高中课程辅导

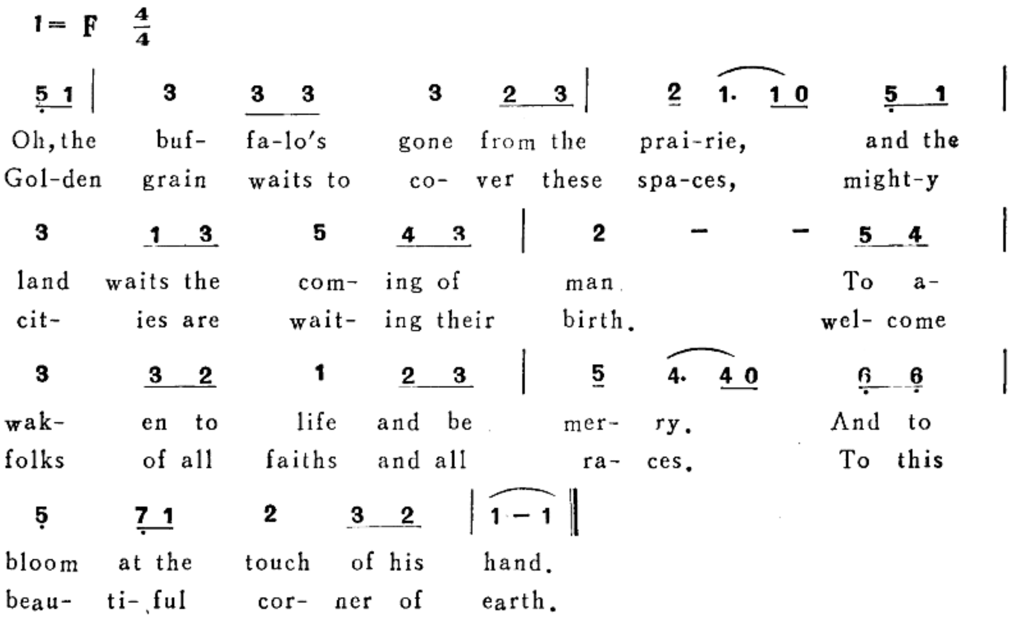
天 津 人 民 出 版 社

4

GAOZHONGKECHENGFUDAO

Red River Valley

(Canadian folk song)



高中课程辅导 第四辑

编辑出版 天津人民出版社 印 刷 沧州地区印刷厂
（天津市赤峰道124号） 发 行 天津市新华书店
统一书号：7072·1222 定价：0.26 元
一九八一年五月

高中课程辅导

第四辑

目录

数学

怎样攻破看图画图关

姚宗琪

在初学立体几何时，首先遇到的一个困难就是看不懂空间图形和画不准空间图形．这个问题若不解决，会直接影响后面的学习．为此，在这里仅就“看”和“画”空间图形的问题，谈几点意见．希望能对同学们的学习有所帮助，攻破这一难关．

空间和平面　作图有区别

平面几何研究的对象是平面图形，立体几何研究的对象是空间图形．空间图形和平面图形既有密切的联系，又有本质的区别．在学习过程中，首先要明确空间图形和平面图形在作图规律方面的区别．

一、虚实线的规则

画平面几何图形时，原题中已有的线都画为实线，添加的辅助线通常都画为虚线；而画立体几何图形时，无论是原题中已有的线，还是添加的辅助线，凡是被前面的平面遮住的部分，都要画成虚线或者干脆不画出来，其余的线都画成实线．如图1甲中表示的平面图形是有一条公共边的两个平行四边形；图1乙、丙表示都是空间图形．由于虚实线的部位不同，两个平面相交的位置也各不相同．在看图时，要根据这个规则分析空间元素之间的相关位置；画图时，也要根据这个规则检查所画的图形是否正确．

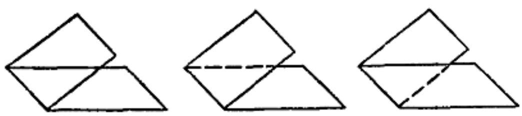


图 1

二、几何元素之间位置关系画法的区别

在平面图形中，各元素之间的位置关系是能如实地反映出来的；在空间图形中，除正垂平面（与水平视线垂直的平面）内各元素之间的位置关系能准确地反映实际情况，以及两条平行直线作图后仍能维持平行外，在其他情况下，如两条直线互相垂直等位置关系一般是不能如实地表示出来的．如图2正方体 AC_1 中，D_1A_1 和 A_1B_1、B_1C_1 和 BB_1、BC 和 DC、CC_1 和 AD 等虽然都是互相垂直的关系，但是它们都不象平面图形那样直观．因此在看空间图形，特别是分析各元素之间的位置关系时，应该从空间范围去理解和想象．

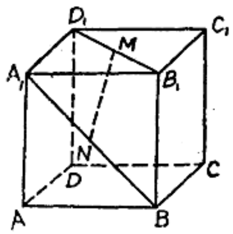


图 2

三、几何元素之间数量关系画法的区别

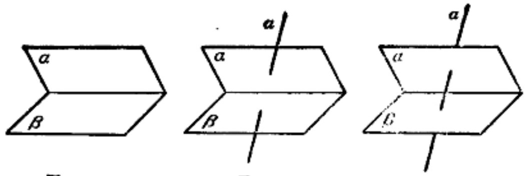
在平面图形中，各元素之间的数量关系是能准确地表示出来的．如等边三角形的三条边相等、三个内角都等于60°，可以通过度量直接验证；而在空间图形中，除正垂平面内各元素之间的数量关系能反映真实情况外，其他情况下，一般是不能准确地表示它们的数量关系的．如图2中，$\triangle AB_1C$ 是等边三角形，$AB_1 = B_1C = CA$，$\angle AB_1C = \angle B_1CA = \angle CAB_1 = 60°$，但是在这里我们就不能用度量工具直接验证它们是否相等，这同样需要我们在空间范围内去理解和想象．

规律常探讨　经验要总结

为了提高看图和画图的能力，应该经常探讨、研究作图的规律和技巧．下面介绍几个常用的方法．

一、添加辅助元素

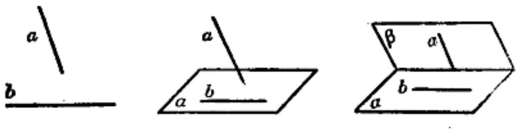
有些空间图形不能明显、形象地表示空间元素的位置关系，这时可以用添加辅助线或辅助平面的方法来加以衬托．如图3甲不能准确地表示平面α与β是什么位置关系，当添加了辅助直线a后，平面α与β的位置则明



甲　　乙　　丙

图 3

显地区别开来了．（图3乙、丙）再如用图4甲的画法不能明确表示异面直线a、b的空间位置，而在图4乙、丙中，用辅助平面α、β加以衬托，异面直线a、b的空间位置就明显地表示出来了．



甲　　乙　　丙

图 4

二、画相交平面的一般步骤

在立体几何中，两个或更多个平面相交的图形是经常要画的．怎样才能迅速、正确地把它们画出来呢？现在以两个平面相交的情况为例，说明画图的一般步骤如图5：（1）先画出两条相交的线段a、b，以确定两个平面的位置；（2）由a、b的交点向一方画出表示两个平面交线的线段c，以确定整个图形的位置；（3）由a、b的各端点作与c平行且相等的线段；（4）画完表示各平面的平行四边形，画好虚实线，完成全图．

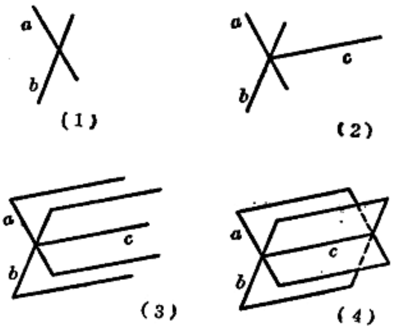


图 5

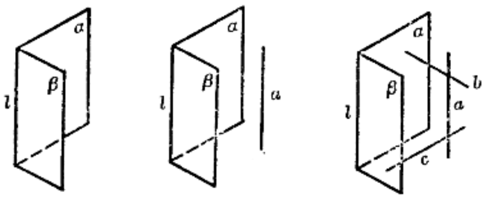
三、根据题意画图的一般方法

解立体几何题，首先要弄清题意，分清条件和结论中包括哪些元素，它们之间是什么位置关系和数量关系．其次，在着手画图时应注意两点：(1) 题目中有不同类元素时，一般先画范围大的元素，再画范围小的元素．如题中有直线和平面，一般先画平面，后画直线．(2) 对同类元素，一般先画能直观地反映实际关系的元素，再画其他元素．如题中有直线和直线平行及垂直关系，一般先画平行，后画垂直．现在用下面的例题，说明画图的一般方法．

【例题】两个平面分别垂直于两条异面直线中的一条，则它们的交线平行于这两条异面直线的公垂线．

（1）分析：在题目的条件和结论中包括四条直线和两个平面．四条直线中有两条是异面直线，第三条是它们的公垂线，第四条是两个平面的交线，它与第三条直线平行，而那两个相交平面又分别垂直于两条异面直线中的一条．

（2）作图：先画两个相交平面α、β，其交线为l（图6甲）；然后在平面α、β外画直线a平行于l（图6乙）；最后过直线a上不同的两点分别作平面α、β的垂线b、c（图6丙）．这样，完成了全图（图中a是异面直线b、c的公垂线）．



甲　　乙　　丙

图 6

一勤补百拙　多练是秘诀

攻破看图和画图难关，只掌握一些规则和方法，还不够．还要充分利用环境实物，如教室的屋角、天花板与墙壁的交线、电灯的吊线，以及铅笔、书本等，帮助自己树立空间观念．同时还要做到"三勤三多"：一是眼勤多看、多观察；二是手勤多画，多练习；三是脑勤多思、多想象．通过这"三勤三多"，持之以恒，刻苦训练，就能逐步地培养和提高自己的空间想象能力，从而逐步地完成立体几何课的学习任务．

正方体中的异面线段*①

胡家齐　曹福海

正方体是我们最常见、最简单、最规则的几何体，立体几何的许多概念与定理都可以在其中找到具体的说明．熟练地掌握正方体内各种点、线、面的位置关系以及度量性质，对于研究或画出其他一些复杂的立体图形是大有好处的．本文仅重点讨论正方体中的几种异面线段．

正方体中所包括的线段有十二条棱、十二条面的对角线和四条体的对角线．这些线段中有很多成异面直线关系，下面按不同特点分类讨论．

一、棱和棱的异面问题

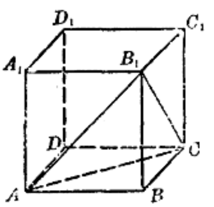


图 1

正方体中此类问题比较简单．例如，对于其中任一条棱 BB_1（图1）除与它相交或平行的棱（共面）外，与它成异面直线关系者只有四条，即 AD、DC、A_1D_1、D_1C_1．不难证明，上述每对成异面关系的棱都互相垂直，并且以某一条棱为其公垂线．因此，其间的距离就等于棱长，例如 $BB_1 \perp AD$，它们之间的公垂线为 AB．

二、棱与面对角线*②的异面问题

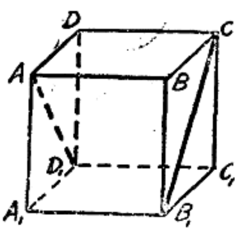


图 2

对于正方体的任一条面对角线，如 B_1C（图2），显然它不与任一条棱平行．故除去与它相交的棱（共面）之外，与它成异面关系的棱共有六条，即 AD、A_1D_1、AA_1、DD_1、AB、D_1C_1．由于正方体共有12条面对角线，故此类异面线段共有72对．

与 B_1C 异面的六条棱可分成两类：

1．平行于 B_1C 所在的侧面者：有 AD、A_1D_1、AA_1、DD_1．

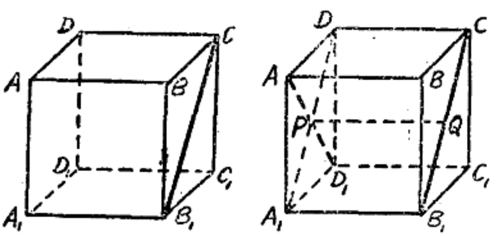
2．垂直于 B_1C 所在的侧面者：有 AB、D_1C_1．

容易证明，前一类异面线段所成的角均为45°，距离等于正方体的棱长；后一类异面线段均互相垂直，而距离则等于棱长的 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍．

三、面对角线之间的异面问题

1．相对二面的异面对角线

由于正方体的各面都是全等的正方形，并且各相对面之间的位置关系都相同，从而任意二相对面中成异面直线关系的对角线之间的位置情况也都相同，因此都可以归结为下面一种情形（图3（1））：例如异面线段 AD_1 与 B_1C．



（1）　　图 3　　（2）

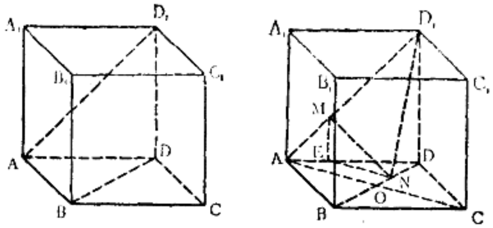
连结 A_1D 交 AD_1 于 P，再取 B_1C 的中点 Q（即对角线 B_1C 与 BC_1 的交点），连结 PQ．如图3（2），不难证明 $AD_1 \perp B_1C$，公垂线为 PQ，所以可得 AD_1 与 B_1C 的距离等于棱长．

2．相邻二面的异面对角线

在正方体中相邻二面的对角线，例如图

*①异面线段是指此两线段所在的直线是异面直线．

*②我们把正方体任一侧面（正方形）的对角线称为面对角线．



（1）　　图 4　　（2）

4（1）中的AD_1与BD. 因为在各相邻面中象这样关系的对角线还有很多，它们互相之间的位置情况都相同. 所以我们只研究其中一对就可以了.

首先求这对异面直线之间的距离，因为这两条异面直线不同于前面的一些情况，可以很简单地找出（或连出）它们之间的公垂线. 这就需要用分析的方法来解决. 先假设线段MN（见图4（2））就是所连异面直线AD_1、BD之间的公垂线. 所以可得$MN\perp AD_1$、$MN\perp BD$，为了找出MN与正方体中其它已知线段之间的关系，还需要连出下面一些辅助线段. 在A_1D侧面内作$ME\perp AD$连EN和D_1N.

∵$ME\perp AD$, ∴$ME\parallel D_1D$, ∴$ME\perp$平面AC. ∴$\triangle MAE\backsim\triangle D_1AD$都是等腰直角三角形，并且$EN$是斜线$MN$在平面$AC$内的射影. 由三垂线逆定理可得$EN\perp BD$. ∴$EN\parallel$对角线$AC$，由此可得$\triangle END\backsim\triangle AOD$也同为等腰直角三角形. 并且$\triangle MD_1N$与$\triangle D_1ND$也都是直角三角形.

若已知正方体棱长为a，并且设$ME=x$则$AE=ME=x$，$ED=a-x$.

$MD_1=AD_1-AM=\sqrt{2}\,a-\sqrt{2}\,x$.

在直角$\triangle D_1ND$中得：

$$D_1N^2=D_1D^2+DN^2,$$

在直角$\triangle MND_1$中得：

$$MN^2=D_1N^2-MD_1^2,$$

∴ $MN^2=D_1D^2+DN^2-MD_1^2$.

在直角$\triangle MEN$中得：

$$MN^2=ME^2+EN^2,$$

∴ $D_1D^2+DN^2-MD_1^2=ME^2+EN^2$.

∵$DN=EN$, ∴ $D_1D^2-MD_1^2=ME^2$,

∴ $a^2-(\sqrt{2}\,a-\sqrt{2}\,x)^2=x^2$.

化简得：$3x^2-4ax+a^2=0$，

∴ $x_1=a, x_2=\frac{1}{3}a$.

∵ 若$x=a$，则M与D_1重合，此时MN与D_1N及D_1D重合.

∴ MN不可能与AD_1及BD都垂直.

∴ $x_1=a$舍去.

∵ $MN^2=ME^2+EN^2$,　$EN=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$ED=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-x)$,

∴ $MN^2=x^2+\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(a-x)\right]^2$,

以$x=\frac{1}{3}a$代入，得$MN=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

∴相邻面中成异面直线关系的对角线AD_1和BD之间距离等于$\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

由以上分析的结果，可得这类面对角线间距离的连接方法如下：在相邻面中成异面直线关系的对角线都与同一条棱相交. 例如上面分析中的对角线AD_1、BD都与同一条棱AD分别交于A及D. 从这两个交点开始，各在两条对角上截等于对角线长$\frac{1}{3}$的线段AM和DN.（见图5）连MN就得到这两条对角线间的公垂线. 我们可以证明如下：

设已知$AM=\frac{1}{3}AD_1$、$DN=\frac{1}{3}BD$,（见图5）

在侧面A_1D内作$ME\parallel D_1D$，连接EN. 设棱长$D_1D=a$，则$BD=AD_1=\sqrt{2}\,a$.

∵ $ME\parallel D_1D$,　$\frac{AM}{AD_1}=\frac{1}{3}$,

∴ $\frac{AM}{AD_1}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{3}$.

∵ $DN=\frac{1}{3}DB$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}a$,

而OD

$=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

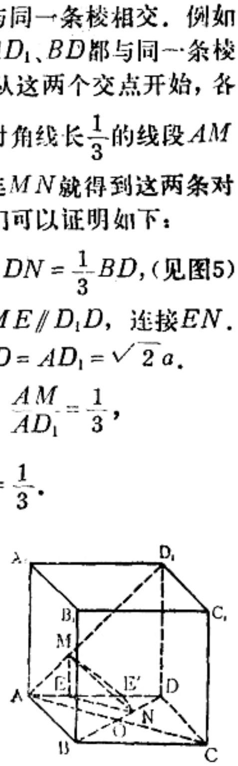


图 5

$\therefore ON=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{2}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{6}a$,

$\therefore \frac{ON}{OD}=\frac{1}{3}$, $\therefore \frac{ON}{OD}=\frac{AE}{AD}$,

$\therefore EN\parallel AO$. $\therefore EN\perp BD$, $\because ME\parallel D_1D$,
$\therefore ME\perp$平面AC,
根据三垂线定理可得$MN\perp BD$.

同法若在平面AC内作$NE'\parallel CD$，连ME'，可证得$MN\perp AD_1$，$\therefore MN$为AD_1及BD间的公垂线，并可求得 $MN=\frac{\sqrt{2}}{3}a$.

关于求相邻二面的异面对角线间所成角则比较简单，例如AD_1与BD所成的角，（见图6）可连接BC_1及DC_1. 不难证明$BC_1\parallel AD_1$，$\therefore \angle C_1BD$就是异面直线AD_1与BD所成的角. $\because \triangle C_1BD$为等边三角形，$\therefore \angle C_1BD=60°$，即异面直线$AD_1$与$BD$所成角等于60°.

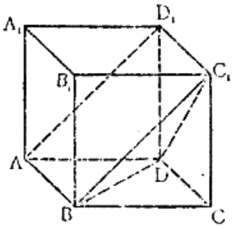


图 6

四、棱与体对角线的异面问题

同样，我们只须讨论某一条确定的体对角线与某些棱异面的情形就行了. 从图7不难看出，正方体中，除掉通过某一体对角线的两个端点的那六条棱之外，其余六条棱都与它异面. 而这六对异面线段所成的角和它们的公垂线以及距离都可以用同样的方法导出.

以AA_1与DB_1为例(图7).

(1) AA_1与DB_1所成的角

$\because AA_1\parallel DD_1$，$\therefore \angle D_1DB_1$就是所求之角. 连结$D_1B_1$，在$rt\triangle DD_1B_1$中，设$DD_1=a$，

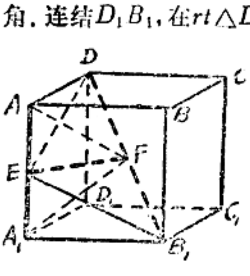


图 7

$DB_1=\sqrt{3}a$.

$\therefore \cos\angle D_1DB_1=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

同理可知，DB_1和任一成异面关系的棱所成的角的余弦都等于$\frac{\sqrt{3}}{3}$，查表可知$\angle D_1DB_1$约等于54°44'.

(2) AA_1与DB_1的公垂线与距离

分别取AA_1与DB_1的中点E、F，则可证直线EF即为它们的公垂线.（图7）事实上，分别连结EF、ED、EB_1，显然$ED=EB_1$，而F为DB_1的中点，$\therefore EF\perp DB_1$；再分别连结FA、FA_1，$\because F$为正方体的中心，故$FA=FA_1$，而E为AA_1的中点，$\therefore EF\perp AA_1$.

设正方体棱长为a，从图不难看出

$$ED=EB_1=\frac{\sqrt{5}}{2}a, DB_1=\sqrt{3}a,$$

$\therefore$在$rt\triangle EFB_1$中，可知

$$EF=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

即正方体的任一对角线和与它异面的棱的距离等于面对角线长的一半.

五、体对角线与面对角线的异面问题

正方体中，任一体对角线如DB_1，除去与过D、B_1两点的六条面对角线分别共面外，其余六条面对角线都与它异面. 这类异面线段之间所成的角和距离，也都可用同样的方法算出. 仅以DB_1与BC_1为例说明.

(1) DB_1与BC_1所成的角.(图8)，

分别延长CB、C_1B_1至E、F，使$EB=BC$，$FB_1=B_1C_1$. 则$EB_1\parallel BC_1$. 连结DE，则$\angle DB_1E$即为所求之角.

在$\triangle DEB_1$中，设正方体棱长为a，

$EB_1=\sqrt{2}a$,

$DB_1=\sqrt{3}a$,

$DE=\sqrt{5}a$.

$\therefore EB_1^2+DB_1^2$
$=2a^2+3a^2=5a^2$
$=DE^2$,

$\therefore \angle DB_1E=90°$.

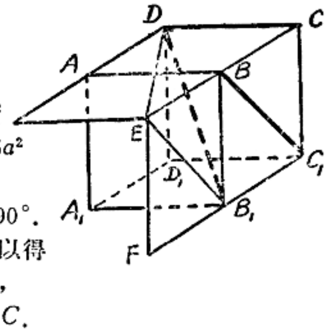


图 8

另法也可以得到同样的结果，(图9)连结B_1C. 由三垂线定理可证

谈谈圆锥曲线的几何性质

冯　清　海

现行全日制十年制学校高中数学课本第二册第六章中，用解析法讲授了椭圆、双曲线和抛物线．分别从它们的定义出发，建立适当的坐标系，推导出标准方程；然后利用标准方程这个有力工具，探讨它们的几何性质．例如对于椭圆，利用方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），研究了它的范围、对称性、顶点、离心率，以后又讲了焦点坐标和准线方程．在所得到的这些性质中，有的是与坐标系的选择无关的，例如长轴的长、短轴的长等等；有的是与坐标系的选择有关的，例如焦点坐标、准线方程等等．

现在分别画出椭圆、双曲线、抛物线的不建立坐标系的图形，并列举出它们本身的几何性质，以供读者研究参考．

椭圆：1．是平面内一个动点到F_1、F_2距离的和等于常数($2a$)的点的轨迹，也是平面内一个动点到F_1和l_1（或F_2和l_2）距离的比等于常数($\frac{c}{a}<1$) 的点的轨迹；

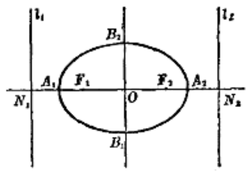


图 1

2．有两个对称轴A_1A_2和B_1B_2，它们的交点O是其对称中心；

3．图 1 中，$|OF_1|=|OF_2|=c$，
$|OA_1|=|OA_2|=a$，

$$|ON_1|=|ON_2|=\frac{a_2}{c},$$

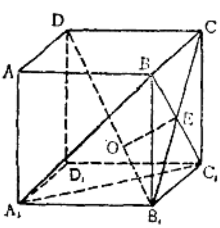


图 9

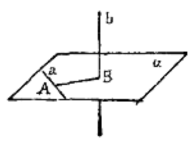


图10

$DB_1\perp BC_1$，$\therefore DB_1$与BC_1所成角为90°．

（2）求DB_1与BC_1的距离．（图 9 ）

把顶点A_1C_1B连成三角形，根据DB_1与$\triangle A_1C_1B$的关系，可求出异面线段DB_1与BC_1间的距离．

这里我们先介绍一种求异面直线间距离的方法如下：（图10）若求异面直线a与b间的距离，可过直线a作一平面α与直线b垂直并交于B点．在平面α内过B作直线$AB\perp$直线a并与a交于A点，不难证明线段AB就是异面直线a与b间的公垂线．

再看图9，因为前面已证明$DB_1\perp BC_1$．同理可证$DB_1\perp BA_1$，$\therefore DB_1\perp\triangle A_1C_1B$所在的平面．若$DB_1$与$\triangle A_1C_1B$交于$O$，则过$O$在$\triangle A_1C_1B$所在平面内作$OE\perp BC_1$，与$BC_1$交于$E$，则$OE$就是$DB_1$与$BC_1$间的公垂线．下面进一步求$OE$的长．设长方体的棱长为$a$，$\because$顶点$B_1$到$A_1$、$C_1$、$B$三点的距离都等于$a$，所以$O$点到$A_1$、$C_1$、$B$三点的距离也相等*，$\therefore O$点为等边三角形$A_1C_1B$的中心，$\because OE\perp BC_1$，$\therefore OE$为等边三角形$A_1C_1B$的边心距，$\because$三角形的边长为$\sqrt{2}a$，$\therefore$可求得边心距$OE=\frac{\sqrt{6}}{6}a$．

* 这是根据：过平面外一点向这个平面作一条垂线和几条斜线，如果这几条斜线长相等则斜线在平面内的射影长也相等．我们把B_1O看为过B_1向平面A_1C_1B作的垂线，B_1A_1、B_1C_1和B_1B为过B_1向平面A_1C_1B作的三条斜线．$\because B_1A_1=B_1C_1=B_1B$，$\therefore$这三条斜线在平面$A_1C_1B$内的射影$A_1O=C_1O=BO$，$\therefore O$为等边$\triangle A_1C_1B$的中心．

$|OB_1| = |OB_2| = b$,

$a^2 = b^2 + c^2$;

4．离心率$e = \dfrac{c}{a}$；

5．椭圆上任一点处的法线平分过这点的两条焦点半径所成的角．

双曲线：1．是平面内一个动点到F_1、F_2距离的差的绝对值等于常数$(2a)$的点的轨迹，也是平面内一个动点到F_1和l_1（或F_2和l_2）距离的比等于常数$\left(\dfrac{c}{a} > 1\right)$的点的轨迹；

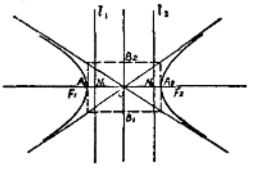


图 2

2．有两条对称轴A_1A_2和B_1B_2，它们的交点O是对称中心；

3．图 2 中，$|ON_1| = |ON_2| = \dfrac{a^2}{c}$,

$|OA_1| = |OA_2| = a$,

$|OF_1| = |OF_2| = c$,

$|OB_1| = |OB_2| = b$,

$c^2 = a^2 + b^2$;

4．离心率 $e = \dfrac{c}{a}$；

5．双曲线上任一点处的切线平分过这点的两条焦点半径所成的角．

抛物线：1．是平面内一个动点到F和l距离相等的点的轨迹；

2．过F且垂直于l的直线是它的对称轴；

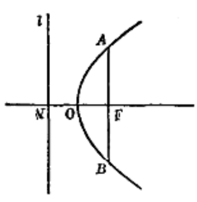


图 3

3．图 3 中，AB是过F且平行l的直线，$|NF| = |AF| = |BF| = p$,

$|ON| = |OF| = \dfrac{p}{2}$;

4．离心率$e = 1$；

5．抛物线上任一点处的法线平分过这点的焦点半径和平行于轴的射线（与开口方向一致的）所成的角．

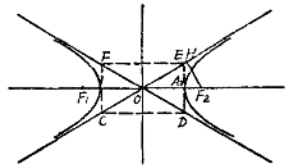


图 4

掌握了圆锥曲线的这些性质，有时可以避免移轴、转轴的复杂计算；有时甚至不必建立坐标系就可以解决问题．请看下面例题。

【例1】 试证：双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离等于虚半轴的长．

证　如图 4，由于对称性只证F_2到渐近线CE的距离$|F_2H| = b$即可．

在直角$\triangle OA_2E$中，$|OA_2| = a$，$|A_2E| = b$，那么

$|OE| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$,

$\therefore \sin\angle EOA = \dfrac{b}{c}$.

又在直角$\triangle OF_2H$中，

$|F_2H| = |OF_2| \sin\angle F_2OH = c \cdot \dfrac{b}{c} = b$.

$\therefore$焦点到渐近线的距离等于虚半轴的长．

【例2】 求过点$M(5, -1)$，焦点是$F_1(2,3)$和$F_2(-1,7)$的椭圆的长轴的长、短轴的长、离心率和准线方程．

解　$|MF_1| = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$；

$|MF_2| = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-7)^2} = 10$.

$\therefore\quad 2a = 5 + 10 = 15, a = \dfrac{15}{2}$.

$2c = \sqrt{(2+1)^2 + (3-7)^2} = 5$,

$\therefore\quad c = \dfrac{5}{2}$.

又$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{225}{4} - \dfrac{25}{4}}$

$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

∴长轴的长等于15，短轴的长等于$10\sqrt{2}$，

离心率 $e=\frac{5}{2}\Big/\frac{15}{2}=\frac{1}{3}$.

又F_1F_2的斜率 $k=\frac{7-3}{-1-2}=-\frac{4}{3}$，

∴ 准线的斜率是$\frac{3}{4}$，

准线的方程可设为

$$y=\frac{3}{4}x+m,$$

化简后，得 $3x-4y+4m=0$.

∵ 中心的坐标可由中点坐标公式求出为$(\frac{1}{2}, 5)$，中心到准线的距离等于

$\frac{a^2}{c}=\frac{225}{4}\Big/\frac{5}{2}=\frac{45}{2}$，所以

$$\frac{\left|3\times\frac{1}{2}-4\times5+4m\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{45}{2},$$

$$\left|\frac{3}{2}-20+4m\right|=\frac{45}{2}\times5,$$

$$4m-\frac{37}{2}=\frac{225}{2} \quad 或 \quad 4m-\frac{37}{2}=-\frac{225}{2},$$

$$m=\frac{131}{4} \quad 或 \quad m=-\frac{94}{4}$$

∴ 准线方程是$3x-4y+131=0$与$3x-4y-94=0$.

【例3】 已知抛物线的顶点和焦点分别是$O'(-1,2)$和$F(0,3)$，求它的方程.

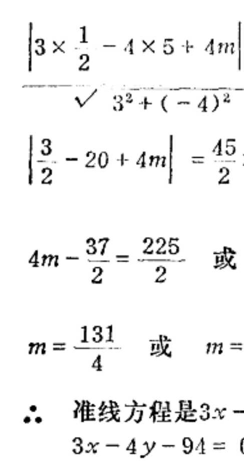


图5

解 过F作准线l的垂线，垂足是$N(a,b)$，那么直线NF是抛物线的轴. 因为O'是NF的中点，所以

$$\begin{cases}\frac{a+0}{2}=-1\\ \frac{b+3}{2}=2.\end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases}a=-2\\ b=1,\end{cases}$ ∴N的坐标为$(-2, 1)$. 又轴的斜率是$\frac{3-2}{0+1}=1$，

∴l的斜率是-1，l的方程是

$$y-1=-(x+2),$$

化简，得 $x+y+1=0$.

在抛物线上任取一点$M(x,y)$，由抛物线的定义可得

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=\frac{|x+y+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

化简，得$x^2-2xy+y^2-2x-14y+17=0$.

有的题如果用解析法来作比较复杂，但是利用椭圆的切线和法线的性质可以用平面几何方法来加以证明则比较简单.

【例4】 过椭圆外一点P向椭圆引切线PA、PB，A、B是切点，F_2是椭圆的一个焦点，连接F_2A、F_2B和F_2P，求证F_2P平分$\angle AF_2B$.

证 如图6，设椭圆的另一个焦点是F_1. 连接F_1A并延长到C使$|AC|=|AF_2|$，连接F_2C交PA的延长线于E，再连PC. ∵点A处的法线平分$\angle F_1AF_2$，∴切线PA平分$\angle F_2AC$. 又∵$\triangle F_2AC$是等腰三角形，∴PAE垂直平分F_2C，∴$|PF_2|=|PC|$. 又∵$\angle PF_2E=\angle PCE$，$\angle AF_2E=\angle ACE$，

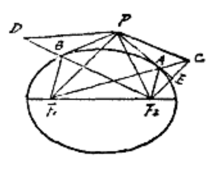


图6

∴$\angle PF_2A=\angle PCA$.

同样地延长F_2B到D使$|BD|=|BF_1|$，连接PD和PF_1，同理可证$|PD|=|PF_1|$.

在$\triangle PDF_2$和$\triangle PCF_1$中，

$|PD|=|PF_1|$，$|PF_2|=|PC|$，

$|F_2D|=|F_2B|+|BF_1|=2a$，

$|F_1C|=|F_1A|+|AF_2|=2a$，

∴$\triangle PDF_2\cong\triangle PCF_1$.

$\therefore \angle PF_2D=\angle PCF_1=\angle PF_2A$,

$\therefore F_2P$平分$\angle AF_2B$.

最后再谈谈圆锥曲线的离心率．椭圆中$\dfrac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$，由$e$的值可以确定两轴长度的比，由此就可以确定它的形状．双曲线中$\dfrac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，两条渐近线的夹角等于

$2\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$，由$e$值可以确定$\dfrac{b}{a}$，因而可以确定两条渐近线的夹角，于是由$e$可确定圆锥曲线的形状．

抛物线的离心率恒为1．这说明抛物线的形状都是一样的．

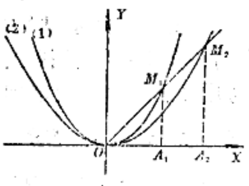


图 7

因为任何两条抛物线总可以放置成图7中的样子，即使顶点重合、轴重合、开口方向相同．

设抛物线(1)和(2)的方程分别为$x^2=2p_1y$和$x^2=2p_2y$．

过O任意作一射线交抛物线(1)和(2)分别于$M_1(x_1, y_1)$和$M_2(x_2, y_2)$，那么

$$\begin{cases} x_1^2=2p_1y_1 \\ x_2^2=2p_2y_2 \end{cases} \qquad (\text{I})$$

又$\because$ $$\frac{|OM_1|}{|OM_2|}=\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2} \qquad (\text{II})$$

由(Ⅱ)得 $$\frac{x_1^2}{x_2^2}=\frac{y_1^2}{y_2^2} \qquad (\text{III})$$

把(Ⅰ)代入(Ⅲ)，得 $$\frac{2p_1y_1}{2p_2y_2}=\frac{y_1^2}{y_2^2}$$

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

由(Ⅱ)，得 $$\frac{|OM_1|}{|OM_2|}=\frac{p_1}{p_2},$$

$$\frac{|OM_2|}{|OM_1|}=\frac{p_2}{p_1}$$

如此把抛物线(1)放大$\dfrac{p_2}{p_1}$倍（如$\dfrac{p_2}{p_1}<1$，则是缩小）作位似变换，即可得抛物线(2)．所以它们的形状是一样的．

但是直观地来看，它们的形状似乎不相同，抛物线(1)的开口比抛物线(2)的开口小．这是怎么回事呢？因为抛物线是无界曲线．图7中画出来的都只是它们的一段，并且是不相应的一段．(1)焦点与顶点间的距离小，(2)焦点与顶点距离大，如果分别作出它们的通径并且都只画被通径所截得的一段如图8，看起来形状就一样了．

“凡抛物线皆相似”这一性质是很重要的．利用它可以设计画抛物线的仪器．如果在木板上用描点法画好一条尽可能准确的抛物线（$y=x^2$），然后与一个放缩尺结合起来，就可以用来画P为任何值抛物线．

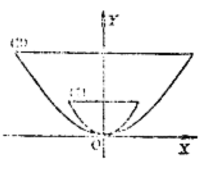


图 8

（上接36页）怎样理解生命是物质的和具有生命所特有的基本特征？如果以上这些问题你能解答得很圆满，那么证明你已经能灵活运用一些生物学基础知识解答问题了。

此外，在生物学的学习中，识图、画图的技能是很重要的。要注意用图解来帮助记忆、例如细胞分裂的过程，细胞器的结构和功能，要会画出示意图并用文字解释。联系实验、实习的技能也是很重要的，如在显微镜下观察洋葱根尖制成的装片，你能否识别细胞有丝分裂各个时期的图象呢？通过观察玉米杂种后代的粒色，如何理解分离规律的实质等等。联系图解和实验、实习记住的知识比较牢固，有助于灵活运用。

以上不过是列举几个重要方面，帮助读者在复习时注意前后重要基础知识的联系，使获得的知识系统而全面。具体复习方法还得通过实践才能适合不同人的条件和情况，不断改进与提高。在总复习中能把在高中所学生物知识全面地来一次“大检阅”，打好坚实的基础，从思想上热爱和重视这门课程，对将来的进一步深造或走上工作岗位，都是很有用处的。

用代数和三角知识解几何问题的一例

谈家栋

在直角梯形$ABCD$中，$\angle A=\angle D=90°$，$AB=AD=a$，$DC=2a$，$DS\perp$平面$ABCD$，$DS=a$，

（1）证明：棱锥$S-ABCD$的四个侧面都是直角三角形；

（2）在棱SA上取一点M，使$SM=x$，平面CDM与棱SB相交于点P，求证：四边形$DCPM$是直角梯形；

（3）试用a和x的函数式表示这个梯形的面积；

（4）试问当x为何值时，CM的长最短，其最短长度等于多少？

分析：（1）$\because SD\perp$平面$ABCD$，$\therefore\triangle SDA$和$\triangle SDC$显然是直角三角形（图1）．

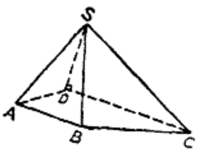


图 1

证明三角形是直角三角形，最直接的方法是证明其中有一内角是直角，在立体几何中除用直线与直线，直线与平面的垂直、平行关系判定外，常用三垂线定理；或者三边满足勾股定理逆定理条件也能证明是直角三角形．用上述两法皆可证明$\triangle SAB$和$\triangle SBC$是直角三角形．

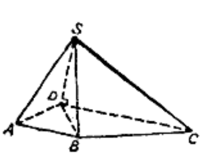


图 2

$\because\ \angle DAB=90°$，$\therefore\ DA\perp AB$，故$SA\perp AB$（三垂线定理），$\therefore\triangle SAB$是直角三角形；或者连BD（如图2），计算出$SB=\sqrt{3}\,a$，$SA=\sqrt{2}\,a$，又$AB=a$．$\therefore\ SB^2=SA^2+AB^2$，则$\triangle SAB$是直角三角形．

证明$\triangle SBC$为直角三角形稍繁一点．考虑$\angle SCB$不会是直角，$\because\ \angle BCD$是锐角，

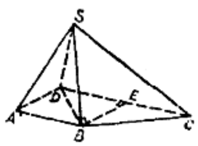


图 3

$\therefore\ SC$不能垂直BC．再考虑$\angle SBC$，SB是否垂直BC，要看BD是否垂直BC．作$BE\perp CD$（图3）则$ABED$是矩形，又$\because\ AB=AD=a$，$\therefore ABED$是正方形，故$BE=DE=CE$．$\therefore BD\perp BC$（为什么？）．由三垂线定理$SB\perp BC$，故$\triangle SBC$是直角三角形；（已找到直角，$\angle BSC$就不用考虑了．）用勾股定理也可证明，容易计算$SC=\sqrt{5}\,a$，$SB=\sqrt{3}\,a$，$\because BE$是CD的中垂线，$\therefore BC=BD=\sqrt{2}\,a$，故$SC^2=SB^2+BC^2$，$\therefore\triangle SBC$是直角三角形．

立体几何问题作出正确的立体图很重要，但立体图因投影关系，直角可能画成钝角（如$\angle SDA$、$\angle ADC$）；也可能画成锐角（如$\angle SAB$、$\angle DAB$），所以训练自己的立体感非常重要．

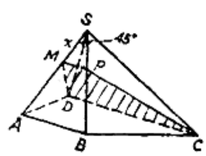


图 4

（2）如图4，要证$DCPM$是直角梯形，$\because$已有$CD\perp$平面SDA，$\therefore CD\perp DM$，只要证明$MP/\!/CD$即可．MP是平面$DCPM$和平面SAB的交线，$\therefore$只需证明$CD/\!/$平面SAB，而这是显然的，$\because\ CD/\!/AB$，于是$MP/\!/CD$得证．$\therefore$四边形$DCPM$是直角梯形．

（3）要用a和x的函数式表示梯形的面积，必须先求二底CD、MP及高DM的表达式．（图4）

$CD=2a$，（已知）

MP可通过$\triangle SMP\backsim\triangle SAB$，（为什

么?)得$\frac{MP}{AB}=\frac{SM}{SA}$，

$\therefore\quad MP=\frac{AB\cdot SM}{SA}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

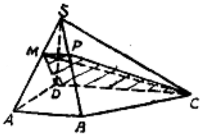


图 5

DM在$\triangle DSM$内考虑：$SD=a$，$SM=x$，$\angle DSM=45°$，(为什么?)∴可用余弦定理

$$DM^2=SM^2+SD^2-2SM\cdot SD\cdot\cos\angle DSM$$
$$=x^2+a^2-2ax\cos45°$$
$$=x^2-\sqrt{2}ax+a^2.$$

$$\therefore\quad S_{梯形DCPM}=\frac{1}{2}(MP+DC)MD$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{2}x+4a)\sqrt{x^2-\sqrt{2}ax+a^2}.$$

(4) 问x何值时CM最短，属极值问题．首先找出CM关于x的表达式．

CM在$\triangle CDM$内，也在$\triangle CPM$内（图5)．∵$\triangle CDM$是直角三角形，$CD=2a$，DM已求出，∴求CM必然在$\triangle CDM$中考虑：

$$CM^2=CD^2+DM^2$$
$$=4a^2+x^2-\sqrt{2}ax+a^2$$
$$=x^2-\sqrt{2}ax+5a^2. \qquad ④$$

CM^2最小，则CM也最短．④式是关于x的二次函数，二次项系数为正，有最小值．

$$\because\quad x^2-\sqrt{2}ax+5a^2$$
$$=(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2+\frac{9}{2}a^2$$

∴　当$x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$时，CM^2有最小值．即CM最短．最短值$CM=\sqrt{\frac{9}{2}a^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}a$.

(不用配方法，直接用二次函数求极值公式也可以．)

从上例中可以看出，对于较综合或者说困难些的题目，用“分析法”执果索因，一步一步逻辑推理，对每一个需求的结论和关系，要用已学的各种概念和方法去试求，相合了，就进一步向已知探求．这样一定可以找出解题方向．探索解题途径时切忌胡思乱想，无目的地拿定理、公式乱试，那样非但找不到解题途径，还容易丧失信心；再者，对于有几个小题的综合题，一定依顺序求解，因为后面的小题常要用到前面小题的结论，同时前面小题的结论为解后面小题指出了思考方向．

考虑一个问题，一定不能局限在几何、三角、代数、解几等每一分科．高中阶段除要熟记各种概念和定理公式外，更重要的是需归纳一下，每类问题共有哪些方法求解．如极值问题既可用二次函数、不等式等代数方法，还可用正弦、余弦的有界性等三角方法去解决．如果对各类问题你都能归纳一下，那么解综合题就容易较快找到解题途径了．

数学练习题

1. 矩形$ABCD$中$AB=15cm$，$AD=20cm$．$VA\perp$平面$ABCD$，$VA=12cm$．求V到BC、CD、BD的距离．

2. AB是圆O直径，$VA\perp$圆O所在的平面，C是圆O上任一点，求证$VC\perp CB$．

3. H是$\triangle ABC$的垂心，$VH\perp$平面ABC，求证$VA\perp BC$．

4. 在正三棱锥$V-ABC$中，D、E、F、G分别是VA、VB、BC、CA的中点，求证$DEFG$是矩形．

5. 三棱锥的各侧面和底面成等角，求证这棱锥高的垂足到各侧面的距离相等．

6. 在正方体$A_1B_1C_1D_1—ABCD$中，过A_1作对角线AC_1的垂线，垂足是E_1，证明$AE:EC_1=1:2$．

7. 在正方体$A_1B_1C_1D_1$中M、N分别是D_1B_1、A_1B的中点，求MN的长．

8. 有一平面截正方体一角，截面与相邻三个面的交线为EF、FG和GE，求证$\triangle EFG$不可能是直角三角形．

9. 若两个平面相交，那么没有一条直线和这两个平面都垂直．

10. 直线a与平面M平行，P点在平面M内，求证过P点并且和直线a平行的直线必在平面M内．

物理

关于机械能转换和守恒定律的正确理解和应用

袁克群

由于机械能守恒定律只涉及物体系中运动过程初始状态和终了状态时的机械能而不涉及运动状态的变化过程，所以应用它来解决动力学问题，尤其是运动状态变化过程复杂的问题，往往比用牛顿定律的方法求解简便得多。所以它在力学中占有非常重要的地位。

在运用机械能守恒定律时，如果不先去分析是否满足机械能守恒的使用条件而盲目套用，会导致错误。本文即结合初学者容易产生的种种错误认识，集中讨论如何正确认识和应用机械能守恒定律，以及使用机械能守恒定律解题的规范化方法。

一、怎样认识机械能转换和守恒定律

现行的高中物理课本中指出："在只有重力和弹力做功的物体系内，动能和势能（重力势能、弹力势能）可以互相转化，而总的机械能保持不变。"这个结论叫做机械能守恒定律。

该定律的含义是很深刻的，要从如下几个方面深入地理解它的意义：

1.机械能。物体做机械运动时具有的能量，叫做机械能（E）。它包括动能E_K和势能E_p。 $E=E_K+E_p$

当系统的内力为重力时，对零势位说，$E_p=mgh$；它的量值是相对的，当内力为弹力时，$E_p=\frac{1}{2}kx^2$。势能是物体系的能量，不是某一物体单独所有。

在具体问题里，研究对象（物体系）不一定同时具有动能，重力势能和弹性势能。因此，要根据动能，势能的产生条件具体分析。

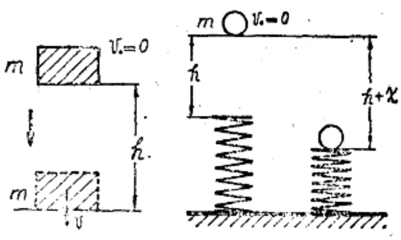
特别要注意的是在重力场中，做机械运动的物体，它处于某一运动状态时，必然对应一定量值的机械能，所以机械能是状态的单值函数。

2.物体系保守内力（重力、弹力）做功的作用。

重力做功与运动路径无关；在弹性形变的范围内，弹力做的功与形变路径无关。它们只与运动的起始位置和终了位置有关，把这种内力称为保守内力。

保守内力做功（或克服保守内力做功）将引起物体系内部的动能和势能之间发生转换，即动能和势能的配比发生变化，而机械能的总值不会因保守内力做功而发生改变，

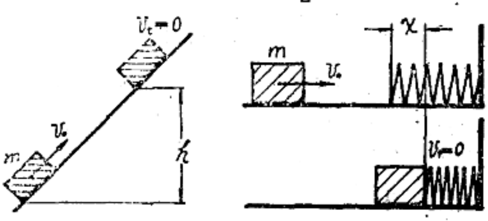
图1(a)—(d)中给出，在摩擦阻力和碰撞时能量损失可以忽略的情况下，保守内力做功所引起的机械能的转换。



(a)　　(b)

(a) $mgh\to\frac{1}{2}mv^2$

(b) $mg(h+x)\to\frac{1}{2}Kx^2$



(c)　　(d)

图1

(c) $\frac{1}{2}mv_0{}^2\to mgh$

(d) $\frac{1}{2}mv_0{}^2\to\frac{1}{2}Kx^2$

3. 关于机械能守恒定律的使用条件。

在物体系内，只有重力和弹力做功时机械能守恒。理解时应包括下述两种情况：

（1）没有外力（动力或阻力）作用在物体系上，且重力和弹力在运动状态变化过程中也不做功（如图2和图3中的G和N）。

（2）虽然有外力（动力或阻力）作用在物体系上，但在物体系运动状态变化过程中合外力功为零，相当于没有外力功，机械能同样也守恒，如图2和图3所示的在水平面上做匀速直线运动的物体，就属于这种情况。

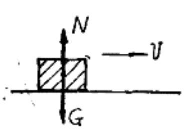


图2

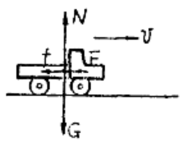


图3

4．关于“物体系”。

由于势能是属于物体系的，而不是属于系统中某一物体的，所以在运用机械能守恒定律分析问题时，是把地球包括在系统之内的。因为只有重力为系统的内力时，才能讨论重力势能的改变。如把地球看作物体系之外，则重力为外力。当重力的功不能和其它外力之功抵消时，只能用动能定理去分析，而不能用机械能守恒定律。

在研究两个以上的物体和地球所组成的物体系时，系统的机械能应为组成这个系统的每一个物体分别和地球组成的较为简单的物体系的机械能的总和，即：$E=E_1+E_2+\cdots\cdots+E_n$

处理这类问题时，很容易出现丢缺部分机械能的错误。例如，一个质量为m的摆球放在质量为M的小车上，而小车放在光滑的水平面上。设摆球从水平位置由静止释放，如图4所示。试分析当摆球通过最低点时，物体系内机械能的分配情况，（摆杆质量，摩擦阻力不计）。

分析（Ⅰ）：把摆、车和地球看成一个物体系。当摆球从水平位置自由释放后，到达最低点时（摩擦阻力不计，只有重力做功）系统中摆球的势能转换为摆球和车的动能，但系统的总机械能守恒。

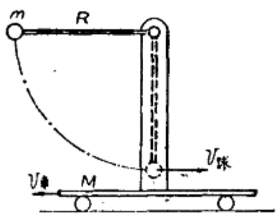


图4

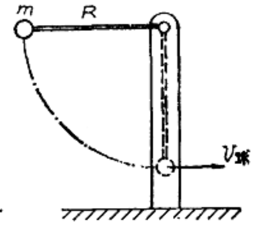


图5

取摆球在最低位置时所在水平面为重力势能零势能位置，那么：

$$mgR=\frac{1}{2}mv_{球}^2+\frac{1}{2}Mv_{车}^2$$

$v_{球}$、$v_{车}$为摆球和车对地面的速度

显然，$mgR\neq\frac{1}{2}mv_{球}^2$，因为小车也得到动能，它不同于图5所示的情况。

分析（Ⅱ）：把摆和车看成一个物体系，则地球在系统之外，重力为外力。由于摩擦阻力不计，依动能定理所以重力对系统所做的总功等于系统动能的增加。即：

$$mgR=\frac{1}{2}mv_{球}^2+\frac{1}{2}Mv_{车}^2$$

由上可以看出，虽然分析（Ⅰ）和（Ⅱ）得到同样结果，但所依据的道理却不同。由此可见，在使用机械能守恒定律时，要首先明确研究对象是多么重要。

5．如果物体系（如由两个物体和地球组成）中的一个物体的机械能的减少量等于另一个物体机械能的增加量，则这个物体系的机械能守恒，这是机械能守恒定律的另一种表述形式。即：$\triangle E_1=-\triangle E_2$

二、用机械能守恒定律解题的步骤

1．明确研究对象是由哪些物体组成的物体系。

2．对物体系进行受力分析，并确定哪些力做功，哪些力不做功，以决定是否能使用机械能守恒定律。

3．如果物体系的机械能包括势能（重力势能和弹性势能）则要根据题意选取最佳零势能位置以简化计算。

4．分别找出物体系在所研究的物理过程中的初态机械能和终态机械能。

5．根据机械能守恒定律$E_{初}=E_{终}$求解。

【例1】半径为R的球固定在水平面上，一个小物体m从球顶无摩擦地滑下，如图6所示，问：(1)物体在多高的地方离开球面？(2)物体落地时速度多大？

分析：取物体和地球为物体系，物体沿球面滑下时，阻力不计，受力情况如图6所示。支持力不做功。当它沿球面和脱离球面运动时，都只有重力做功，所以物体从开始滑下到落地的整个过程中物体系的机械能守恒。

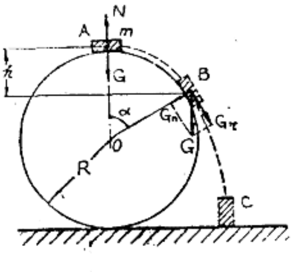


图6

解：(1)先求脱离位置：

物体沿球面滑下时，它所受的支持力N逐渐减小，脱离时的受力特征是$N=0$，设脱离处物体速度为v_B，此时处于圆周运动转为斜下抛运动的临界位置。在此时刻G的分力G_n充当做圆周运动时所需之向心力，如图6所示。

取脱离位置B所在水平面为重力势能的零势能位置，依机械能守恒定律：$E_A=E_B$

$$mgh=\frac{1}{2}mv_B{}^2,\quad \therefore v_B{}^2=2gh。$$

$$\because mg\cos\alpha=m\frac{v_B{}^2}{R}=m\frac{2gh}{R},\ \therefore h=\frac{R}{2}\cos\alpha。$$

又$\because \cos\alpha=\dfrac{R-h}{R}$（参看图6）

$$\therefore h=\frac{R}{2}\cdot\frac{R-h}{R},\ \therefore h=\frac{1}{3}R。$$

因此脱离位置距水平面的高度为$\dfrac{5}{3}R$。

(2)求落地时速度的大小：

从物体由$A\longrightarrow C$的运动全过程来分析，机械能应守恒，所以$E_A=E_C$，取水平支持面为重力势能的零势能位置，则：

$$mg(2R)=\frac{1}{2}mv_C^2,\quad v_C=2\sqrt{Rg}。$$

如果仍把零势能面选在B点所在水平面，则物体在BC段可依$E_B=E_C$分析计算，但计算过程较为复杂。

【例2】设一根质量可忽略不计的杆，可以无摩擦地绕轴O旋转，轴与杆相垂直。杆的两端装有两个质量均为m的小球，其位置距O点相应为a和$2a$，杆由水平位置静止释放，求杆经过垂直位置时两个小球的线速度大小，如图7所示。

分析：杆在旋转过程中，只有重力做功，故两个小球和地球组成的物系机械能守恒。

解法Ⅰ：取杆所在的水平位置为重力势能零势能位置，那么杆在水平位置时的机械能$E_{水平}=0$。杆通过竖直位置时的机械能：

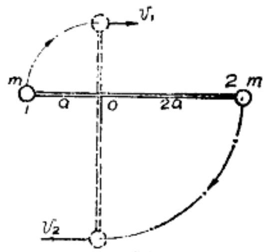


图7

$$E_{竖直}=E_1+E_2$$
$$=\frac{1}{2}mv_1^2+mga+\frac{1}{2}mv_2^2+(-mg2a)$$

又$\because\ v_1=\omega a,\quad v_2=\omega(2a)$，

依机械能守恒定律：$E_{水平}=E_{竖直}$，所以

$$\frac{1}{2}m\omega^2a^2+mga+\frac{1}{2}m\omega^2(4a^2)-2mga=0,$$

$$5m\omega^2a^2-2mga=0$$

$$\therefore\omega=\sqrt{\frac{2g}{5a}},$$

$$因此\ v_1=\sqrt{\frac{2ga}{5}},\qquad v_2=2\sqrt{\frac{2ga}{5}}。$$

讨论：如果取小球通过最高位置时所在水平面为重力势能零势能位置，那么：

$$E_{水平}=-mga+(-mga)=-2mga,$$
$$E_{竖直}=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+(-3mga),$$

显然：$-2mga=\dfrac{1}{2}mv_1^2+\dfrac{1}{2}mv_2^2-3mga$。

把$v_1=\omega a$，$v_2=2\omega a$代入可得同样结果，由此可知，零势能位置的选取是任意的，可以根据题意选取一个最佳位置，以简化计算。

（下转25页）