。然后在 1.5 节中再考虑地球的曲率效应。如果忽略科里奥利系数的 y 分量，(比地球旋转的离心力小很多)，则单位质量空气的运动方程可写成如下形式。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \mathbf{K} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla w + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \quad (1.2)$$

符号按习惯用法， \mathbf{V} 为水平风矢量， w 为垂直速度， ρ 为空气密度， \mathbf{F} 为摩擦力的水平分量， F_z 为垂直分量， $f = 2\Omega \sin\Phi$ 。 g 为有效重力 (effective gravity)，它包含了地球旋转引起的离心力。

连续方程表示如下。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

关于流体个别微分所用的算符 d/dt ，按如下展开。

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.4)$$

1.2 静力学平衡和位势高度

在垂直加速度相当小，而且气象现象的垂直尺度相对于水平尺度相当小时，可以采用静力平衡，因而，(1.2) 式的左边为 ~~零~~，代入连续方程，可有

$$g dz = -R T \frac{dp}{p} \quad (1.5)$$

式中 R 为空气的气体常数。根据 ~~温度和气压的垂直分布的测定值~~，用(1.5) 式可以计算高度。从经济的观点，现在日常观测业务，~~几乎全部采用~~此法计算。除了几何学高度之外，在理论和能量计算上，可以用位势 gz 。由于代表 ~~能量~~ 位势的大小，以近于几何高度的单位表示为方便，所以观测值的最后整理值，是以位势来表示 gz 。从海面 ~~上升到 10Km 的高度~~ g 值约减少 3cm/S^2 ，但一般忽略 g 随高度的差异。(1.5) 式中的 R 采用下述干空气的值 R_d ，对含有水汽的湿空气，可用虚温 T_v 。

$$R_d = 287.05 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$T_p = (1 + 0.608q)T$$

q 表示比湿。 g 可用下式:

$$g = g_{00}(1 - 0.002590062\varphi)(1 - az)$$

式中常数 a 为:

$$a = 3.14 \times 10^{-7} \text{ m}^{-1}$$

在通常分析上, 高度订正是不必要的, 下面的计算是以地面 ($z=0$) 的值进行的。

任意高度 z_1 、 z_2 上的气压以 p_1 、 p_2 表示, 如 $z_1 < z_2$, 则有 $p_2 < p_1$, 对 (1.5) 式在此区间进行积分, 有

$$\begin{aligned} g \int_{p_2}^{p_1} dz &= -R \int_{p_2}^{p_1} T_p d \ln p \\ &= 287.05 \int_{p_2}^{p_1} T_p d \ln p \end{aligned}$$

设 p_1 、 p_2 间的位能差是对 1 Kg 的空气而言, 则高度 z 的位势 ϕ 有如下定义:

$$\phi = \int_0^z g dz = g \int_0^z dz$$

在气象上常常用 $|g_0|$ 常数除上式所得的值。即:

$$g \int_0^z \frac{dz}{|g_0|} = z \quad \text{或} \quad g \int_{p_2}^{p_1} \frac{dz}{|g_0|} = \Delta z$$

式中 z 或 Δz 称为位势米 (gPm), 也就是, 用 p 和 T 所计算的位势单位, 与用几何高度所表示的单位极为近似, 常数 $|g_0|$ 的值为

$$|g_0| = 9.80665 (\text{J Kg}^{-1}) / \text{gPm}$$

因而, 位势米所表示的高度差用下式计算:

$$\begin{aligned} \Delta z = z_2 - z_1 &= \frac{1}{|g_0|} \int_{p_2}^{p_1} g dz \\ &= \frac{R_d}{|g_0|} \int_{p_2}^{p_1} T_p d \ln p \end{aligned} \quad (1.6)$$

等压面高度用 gPm 单位发报。若将此 z 乘以 $|g_0|$ 则可得以 J/Kg 为单位的位能。(1.6) 式也可以用来计算两个等压面间的平均虚温。式中若取 $R_d = 287.05 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $|g_0| = 9.8066 \text{ J Kg}^{-1} / \text{gPm}$, 则

$$\frac{R_d}{|g_0|} = 29.272^* \text{ gPm/K} \quad (1.7)$$

* 1971年以前使用 $|g_0| = 9.80 (\text{J Kg}^{-1}) \text{ gPm}^{-1}$, $R_d = 287.04 \text{ J Kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, 因此 $R_d / |g_0| = 29.2898$ 。

若用 (1.7) 式的值, 求各主要等压面间的 $(R_d/|g_0|) \ln p_1/p_2$, 可得下表 (见表 1.1)。虚温当然是随着比湿的大小而变的, 比湿为 20 克/千克左右时的虚温值大约比干燥空气时度温 T 增加 1.2%。

表 1.1

p_1	p_2	$(R_d/ g_0) \ln p_1/p_2$
1000	850	4.7526
850	700	5.6834
700	600	4.5105
600	500	5.3368
500	400	6.5317
400	300	8.4192
300	250	5.3368
250	200	6.5317
200	150	8.4192
150	100	11.8689

1.3 向 p —坐标系的转变和标量场的几何学

在静力平衡的条件下, 在 1.1 节所使用的垂直坐标轴, 可以采用气压单位。把这种坐标简称为 p —坐标系。当然, 垂直坐标轴与 z 轴相同, 是从坐标的原点到天顶或地心的连线, 水平面 (x, y 面) 与 z —坐标系相同。所以等压面通常与 x, y 面有微小的倾斜。 z 坐标是向天顶方向增加的, 但采用 p —坐标系后, 垂直坐标就向下增加了。由于用气压作垂直标尺, 两个等垂直坐标面间的质量会保持常数, 因而, 连续方程有可以简化的优点。所以, 现在的高空天气图都采用等压面图。等压面上的标量分布与水平面上的分布不同, 这样与 z —坐标系对比就会发生困难。现在先讨论一下 p —坐标系所看到的标量场的几何学和运动*。标量 a 在 z —坐标系中的垂直梯度为 $\partial a/\partial z$, 而在 p —坐标系中为 $\partial a/\partial p$, 但要注意 p 是向下增大的。从 (1.5) 式可得

$$\frac{\partial a}{\partial z} = -\frac{g p}{R T} \frac{\partial a}{\partial p} = -\rho g \frac{\partial a}{\partial p} \quad (1.8)$$

上式表示了两者的关系。

现在, 相对于 z —坐标系中 a 在 x 方向上的增量, 考虑一下, p —坐标系中, 在 p 固定的面上 a 的增量情况。由于一定的 p 面与水平面不同, a 的增量也和 z —坐标系中的增量不同。这一关系, 我们从几何学上讨论一下。如图 1.1 所示, 设空间 a 的分布以实线表示, 则在 A 点的微分 $\partial a/\partial x$ 为,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a_1 - a_0)}{\Delta x}$$

* 即, 坐标轴的方向不变, 坐标轴只是在原垂直方向上的标尺发生变化。

p 一坐标系中，取图1.1所示的等压面上两点 A ， C ，可以用下式进行计算，即

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)_p = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a_3 - a_0)}{\Delta x}$$

式中 $()_p$ 表示 p 一坐标系中的微分。在等压面上，相对于 Δx 的水平变量来说，由于改变了 Δz 高度，不再是 a_0, a_2 ，而是 a_0, a_3 的数值了，这个差异是用 a 的高度的变化率 $(\partial a / \partial z)$ 和等压面的倾斜 $(\Delta z / \Delta x)_p$ 的乘积来表示的，所以可以写成 $a_3 = a_2 + (\partial a / \partial z) \cdot (\Delta z / \Delta x)_p$ 。因而， $\partial a / \partial x$ 和 $(\partial a / \partial x)_p$ 之间的关系，有如下式。

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)_p = \frac{\partial a}{\partial x} + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$$

把 $(\partial a / \partial z)$ 用 (1.8) 式代换成与 p 有关的微分，则上式整理后可得：

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p \frac{\partial a}{\partial p}$$

此式就是把 $\partial a / \partial x$ 改写为 p 一坐标系的变换式。关于 y 方向的微分也是一样，于是，水平方向上“ ∇ ”算符成下列关系：

$$\begin{aligned} \nabla &= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \rho g (\nabla z)_p \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned} \quad (1.9)$$

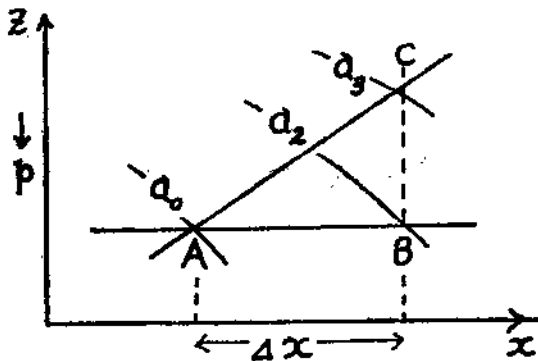


图1.1 a_0, a_2, a_3 表示标量 a 的分布

在图1.1上 A 点， a 的局地时间变化 $\partial a / \partial t$ ，是指在 z 一坐标系中，在不受时间变化影响的某空间固定点 A ，所看到的 a 随时间的变化。在 p 一坐标系中，点 A 位于某一等压面上，而且，由于该面的高度随着气压变化而发生变化，因此，附加了这种情况下 a 的变动，可得如下关系。

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_p = \frac{\partial a}{\partial t} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_p \frac{\partial a}{\partial z}$$

$(\partial z / \partial t)_p$ 表示等压面上高度随时间的变化。与前相同，对 $\partial a / \partial z$ 进行改写和整理，可得如下

关系式。

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \left(\frac{\partial a}{\partial t} \right)_p + \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p \frac{\partial a}{\partial p} \quad (1.10)$$

水平风速，不管是 p —坐标还是 z —坐标，大小是一样的；但垂直运动的大小是不同的。在 p —坐标中，垂直运动的标尺是以气压表示的。即用 $\partial p / \partial t$ 表示，称之为垂直 p —速度，通常以 ω 表示。

首先，把 $\omega \equiv dp/dt$ 在 z —坐标系中展开，得

$$\omega = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z}$$

对式中各项，用 (1.10) 式、(1.9) 式、(1.8) 式改写，有

$$\omega = \rho g \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_p + \mathbf{V} \cdot \nabla_p z - w \right\} \quad (1.11)$$

式中

$$\nabla_p = i \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + j \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p$$

(1.11) 式表示了 ω 和 w 的关系，若从几何学上看，其含义如下。气块在单位时间内水平和垂直方向的移速分别为 \mathbf{V} 和 w ，在图 1.2 上，设从 A 点向 B 点变化。在不考虑水平运动时， ω 随气压而变，等于 $-\rho g w$ （图上 $p_4 - p_2$ 在微小范围内与 $p_3 - p_1$ 相等）。若有水平运动，由于通过 A 的等压面不一定是水平的，因此，对于 \mathbf{V} 的变动，气块从 p_2 面离开，造成 ω 的分量，若向下风方向 p_2 面变高时，则作水平移动的气块，有向下的 ω ，即有 $\omega > 0$ 的情况，当 p_2 面变化时，有向上的 ω ，即有 $\omega < 0$ 的情况，于是，可得 $\omega = -\rho g w + \rho g \mathbf{V} \cdot \nabla_p z$ 。另外，若等压面的高度随时间有变化时，与此相应，产生 ω 分量，应增加 $\rho g (\partial z / \partial t)_p$ 项，这就成为 (1.11) 式了。

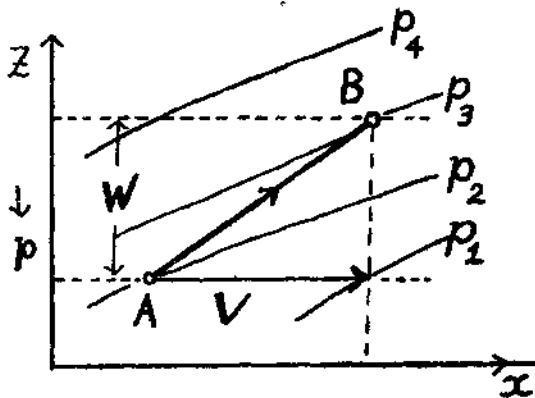


图 1.2 $p_1 \dots p_4$ 表示等压面的分布

在 z —坐标系中，个别微分的算符可用 (1.4) 式定义，使用 (1.8) 式~ (1.11) 式，

转换为在 p 一坐标中展开, 可得

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p + \mathbf{V} \cdot \nabla_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad (1.12)$$

从形式上看, 与 z 一坐标系的情况完全对应。

若把 (1.9) 式应用于气压 p , 则气压梯度力有 $(\partial p / \partial x)_p = (\partial p / \partial y)_p = 0$, 因而, 等压面的位势梯度有如下形式。

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = -g \nabla_p z$$

若用以 gpm 为单位的等压面高度 z , 式中右边为 $-|g_0| \nabla z$ 。

这样, p 一坐标系中的运动方程, 其水平运动为 (1.13) 式, 其垂直分量为静力平衡方程 (1.14) 式, 分别给出如下。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_p \mathbf{V} + \omega \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} = -|g_0| \nabla z \\ - f \mathbf{K} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$dz = - \frac{R_d T_v}{|g_0|} d \ln p \quad (1.14)$$

对 p 一坐标系中的连续方程, 通常要考虑其上大气重量为定常的面, 或者把 (1.3) 式用 (1.8), (1.9), (1.0) 式变换, 可得下面不可压缩流体的连续方程。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1.15)$$

运动方程中气压梯度力只出现一个变数 gz (或 $|g_0|z$), 这样, 连续方程的简化就是用 p 一坐标系的优点。

在分析上, 常常把空间等标量面的分布作具体的处理。在 z 一坐标系中, 等 a 面的倾斜矢量若用 $\nabla_z a$ 表示, 则有

$$\nabla_z a = - \nabla a \Big/ \frac{\partial a}{\partial z} \quad (1.16)$$

同理, 在 p 一坐标系中, 可定义为

$$\nabla_p a = - \nabla_p a \Big/ \frac{\partial a}{\partial p} \quad (1.17)$$

等标量面的倾斜, 对于水平位移来说, 就是等标量面的高度变化率 (在 p 一坐标系中为等压面的气压差)。等 a 面的条件, 若以式子表示为

$$\begin{aligned} a(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t_0) \\ - a(x, y, z, t_0) = 0 \end{aligned}$$

所以, 有

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)\Delta y + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)\Delta z = 0$$

若考虑方向的水平位置矢量差以 $\Delta \mathbf{T}$ 表示，则沿该方向的等 a 面高度变化或气压变化分别为

$$\nabla z = \frac{-\Delta \mathbf{T} \cdot \nabla a}{\frac{\partial a}{\partial z}} = \Delta \mathbf{T} \cdot \nabla_p z$$

或

$$\Delta p = \frac{-\Delta \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla_p a}{\frac{\partial a}{\partial p}} = \Delta \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla_p p$$

不论那一个式子，只要知道了 a 的水平梯度和上下的梯度，就可知道等 a 面的倾斜。在一些剖面图上绘制等值线时，用上下左右的观测值一次内插的描绘，就是利用上述关系式。

另外，在 p —坐标系中，在 x, y 为固定的点上，等标量面的上下运动，可从下列关系：

$$a(x, y, p + \Delta p, t + \Delta t) - a(x, y, p, t) = 0$$

得到

$$\left(\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)_s = -\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_s \Big/ \frac{\partial a}{\partial p}$$

同样，我们讨论一下等压面上等标量线的移动，也就是型式的运动。这里，把等压面上的气压作为 p_0 ，则有

$$a(x + \Delta x, y + \Delta y, p_0, t + \Delta t) - a(x, y, p_0, t) = 0$$

若把型式的位移以 $\Delta \boldsymbol{\gamma} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$ 表示，可得

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_p + \frac{\Delta \boldsymbol{\gamma}}{\Delta t} \cdot \nabla_p a = 0 \quad (1.18)$$

从等压面上 a 随时间的变化和 a 的分布，可以求出 $\nabla_p a$ ，也可以得出型式的移动速度 $C = \Delta \boldsymbol{\gamma} / \Delta t$ 。因此，很早以来，这种运动学的分析就被人们所注意，这个式子是在极短时间内才能成立的，因而，在实际中求瞬间值 $(\partial a / \partial t)_p$ 是困难的，如代用有限的时间值，则就出现误差，所以，当系统发展或变形时，型在分布上的变化，势必会带入 $(\partial a / \partial t)_p$ 中去。在数值预报上，如给以瞬间的 $(\partial a / \partial t)_p$ 值，则型的移动速度可以求出。

1.4 边界条件

在 z —坐标系中，若大气的下边界（即地表面）为平坦时，在地表面，垂直速度 w 为 0，这就是运动学上的边界条件。地表面的高度 z_g 不一样时，由于气流不能进入地面（刚体条件），这样可以导出人们熟知的 (1.19) 式如下。

$$w = \mathbf{V} \cdot \nabla z_g \quad (1.19)$$

在 P —坐标系中, 地面气压 p_s 是随时间和地点而变的, 因此, 不是某一特定的等压面作为地面, 而是由不同的等压面分别与地面相交。

把 (1.19) 式在 P —坐标中展开, 从 (1.11) 式可得:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{p_s} + \mathbf{V} \cdot (\nabla_p z_{p_s} + \nabla z_E) - \frac{\omega}{\rho g} = 0 \quad (1.20)$$

上式为大气的边界条件, 式中的等压面 p_s 是因地点和时间而异的。在多数情况下, 不需要这样严密, 而是采用近似法, 把最靠近地面的等压面 (例如 1000mb 面), 用于整个场所。

(1.20) 式可以用于给出地面的气压倾向方程, 另一方面, 也可以用作垂直 P —速度 ω 的边界条件。在大多数情况下, 把可用地转风近似那样的尺度系统, 作为分析对象时, 若忽略地面的凹凸不平, 则 (1.20) 式中的第二项可以省略, 而第一项的大小可估算为 $10\text{mb}/12\text{h} \approx 0.24\text{cm/s}$, 因此也可忽略, 从而

$$\omega \approx 0$$

即使是地转风近似, 也会带进由于地形引起的的 ω 值, 这时, 从地转风和实际地形计算 $\mathbf{V} \cdot \nabla z_E$ 时, 将得出较大的 ω 值, 因为从地转风近似的制约, 把数量级为 10^{-6}s^{-1} 的辐散去掉, 就是对实际地形作了平滑, 也就是采取了限制 ω 的手法。即使是使用实际风, 对山附近的风也是很难确定。若沿山麓适当的取得实测风, 用这些风求出地表的辐合量, 而不直接计算地形上升的影响, 从分析的立场来说, 这是一种好的方法。

1.5 考虑了地球曲率的场合

前面一直把位势面作为平面, 未考虑地球的曲率。但地球为球形, 在位势面具有曲率的场合, 前面所使用的 z —坐标系或 P —坐标系中的运动方程和连续方程, 有怎样的变化呢。这在 A. Eliassen (1949) 的论文中已作了详细讨论。由于垂直方向上单位矢量 \mathbf{K} 的方向随地点变化, 所以式中出现一些附加项, 它们的数量级都是很小的, 通常在分析中可以省略, 因而, 若用矢量形式, 以 (1.1)、(1.2)、(1.3) 式那样的形式就可以了。但, 一向在局地笛卡儿坐标中, 把 ∇ 的微分演算展开时, 在考虑地球曲率的场合, 多改变这些式子的形状, 而在坐标中使用经度 λ (向东为正) 和纬度 φ (向北为正) 在此坐标上的增量 $\Delta\lambda$, $\Delta\varphi$ 和实际长度的增量不同, 其比值随纬度而变, 水平直交的单位矢量 \mathbf{i} , \mathbf{j} , 分别取向东、向北, 所以 \mathbf{i} 的方向随经度 λ 而变, 而 \mathbf{j} 的方向随 λ 、 φ 而变, 因而, 水平微分演算的形式变得复杂起来。但, 观测风的东向西分量 v_λ , 南北向分量 v_φ , 就按原来的情况代入使用。考虑曲率的微分形式, 通常可用极坐标的变换形式, 这里先按 \mathbf{i} , \mathbf{j} 随经度、纬度而变, 用几何学的方式导出。根据 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 的地点不同, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \lambda} &= \mathbf{j} \sin \varphi - \mathbf{K} \cos \varphi, & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \lambda} &= -\mathbf{i} \sin \varphi \\ \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \varphi} &= -\mathbf{K} \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

对坐标增量距离矢量的增量 $d\mathbf{r}$, 以 a 为地球半径, 则有 $d\mathbf{r} = \mathbf{i} a \cos \varphi d\lambda + \mathbf{j} a d\varphi$, 所以水平 ∇ 算符为,

$$\nabla = \frac{i}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) + \frac{j}{a} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

风速矢量，用前述所观测的两个分量表示，为 $\mathbf{V} = i v_\lambda + j v_\varphi$ 。因而，水平辐散为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{i}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{j}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (i v_\lambda + j v_\varphi) \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \frac{v_\varphi}{a \cot \varphi} \end{aligned}$$

速度的水平移动为，

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} &= i \left[\frac{v_\lambda}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{a} \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \varphi} \right) - \frac{v_\lambda v_\varphi}{a \cot \varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. + j \left[\frac{v_\lambda}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda} \right) + \frac{v_\varphi}{a} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{v_\lambda^2}{a \cot \varphi} \right] \right] \end{aligned}$$

常用的涡度垂直分量为

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{K}{a^2 \cos \varphi} \left[-\frac{\partial}{\partial \lambda} (a v_\lambda) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \cos \varphi v_\lambda) \right]$$

运动方程的东西向分量和南北向分量，若用 p —坐标系，有如下形式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \cos \varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{a} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \varphi} - \frac{\tan \varphi}{a} v_\lambda v_\varphi \\ + \omega \frac{\partial v_\lambda}{\partial p} = -\frac{g}{a \cos \varphi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} + f v_\varphi \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \cos \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{v_\lambda}{a} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\tan \varphi}{a} v_\lambda^2 + \omega \frac{\partial v_\varphi}{\partial p} \\ = -\frac{g}{a} \frac{\partial z}{\partial \varphi} - f v_\lambda \end{aligned} \quad (1.23)$$

连续方程以及某标量 x 的个别微分式可得出如下。

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{a \cot \varphi} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) + \frac{v_\varphi}{a} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \omega \frac{\partial x}{\partial p} \quad (1.25)$$

如使用上述方程，在天气图上由经纬度所决定的各点数值，可以直接用来计算。

另外，在天气图上笛卡儿坐标，也就是在图上设置直交的网格，这时，网格点上的风的 x ， y 分量就变成没有 λ ， φ 分量了。

微分形式虽较简单，但要修正计算风的分量（地转风情况除外），并且，把地球表面投影于天气图上时，所产生的长度倍率是随地点而变的。在天气图上用设定的直线网格读取数值时，可参阅第 4 章中简单的介绍。