

高等混合算學

下 卷

美國梧茲 巴雷 著

易 俊 元 譯

江苏工业学院图书馆
藏 书 章

商務印書館發行

高等混合算學

二 冊

此書有著作權翻印必究

中華民國二十年二月初版

下卷定價大洋貳元捌角

外埠酌加運費匯費

原著者	美國 梧 茲 巴 雷
譯述者	易 俊 元
發行人	上海寶山路五〇一號 王 雲 五
印刷所	上海寶山路 商務印書館
發行所	上海及各埠 商務印書館

A COURSE IN MATHEMATICS

Volume II

By WOODS and BAILEY

Translated by I TSUN YUAN

Published by Y. W. WONG

1st ed., Feb., 1931

Price: \$2.80, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

All Rights Reserved

高等混合算學

下卷目錄

第一章 無窮小數及微分

節數	頁數
1—2	無窮小數之次數.....1
3	無窮小數之基本定理.....4
4	微分.....7
5—6	圖解.....9
7	微分範式.....10
8	高次微分.....11

第二章 積分法之初等範式

9	積分法之定義.....13
10	積分法之常數.....13
11	基本範式.....14
12	w^n 之積分.....14
13	三角函數之積分.....18
14—15	逆三角函數之積分.....20
16	指數函數之積分.....26
17	範式.....26

18	代入積分法	28
19	分求積分法	31
20	積分法之可能問題	33
	問題	34

第三章 定積分

21	定義	41
22	圖解	43
23	推論	45
24	定積分之性質	47
25	定積分之求值法	48
26	變換極限	51
27	分求積分法	53
28	無窮大之極限	54
29	無窮大之積分根	55
30	函數之平均值	56
31	戴勒級數及麥克羅林級數	58
32—33	冪級數之演算	62
	問題	64

第四章 對於幾何學之應用

34	定積分之元素	68
35	楮托坐標平面曲線之面積	68
36	極坐標平面曲線之面積	71
37	旋轉體之體積	73

38	兩底平行之立體體積.....	76
39	類似角柱體之範式.....	79
40	直角坐標平面曲線之長.....	80
41	極坐標平面曲線之長.....	82
42	弧之微分.....	83
43	旋轉面之面積.....	84
	問題.....	86

第五章 對於力學之應用

44	工作.....	93
45	引力.....	93
46	壓力.....	96
47	重心.....	98
48	平面曲線之重心.....	100
49	平面面積之重心.....	102
50	密度爲常數之旋轉體及旋轉面之重心.....	105
51	壓力中心.....	106
	問題.....	107

第六章 有理分數之積分法

52	導言.....	114
53—54	析成散分數.....	115
55—57	析成散分數之可能.....	121
58	有理分數之積分法.....	125
	問題.....	129

第七章 特別積分法

59	有理化法	132
60	積分根含 $a+bx$ 之分數冪	132
61	積分根含 $a+bx^n$ 之分數冪	133
62	積分根含 $\sqrt{a+bx+x^2}$ 之整數冪	135
63	積分根含 $\sqrt{a+bx-x^2}$ 之整數冪	136
64	三角函數之積分法	137
65	$\int \sin^n x dx$ 及 $\int \cos^n x dx$	137
66	$\int \sin^m x \cos^n x dx$	139
67	$\int \tan^n x dx$ 及 $\int \cot^n x dx$	140
68	$\int \sec^n x dx$ 及 $\int \csc^n x dx$	142
69	$\int \tan^m x \sec^n x dx$ 及 $\int \cot^m x \csc^n x dx$	143
70	代入 $\tan \frac{x}{2} = z$	144
71	代數化法範式	146
72—73	化法範式之證明	147
74	三角化法範式	151
75	積分表之引用	154
	問題	154

第八章 簡易微分方程式之積分法

76	定義	160
77	方程式 $Mdx + Ndy = 0$ 其變數能分離者	163

78—79	調和方程式 $Mdx + Ndy = 0$	165
80	一次線方程式	167
81	白羅黎方程式	169
82	二次方程式	170
	問題	178

第九章 多變數之函數

83	多變數之函數	183
84	空間直角坐標	183
85—86	二變數之函數之圖解	184
87	旋轉面	196
88	柱面	197
89—90	空間曲線	197
91	法面	199
	問題	202

第十章 平面及直線

92	影射	205
93	兩點間之距離	207
94	直角坐標空間曲線之長	208
95—96	直線之方向	209
97	空間曲線之方向	211
98	二直線之夾角	212
99	平面之法線之方向	213
100	平面之法線式	215

101	兩平面之夾角	216
102	決定任一直線之方向餘弦	216
103—104	兩點所決定之直線方程式	217
105	空間曲線之切線方程式	219
106	經過一定點且知其方向餘弦之直線方程式	220
107	平面及直線諸問題	220
108	變換坐標	224
	問題	225

第十一章 偏微分法

109	偏微係數	230
110	多變數之函數之增量及全微分	232
111	$f(x, y)$ 之微係數其中 x 及 y 同為 t 之函數	235
112	曲面之切面	237
113	$f(x, y)$ 之微係數其中 x 及 y 同為 s 及 t 之函數	239
114	全微分之性質	243
115	陰函數	244
116—117	高次偏微係數	246
118	$f(x, y)$ 之高次微係數其中 x 及 y 同為 t 或 t 及 s 之函數	248
119	定積分之微分法	251
	問題	253

第十二章 重積分

120	常數極限之二重積分	260
-----	-----------------	-----

121	圖解	263
122—123	變數極限之二重積分	264
124	二重積分之演算	266
125	極坐標之二重積分	267
126	三重積分	269
127	圓柱坐標及極坐標	270
128	在於圓柱坐標及極坐標之體積之元素	271
129	變換坐標	273
	問題	274

第十三章 重積分之應用

130—132	平面面積之慣性能率	275
133—134	平面曲線所界之面積	279
135	任一曲面之面積	280
136	重心	286
137—138	平面面積之重心	287
139	立體之重心	289
140	體積	291
141	立體之慣性能率	293
142	引力	294
	問題	295

第十四章 線積分及恰合微分

143	定義	303
144	基本定理	307

145	第一種線積分 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$	309
146	第二種線積分 $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$	313
147	恰合微分	316
148—149	積分因子	318
150—151	斯托克氏之定理	322
	問題	325

第十五章 無限級數

152	斂	328
153	斂之比較判定	329
154	斂之比率判定	331
155	絕對斂	332
156	冪級數	334
157	麥克羅林級數及戴勒級數	337
158	戴勒級數對於多變數之函數	339
159—160	弗利爾級數	341
161—162	未定式 $\frac{0}{0}$	346
163	未定式 $\frac{\infty}{\infty}$	350
164	他種未定式	352
	問題	354

第十六章 複數

165	圖解	358
166	加法及減法	359

167	乘法及除法.....	360
168	乘方及開方.....	360
169	指數函數及三角函數.....	362
170	對數函數.....	364
171	複數變數之函數之通論.....	365
172	共軛函數.....	367
	問題.....	369

第十七章 一次微分方程式

173	導言.....	371
174	級數解法.....	373
175	微係數非爲一次方之方程式.....	374
176	對 p 可解之方程式.....	374
177	對 y 可解之方程式.....	376
178	對 x 可解之方程式.....	378
179—181	包絡線.....	378
182	單獨解答.....	382
183	正彈道線.....	384
184	三變數之一次微分方程式(能積分者).....	385
185	二個含三變數之一次微分方程式.....	390
186	三變數之一次微分方程式(不能積分者).....	394
	問題.....	396

第十八章 線微分方程式

187	定義.....	401
-----	---------	-----

188	常數係數之線方程式.....	402
189	運算母 $\frac{1}{D-a}$	403
190	常數係數之二次方程式.....	405
191	散分數解法.....	409
192	常數係數之普通方程式.....	411
193	未定常數解法.....	412
194	常數係數之線微分方程式之羣.....	415
195	變數係數之線微分方程式.....	417
196	級數解法.....	420
	問題.....	425

第十九章 偏微分方程式

197	導言.....	430
198	偏微分方程式之特殊形式.....	430
199	一次線偏微分方程式.....	432
200	在於平面之拿勃勒斯方程式.....	434
201	在於空間之拿勃勒斯方程式.....	436
	問題.....	439
	問題答案.....	442

高等混合算學下卷

第一章 無窮小數及微分

1. 無窮小數之次數 (*Order of infinitesimals*) 無窮小數

者,以零爲極限之一變數也,在算學上討論無窮小數,不能僅爲一甚小之意義,例如物質之原子不能認爲算學上之無窮小數,因其形體已全有一定,凡云無窮小數係爲能使其小於任何量之一量,惟在於此類之演算,亦不能設想其等於微塵而可擯除不計,無窮小數亦係有限之量,其服從乘除等定律與有限之量相同,常在含無窮小數之問題,係求定某式當其所含之無窮小數達於零時之和或商之極限.

例 1. 求一物體運動之速度,當求 Δs 及 Δt 均達於零時 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 之極限 (上卷第一百零六節),其 Δs 係物體在 Δt 時間內所經過之距離,此二者皆係無窮小數,而物體之速度,即此二者之商之極限.

例 2. 求圓之面積,常取一 n 邊正多角形內接於此圓,再引此圓之半徑若干至於多角形之各頂點,而分多角形成 n 個三角形,當 n 增至無限時,每三角形之面積成一無窮小數,圓之面積即係無數三角形之無窮小面積之和之極限.

無窮小數之算學討論常爲有二個或多個無窮小數,其相互之關係爲假設其中有一接近於零,則其餘亦接近於零,由定其任二之比之極限,可比較此二者,其定義如次.

二無窮小數當其比之極限爲一有限之量而非爲零時,其次數相同.

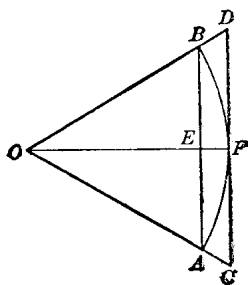
無窮小數 β 之次數較無窮小數 α 之次數爲高,若其比 $\frac{\beta}{\alpha}$ 之極限爲零.

例 3. 設 $\beta = \sin a$, $\gamma = 1 - \cos a$, 其中 a 爲一無窮小之角,則

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\sin a}{a} = 1,$$

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{1 - \cos a}{a} = 0. \quad (\text{上卷第一百五十一節})$$

故 β 與 α 之次數相同,而 γ 較 β 或 α 之次數爲高.



第一圖

例 4. 設 $\widehat{AB}$ (第一圖) 爲一圓弧, O 爲圓之中心, a 爲其半徑, AB 爲其內接正 n 邊形之一邊, CD 爲其外接正 n 邊形之一邊, 而

α = 三角形 AOB 之面積,

β = 三角形 COD 之面積,

γ = 梯形 $ABDC$ 之面積.

令 n 無限增加, 則 α, β 與 γ 皆成無窮小數, 欲計算此等之值, 可引 OE 垂直於 AB 與 CD , 則

$$\angle AOB = \frac{2\pi}{n}, \quad \angle EOB = \frac{\pi}{n}, \quad OE = a \cos \frac{\pi}{n}$$

$$EB = a \sin \frac{\pi}{n}, \quad FD = a \tan \frac{\pi}{n}.$$

由此得

$$\alpha = OE \cdot \frac{AB}{2} = OE \cdot EB = a^2 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n},$$

$$\beta = OF \cdot \frac{CD}{2} = OF \cdot FD = a^2 \tan \frac{\pi}{n},$$

$$\gamma = \frac{AB+CD}{2} \cdot EF = (EB+FD)(OF-OE)$$

$$= a^2 \left(\sin \frac{\pi}{n} + \tan \frac{\pi}{n} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) = a^2 \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 1,$$

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{\sin^2 \frac{\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 0.$$

故 β 與 α 爲同次，而 γ 爲高次。

2. 今當討論當兩無窮小數之比之極限爲1時之情形，例如

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

則由上卷第五十三節極限之定義

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \epsilon,$$

其中當 α 達於零時， ϵ 亦達於零。因此

$$\beta = \alpha + \alpha\epsilon$$

今 $\alpha\epsilon$ 一項之次數較 α 之次數爲高，蓋 $\lim \frac{\alpha\epsilon}{\alpha} = \lim \epsilon = 0$ 。故 β 與 α 之差，爲一較此二數爲高次之無窮小數。

反之，設 β 與 α 之差爲一較此二數爲高次之無窮小數，即如

$$\beta = a + \gamma$$

其中假設 $\lim \frac{\gamma}{a} = 0$, 則

$$\lim \frac{\beta}{a} = \lim \left(1 + \frac{\gamma}{a} \right) = 1.$$

故今已證明凡二無窮小數 β 與 a 之差爲一高次無窮小數, 其意義與 $\lim \frac{\beta}{a} = 1$ 完全相同.

例 1. 二無窮小數 a 及 $\sin a$ 之差爲一高次無窮小數(上卷第一百五十一節).

例 2. 兩三角形 AOB, COD (前節例 4) 之面積之差亦爲一高次無窮小數(即梯形 $ABDC$ 之面積).

3. 無窮小數之基本定理 使用無窮小數常有二重要問題須待解決.

1. 商數問題 當二無窮小數各達於零時, 求此二數之商之極限.

2. 總和問題 當若干無窮小數各達於零而其數目則增至無限時, 求此諸數之和之極限.

此二問題已見於第一節, 今述其定理如次.

1. 二無窮小數之商有一極限, 則此二數如各以他一與之相差爲一高次無窮小數之無窮小數代之, 此極限仍不變.

2. 如 n 個正無窮小數之和當 n 無限增加時有一極限, 則如各以他一與之相差爲一高次無窮小數之無窮小數代之, 此極限仍不變.