理论力学习题解

·第三册·

（上）

西南石油学院力学教研室编

目　　录

12 质点的振动（续）

习题：（续）

411 圆柱重P，半径为r，高为h，悬在弹簧AB的下端，弹簧的上端固定，而圆柱则浸在水中。当圆柱体处于平衡位置时，浸在水中的部分为其高度之半。运动开始时，初速为零，圆柱有$\frac{2}{3}$高度浸于水中。设弹簧的刚度为c，水的比重为γ。考虑水的浮力作用，求圆柱体相对于其平衡位置的运动。

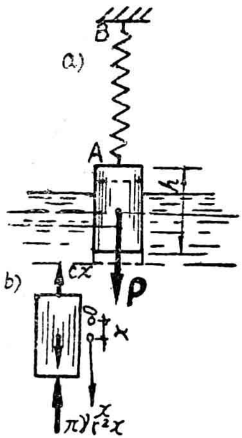


图411

解 圆柱体在铅垂方向作平动，其重心偏离平衡位置后，其受力分析与坐标选择如图b)所示。坐标原点为静平衡位置，即水平面。

将其下浸x后，据$\Sigma F_x = m\ddot{x}$有

$$-cx-\pi r^2\gamma x=\frac{P}{g}\ddot{x}$$

令 $k^2=\frac{g}{P}(c+\pi\gamma r^2)$ 则上式简化为，

$$\ddot{x}+k^2x=0。$$

题设t＝0时，$x_0=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)h=\frac{1}{6}h$，$\dot{x}_0=0$，则上方程之解为，　$x=x_0\cos kt$。

于是圆柱体相对于其平衡位置的运动方程为，

$$x=\frac{1}{6}h\cos kt。$$

412　用下法测定液体的粘滞系数：在弹簧上悬一薄板A，测定它在空气中的周期T_1，然后将薄板放在欲测粘滞系数的液体中，令其振动，测定周期T_2。液体与薄板间的阻力等于$2S\ \lambda V$，其中$2S$是薄板的表面积，V是其速度，而λ为粘滞系数。如薄板重P，试根据实验测得的数据T_1和T_2，求粘滞系数λ。薄板与空气间的阻力略去不计。

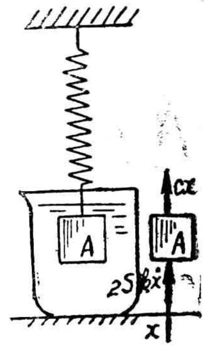


图412

解　当薄板在空气中振动时，系统为典型的质量——弹簧系统，则

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{P}{gc}} \tag{1}$$

当薄板在粘滞液中振动时，我们取静平衡位置为坐标原点，x轴铅垂指向下，据$\Sigma F_x=m\ddot{x}$可以列出其运动微分方程式为，

$$-cx-2S\ \lambda\dot{x}=\frac{P}{g}\ddot{x} \tag{2}$$

（注意，我们取静平衡位置为坐标原点时，薄板的重力和液体的浮力均与$-c\ \delta_{st}$项消去，不出现在方程中。）

令 $k^2=\frac{gc}{P}$， $2n=\frac{2gS\lambda}{P}$，

代入(2)式得，

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0 \tag{3}$$

这是典型的有阻尼自由振动方程，据振动理论知若能振动，需$n<k$。此时方程在初始条件：

$t=0$ 时 $x=x_0$， $\dot{x}=\dot{x}_0$，下的解为，

$$x=Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2-n^2}\ t+\alpha) \tag{4}$$

其中 $$A=\sqrt{x_0{}^2+\frac{(\dot{x}_0+nx_0)^2}{k^2-n^2}} \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\dot{x}_0+nx_0}{x_0\sqrt{k^2-n^2}} \tag{6}$$

于是，$T_2=2\pi/\sqrt{k^2-n^2}$

由(1)式知， $k=\frac{2\pi}{T_1}$，且将$n=\frac{gS\lambda}{P}$代入上式解得，

$$\lambda=\frac{2\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2{}^2-T_1{}^2}。$$

413 野炮炮筒重700kg。在回座后，由还原器拉回到原位置。还原器的刚性系数$c=150$kg/cm。求使炮筒无振动地回到原位置的最小阻尼系数。

解 设还原器的阻力 $F=\beta V$，则炮筒在还原器作用下的运动方程应为，

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$$

其中， $n=\frac{\beta g}{2P}$，$k^2=\frac{gc}{P}$。

按题设条件，需 $n=k$，于是，

$$\beta=2\sqrt{\frac{Pc}{g}}\approx 20.7\ \text{kg}-\text{s/cm}\ (\text{取}g=980\text{cm/s}^2)$$

414 在弹簧上悬挂重5.88kg的物体。当无阻力时，物体振动周期 $T_1=0.4\pi$ s。而在阻力与速度一次方成正比时，其周期为 $T_2=0.5\pi$ s。求当速度等于 1 cm/s 时的阻力R的大小。如将弹簧由平衡位置拉长 4cm，然后无初速地释放，求此后物体的运动规律。

解 物体运动的阻力 $R=\beta\dot{x}$，则其运动微分方程为，

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$$

因要振动，须 $n<k$，就和题412的情况类似了。

这里，$k=\dfrac{2\pi}{T_1}$， $T_2=2\pi/\sqrt{k^2-n^2}$

而 $n=\dfrac{\beta}{2m}=\dfrac{\beta g}{2P}$ 由上述关系解得，（取$g=980\text{cm/s}^2$）

$$\beta=\frac{4\pi P}{gT_1T_2}\sqrt{T_2^2-T_1^2}=0.036\ \text{kg}-\text{s/cm}$$

当 $\dot{x}=1$ cm/s 时，$R=\beta\dot{x}=0.036$ kg。

由412题式(5)，(6)，(4)，代入本题之初始条件，

$t=0$时，$x_0=4\text{cm}$， $\dot{x}_0=0$。

而 $k=\dfrac{2\pi}{T_1}=5\ 1/\text{s}$，$n=\dfrac{\beta g}{2P}=3\ 1/\text{s}$。

于是 $$A=\sqrt{4^2+\frac{(3\times 4)^2}{5^2-3^2}}=5(\text{cm}),$$

$$\text{ctg}\alpha=\frac{3\times 4}{4\times\sqrt{5^2-3^2}}=\frac{3}{4}$$

$$\alpha=\text{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$$

则物体的运动规律为 $x=5e^{-3t}\sin\left[4t+tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right]$

415 作微振动的单摆所受阻力与速度的一次方成正比。设其对数减幅系数为-0.02，问经过100周振动后，振幅减成开始时的几分之一。

解 据振动理论知 $A_N=A_1\left(e^{\delta}\right)^{-1}$

其中 δ为对数减幅系数。

N为单向振动次数，

A为振幅，

这里， $A_{201}=A_1\cdot(e^{-0.02})^{200}$

$$=0.0183A_1=\frac{A_1}{54.5}$$

即振幅减为开始时的 $\frac{1}{54.5}$。

416 证明在大阻尼振动的情况下，物体以任意的起始位置和起始速度运动，越过平衡位置不能超过一次。

解 质点作有阻尼自由振动的运动微分方程式为，

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$$

大阻尼时，$n>k$，在初始条件，$t=0$时$x=x_0$， $\dot{x}=\dot{x}_0$下，方程的解，即质点的运动方程为，

$$x=e^{-nt}\left[x_0 ch\sqrt{n^2-k^2}\,t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{\sqrt{n^2-k^2}}sh\sqrt{n^2-k^2}\,t\right]$$

如果质点在运动时越过平衡位置，即指上述方程在某瞬时t_1时，$x=0$。而上式中$e^{-nt}\neq0$，所以，求越过平衡位置的次数，就是确定下面方程中实根的数目。

$$x_0 \operatorname{ch}\sqrt{n^2-k^2}\, t+\frac{\dot{x}_0+nx_0}{\sqrt{n^2-k^2}}\operatorname{sh}\sqrt{n^2-k^2}\, t=0$$

把上式改写成

$$\operatorname{th}\sqrt{n^2-k^2}\, t=-\frac{x_0\sqrt{n^2-k^2}}{\dot{x}_0+nx_0}$$

这是包含双曲正切函数的超越方程。根据双曲正切函数的定义，当 $0\leqslant t\leqslant\infty$时，方程只有当$-1<\frac{x_0\sqrt{n^2-k^2}}{\dot{x}_0+nx_0}<0$时，才有意义。这就需要适当地选择$x_0$和$\dot{x}_0$，例如，当$x_0>0$，$\dot{x}_0>0$；$x_0<0$，$\dot{x}_0<0$时，不满足上述条件，方程无意义，即质点不能越过平衡位置。即使另外选择x_0和$\dot{x}_0$能使方程有解，但因双曲正切函数的单调性，可知解是唯一的，则质点只能越过平衡位置一次。

综上所述，命题得证。

417 车厢载有货物，其车架弹簧的静压缩为 $\delta_{st}=5\text{cm}$。每根铁轨的长度$L=12\ \text{m}$，每当车轮行驶到轨道接头处都受到冲击，因而当车厢速度达到某一数值时，将发生激烈颠簸，这一速度称为临界速度。求此临界速度。

解 问题属受迫振动的问题，干扰力是轨道接头对车轮的冲击力。显然，当冲击力的圆频率等于车厢的固有频率时，车厢即发生激烈的颠簸，即发生共振。

车厢的固有频率 $\quad k=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \qquad (1)$

冲击力的圆频率 $\quad p=2\pi\frac{V}{L} \qquad (2)$

当 $k=p$ 时发生共振，此时的速度即为临界速度V^*，由(1)、(2)两式解得，

$$V^* = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

取$g=9.8\ m/s^2$，而 $\delta_s=0.05\ m$，$L=12\ m$代入上式，

得　$V^* \approx 26.7\ m/s$，

或　$V^* \approx 96\ km/h$。

418　车轮上装置一重为P的物块B，于某瞬时$(t=0)$车轮由水平路面进入曲线路面，并继续以等速V行驶。该曲线路面按$y_1 = d\cdot\sin\frac{\pi}{L}x_1$的规律起伏，坐标原点和坐标系$O_1x_1y_1$的位置如图所示。当轮A进入曲线路面时，物块B在铅垂方向无速度。设弹簧的刚性系数为c。求：

(1)物块B的受迫振动方程；

(2)轮A的临界速度。

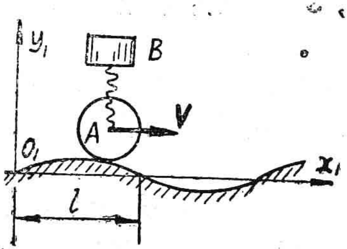


图418

解　物块B与弹簧组成的系统，当车轮进入曲线路面时，应受到干扰力

$$cy_1 = cd\cdot\sin\left(\frac{\pi}{L}Vt\right)$$

的作用。因此，如取B块在铅垂方向的平衡位置为坐标原点，取随A轮一起前进的铅垂轴Oy，则B块的运动微分方程式（在Oy轴上）为，

$$\frac{P}{g}\ddot{y} + cy = cd\cdot\sin\left(\frac{\pi}{L}Vt\right)$$

令　$k^2 = \frac{gc}{P}$，$h = \frac{gcd}{P}$，$p = \frac{\pi}{L}V$ 则上式标准化为，

$$\ddot{y} + k^2 y = h\cdot\sin pt$$

其解的受迫振动部分为，

$$y=\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$$

将k^2、p，h之值代入得，B块受迫振动的运动方程为

$$y=\frac{cgdL^2}{cgL^2-\pi^2PV^2}\sin\left(\frac{\pi}{L}Vt\right)。$$

系统发生共振时，轮A之速度为临界速度V^*，此时理论上指y趋于∞，即由上式需。

$$cgL^2-\pi^2PV^2=0$$

解得 $$V^*=\frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{cg}{P}}。$$

419 一弹性系统由物体B和弹簧组成。已知：物重P＝1.96kg；弹簧刚性系数为 c＝2kg/cm；作用在物体上的干扰力S＝1.6sin60t，式中 t以s 计，**S** 以 kg 计；物体所受阻力R＝βV，其中β＝25.6 kg－s/cm。求：

（1）无阻尼时，物体的受迫振动方程和动力放大系数 λ。

（2）有阻尼时，物体的受迫振动方程和动力放大系数λ。

图419

解 （1）据振动理论，无阻尼强迫振动的受迫振动部分，即运动稳定时的运动方程为

$$x=\frac{h}{k^2-p^2}\sin(pt+\delta)\quad(1)$$

其中，$k^2=\frac{c}{m}$，$h=\frac{H}{m}$，H－干扰力的振幅。δ为干扰力的初位相，p为干扰力频率。x坐标的原点是振动体的平衡位置，x轴沿振动方向如图。

这里，　$k^2=\frac{gc}{P}=1000 \quad 1/s^2$，

$H=1.6\ kg$，

$h=\frac{gH}{P}=800\ cm/s^2$，

$p=60\ 1/s$，

将这些数据代入(1)式得，物体无阻尼时的受迫振动为，$x=0.308\ \sin 60t$。(cm)

又动力放大系数　$\lambda=\frac{B}{B_0}$　(2)

而　$B=\frac{h}{k^2-p^2}$，　$B_0=\frac{H}{c}=0.8\ cm$

则将其与已知数据代入(2)式得 $\lambda=0.385$。

(2) 据振动理论，有阻尼强迫振动在运动稳定时的运动方程为　$x=b\sin(pt-\varepsilon)$　(3)

其中，　$b=\frac{h}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}$

$tg\varepsilon=\frac{2np}{k^2-p^2}$

$n=\frac{\beta}{2m}$

除解(1)的已知数据外，这里 $\beta=25.6\ kg-s/cm$　则

$n=\frac{g\beta}{2P}=6400\ 1/s$

$tg\varepsilon=320$，　$\varepsilon\approx\frac{\pi}{2}$；

$b=0.00104cm$

将所有已知数据代入(3)得，物体有阻尼时的受迫振动为，　$x=0.00104\ \sin\left(60t+\frac{\pi}{2}\right)$

$=0.00104\ \cos 60t$ (cm)

此时动力放大系数 $\lambda=\frac{b}{B_0}=\frac{0.00104}{0.8}\approx0.0013$。

420 电动机重250kg，由四个刚性系数 c=30kg/cm的弹簧支持。在电动机转子上装有一重 200g 的物体，距转轴 e=1cm。已知电动机被限制在铅垂方向运动，求：

（1）发生共振时的转速；

（2）当转速为1000r/min时，稳定振动的振幅。

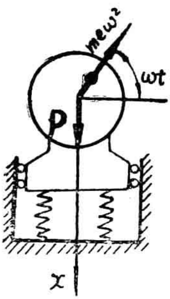


图420

解 （1）共振条件是干扰力的圆频率与系统的固有频率相等。

图示系统在铅垂方向是标准的质量——弹簧系统，它的固有频率

$$k^2=\frac{c}{m}=\frac{gc}{P}\approx470\ 1/s^2$$

其中取$g=980\ cm/s^2$，$P\approx250$ kg（不计200g的偏心物体的重量），c=30 kg/cm。

由图可知，系统的干扰力就是偏心物体的离心力在铅垂方向的投影，取初位相为零，得干扰力 $S=me\omega^2\sin\omega t$，与标准形式比较知 $H=me\omega^2$，$p=\omega$

其中，m为偏心物体的质量 $m=\frac{Q}{g}=\frac{0.2}{980}$

共振时， $p=\omega=k=\sqrt{470}\approx21.7\ 1/s$。

则临界转速为 $n^*=\frac{30}{\pi}\omega\approx207$ r/min。

（2）这是无阻尼的强迫振动，其稳定振动的振幅为

$$B=\frac{h}{|k^2-p^2|} \qquad (1)$$

这里，　$h=\frac{H}{M}=\frac{Q}{P}e\omega^2$，

$$\omega=\frac{n\pi}{30},\qquad k^2=470\ 1/s^2,$$

将这些关系和已知数据代入(1)式即得，

$$B\approx0.00084\ cm。$$

421　蒸汽机的示功计由圆筒A作成，活塞B由弹簧D撑住，并能在圆筒中活动，活塞与杆BC相连，在杆上连划针C。设蒸汽对活塞的压力依下式变化：　$p=4+3\sin\frac{2\pi}{T}t$，其中p以kg/cm^2计，而T则为轴每转一周所需的秒数。设轴每秒转3周，试根据下面的数据：示功计的活塞的面积 $\sigma=4cm^2$；示功计活动部分重量Q=1 kg；弹簧每压短 1 cm需力3kg；求划针C所作受迫振动的振幅。

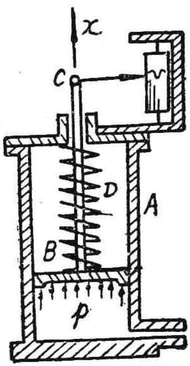


图421

解　由于划针C与活塞固连，所以划针的运动，就是活塞的运动。而活塞和弹簧构成一标准的质量——弹簧系统。取静平衡位置为坐标原点，x轴铅垂向上。以活塞为研究对象，据$\Sigma F_x=m\ddot{x}$得活塞的运动微分方程为，

$$\sigma\left(4+3\sin\frac{2\pi}{T}t\right)-Q-c(-\delta_{st}+x)=\frac{Q}{g}\ddot{x}$$

其中，$\delta_{st}=-\frac{4\sigma}{c}+\frac{Q}{c}$

于是方程化简为，　$\ddot{x}+\frac{gc}{Q}x=\frac{3\sigma g}{Q}\sin\frac{2\pi}{T}t$。

与无阻尼受迫振动的标准形式比较，不难知道其受迫振动的振幅

$$B=\frac{h}{|k^2-p^2|}=\frac{\frac{3\sigma g}{Q}}{\frac{gc}{Q}-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

而　$T=\frac{1}{3}$秒，　$c=3\ kg/cm$，且将已知数据代入上式解得，　$B\approx4.55\ cm$。

（取$g=980\ cm/s^2$）

422　物体M悬挂在弹簧AB上，弹簧的上端作铅垂直线谐振动，其振幅为a，圆频率为p，即$O_1C=a\cdot\sin pt$，式中长度以cm计，t以s计。已知物体M重400g，弹簧在40g力作用下伸长1 cm，$a=2$cm，$p=7\ 1/s$。求受迫振动的规律。

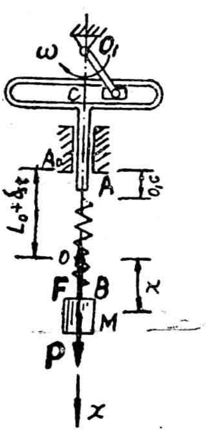


图422

解　设$O_1C=0$时，A端在A_0位置，物体静平衡位置在O。取物体M为研究对象，Ox轴铅垂向下。给M物体以坐标轴正向的任意位置，如图所示，作其受力图，其中F是弹簧的拉力。

设弹簧原长为L_0，　$\delta_{st}=\frac{P}{c}$，（P为物重，c为刚性系数）。则据

$\Sigma F_x=m\ddot{x}$有此物M的运动微分方程式，

$$P-F=P-c\{[(L_0+\delta_{st})-O_1C]+x-L_0\}=m\ddot{x}$$

由于 $O_1C=a\cdot\sin pt$ 则上式变为，

$$m\ddot{x}+cx=ca\cdot\sin pt,$$

标准化为， $\ddot{x}+k^2x=h\sin pt,$

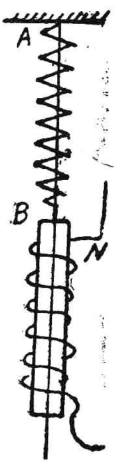
其中， $k^2=\frac{gc}{P}$， $h=\frac{gca}{P}$ 。

据振动理论，这种无阻尼受迫振动在稳定振动时，振动方程为 $x=B\sin pt$。 (1)

其中， $B=\frac{h}{|k^2-p^2|}$

据已知，$c=0.04$ kg/cm，$p=7$ 1/s，$P=0.4$ kg，$a=2$cm，且取$g=980$ cm/s²，代入(1)式得物体M受迫振动的规律为， $x=4\sin 7t$ (cm)。

423 弹簧的刚性系数$c=20$ g/cm，其上悬一重100g的磁棒。磁棒下端穿过一线圈，线圈内通过$i=20\sin 8\pi t$的电流，式中i以安培计。电流自时间$t=0$开始流通，并将磁棒吸进线圈中；在此以前，磁棒在弹簧上保持不动。已知磁棒和线圈互相间的吸引力为 $F=16\pi i$，式中F以达因计。求磁棒的受迫振动。



解 这是标准的无阻尼受迫振动，其解为， $x=B\sin pt,$ (1)

其中， $B=\frac{h}{|k^2-p^2|}$， $h=\frac{gH}{P}$

而干扰力 $F=H\sin pt,$

这里，$F=16\pi i=320\pi\sin 8\pi t$(达因)

由于 1达因$=\frac{1}{9.81\times10^5}$kg，且取$g=981$ cm/s²

则有 $h=\frac{gH}{P}=\frac{981}{0.1}\times\frac{320\pi}{9.81\times10^5}$

$=3.2\pi(\text{cm/s}^2)$

而 $k^2=\frac{gc}{P}=196.2\ 1/s^2$

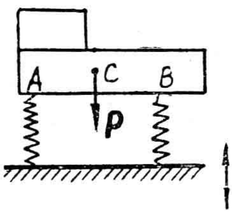
$$p^2=(8\pi)^2=631.5\ 1/s^2$$

则 $B=0.023$ cm。

将这些值代入(1)式得磁棒的受迫振动方程为，

$$x=0.023\sin 8\pi t\quad (cm)。$$

424 有一精密仪器在使用时要避免地板振动的干扰，为此，在AB两端下边安装8个弹簧（每边四个并联而成），AB两点到重心C的距离相等。已知：地板振动规律为$y_1=0.1\sin\pi t$；仪器重800 kg；容许振动的振幅为0.01 cm。求每个弹簧应有的刚性系数。



424

解 这是被动隔振，若以平衡位置为原点O，Oy轴铅垂向上，向y轴正向给仪器以任意位置，据$\Sigma F_i=m\ddot{x}$有仪器的运动微分方程式，

$$m\ddot{x}=-c(y-y_1)$$

其中，$y_1=0.1\sin\pi t$
$=a\cdot\sin pt$，

于是 $\ddot{x}+k^2x=ak^2\sin pt$。

仪器受迫振动的振幅 $B=\frac{ak^2}{|k^2-p^2|}$ (1)

其中， $k^2=\frac{gc}{P}=\frac{980c}{800}=1.225c\ 1/s^2$，

$p^2=\pi^2\approx 9.87\ 1/s^2$，

$a=0.1$ cm，

$B=0.01$ cm。

代入(1)式解得　$c \approx 0.73\ \mathrm{kg/cm}$

〔注意，解(1)式时应取 $p>k$，才有隔振效果。〕

由于结构使8个弹簧并联，则每个弹簧的刚性系数应为，

$c_1 = c/8 \approx 0.091\ \mathrm{kg/cm}$。

425 图示加速度计安装在蒸汽机的十字头上，记录在卷筒上的振幅等于0.7 cm。设弹簧的刚性系数 $c=1.2\ \mathrm{kg/cm}$，其上悬挂的重物 $P=0.1\ \mathrm{kg}$。求十字头最大的加速度。

提示：十字头沿铅垂方向作简谐运动。

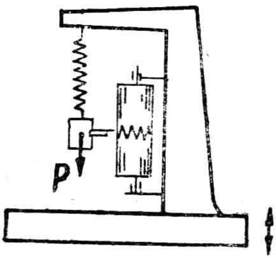


图425

解　设十字头沿铅垂方向的运动方程为 $x_1 = a\sin pt$，

这也是重物悬挂弹簧的端点的运动。这样该重物的运动与前两题的情况类似，若以其静平衡位置为坐标原点，x 轴铅垂向下，则其运动微分方程式为

$$m\ddot{x} = -c(x - x_1)$$

或　$$\ddot{x} + k^2 x = ak^2 \sin pt。$$

其稳定的受迫振动方程为

$$x = \frac{ak^2}{|k^2 - p^2|}\sin pt \qquad 其中 \quad k^2 = \frac{gc}{P}。$$

这里设　$k \gg p$，则　$$x = \frac{ak^2}{k^2 - p^2}\sin pt$$

由于卷筒上记录的振幅，是悬挂重物和卷筒的相对运动，而卷筒的运动就是十字头的运动，所以，

$$x_r = x - x_1 = \frac{ap^2}{k^2 - p^2}\sin pt$$