高等混合算學

下卷

美國梧茲 巴雷著
易 俊 元 譯

商務印書館發行

高等混合算學
二冊

中華民國二十年二月初版
下卷定價大洋貳元捌角
外埠酌加運費匯費

原著者　美國　梧茲 巴雷
譯述者　易俊元
發行人　王雲五　上海寶山路五〇一號
印刷所　商務印書館　上海寶山路
發行所　商務印書館　上海及各埠

A COURSE IN MATHEMATICS
Volume II
By WOODS and BAILEY
Translated by I TSUN YUAN

Published by Y. W. WONG
1st ed., Feb., 1931
Price: $2.80, postage extra
THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

高等混合算學

下卷目錄

第一章　無窮小數及微分

第二章　積分法之初等範式

第三章 定積分

第四章 對於幾何學之應用

第五章　對於力學之應用

第六章　有理分數之積分法

第七章 特別積分法

第八章 簡易微分方程式之積分法

第九章　多變數之函數

第十章　平面及直線

第十一章　偏微分法

第十二章　重積分

第十三章　重積分之應用

第十四章　線積分及恰合微分

第十五章 無限級數

第十六章 複數

第十七章　一次微分方程式

第十八章　線微分方程式

第十九章 偏微分方程式

高等混合算學下卷

第一章　無窮小數及微分

1.　無窮小數之次數(*Order of infinitesimals*)　<u>無窮小數者.以零爲極限之一變數也.</u>在算學上討論無窮小數.不能僅爲一甚小之意義.例如物質之原子不能認爲算學上之無窮小數.因其形體已全有一定.凡云無窮小數係爲能使其小於任何量之一量.惟在於此類之演算.亦不能設想其等於微塵而可擯除不計.無窮小數亦係有限之量.其服從乘除等定律與有限之量相同.常在含無窮小數之問題.係求定某式當其所含之無窮小數達於零時之和或商之極限.

例 1.　求一物體運動之速度.當求Δs及Δt均達於零時$\frac{\Delta s}{\Delta t}$之極限(上卷第一百零六節).其$\Delta s$係物體在$\Delta t$時間內所經過之距離.此二者皆係無窮小數.而物體之速度.卽此二者之商之極限.

例 2.　求圓之面積.常取一n邊正多角形內接於此圓.再引此圓之半徑若干至於多角形之各頂點.而分多角形成n個三角形.當n增至無限時.每三角形之面積成一無窮小數.圓之面積卽係無數三角形之無窮小面積之和之極限.

無窮小數之算學討論常為有二個或多個無窮小數.其相互之關係為假設其中有一接近於零.則其餘亦接近於零.由定其任二之比之極限.可比較此二者.其定義如次.

<u>二無窮小數當其比之極限為一有限之量而非為零時.其次數相同.</u>

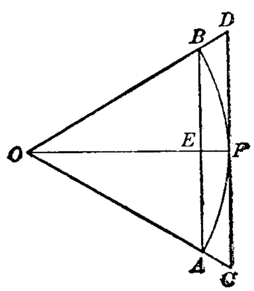
<u>無窮小數β之次數較無窮小數α之次數為高.若其比$\frac{\beta}{\alpha}$之極限為零.</u>

例 3. 設 $\beta=\sin\alpha$. $\gamma=1-\cos\alpha$. 其中α為一無窮小之角.則

$$Lim\frac{\beta}{\alpha}=Lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

$$Lim\frac{\gamma}{\alpha}=Lim\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}=0. \qquad \text{(上卷第一百五十一節)}$$

故β與α之次數相同.而γ較β或α之次數為高.



第一圖

例 4. 設$\overset{\frown}{AB}$(第一圖)為一圓弧.O為圓之中心.a為其半徑.AB為其內接正n邊形之一邊.CD為其外接正n邊形之一邊.而

$\alpha=$三角形AOB之面積,

$\beta=$三角形COD之面積,

$\gamma=$梯形$ABDC$之面積.

令n無限增加.則α,β與γ皆成無窮小數.欲計算此等之值.可引OE垂直於AB與CD.則

$$\angle AOB=\frac{2\pi}{n},\qquad \angle EOB=\frac{\pi}{n},\qquad OE=a\cos\frac{\pi}{n}$$

$$EB=a\sin\frac{\pi}{n},\qquad FD=a\tan\frac{\pi}{n}.$$

由此得

$$\alpha = OE\cdot\frac{AB}{2}=OE\cdot EB=a^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},$$

$$\beta = OF\cdot\frac{CD}{2}=OF\cdot FD=a^2 \tan\frac{\pi}{n},$$

$$\gamma = \frac{AB+CD}{2}\cdot EF=(EB+FD)(OF-OE)$$

$$=a^2\left(\sin\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=a^2\frac{\sin^3\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}.$$

$$Lim\frac{\beta}{\alpha}=Lim\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}=1,$$

$$Lim\frac{\gamma}{\alpha}=Lim\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}=0.$$

故β與α爲同次.而γ爲高次.

2. 今當討論當兩無窮小數之比之極限爲1時之情形.例如

$$Lim\frac{\beta}{\alpha}=1.$$

則由上卷第五十三節極限之定義

$$\frac{\beta}{\alpha}=1+\epsilon,$$

其中當α達於零時.ϵ亦達於零.因此

$$\beta=\alpha+\alpha\epsilon$$

今$\alpha\epsilon$一項之次數較α之次數爲高.蓋$Lim\frac{\alpha\epsilon}{\alpha}=Lim\,\epsilon=0$.故$\beta$與$\alpha$之差.爲一較此二數爲高次之無窮小數.

反之.設β與α之差爲一較此二數爲高次之無窮小數.即如

$$\beta=\alpha+\gamma$$

其中假設$Lim\frac{\gamma}{\alpha}=0$.則

$$Lim\frac{\beta}{\alpha}=Lim\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=1.$$

故今已證明凡二無窮小數β與α之差爲一高次無窮小數.其意義與$Lim\frac{\beta}{\alpha}=1$完全相同.

例 1. 二無窮小數α及$\sin\alpha$之差爲一高次無窮小數(上卷第一百五十一節).

例 2. 兩三角形AOB,COD(前節例4)之面積之差亦爲一高次無窮小數(卽梯形$ABDC$之面積).

3. 無窮小數之基本定理 使用無窮小數.常有二重要問題須待解決.

1. 商數問題 當二無窮小數各達於零時.求此二數之商之極限.

2. 總和問題 當若干無窮小數各達於零而其數目則增至無限時.求此諸數之和之極限.

此二問題已見於第一節.今述其定理如次.

1. 二無窮小數之商有一極限.則此二數如各以他一與之相差爲一高次無窮小數之無窮小數代之.此極限仍不變.

2. 如n個正無窮小數之和當n無限增加時有一極限.則如各以他一與之相差爲一高次無窮小數之無窮小數代之.此極限仍不變.