平面解析几何

参考資料

辽宁师范学院数学系编

（平面解析几何参考资料）

目　录

一、解析几何的产生及研究对象和方法

㈠、解析几何的产生及研究对象和方法……………………………1—4

㈡、关于坐标法……………………………………………………4—5

二、曲线和方程

1、关于曲线的概念………………………………………………6—8

2、曲线和方程的对应……………………………………………8—9

3、曲线和方程的转化……………………………………………9—11

三、关于直线的斜率………………………………………………12—14

四、充分条件、必要条件、充要条件

1、命题的组成……………………………………………………14—15

2、命题的四种形式………………………………………………15

3、原命题与逆否命题的等效性…………………………………15—16

4、必要条件………………………………………………………16—17

5、充分条件………………………………………………………17

6、充要或（必充）条件…………………………………………17—18

五、直线方程及其应用

1、直线方程的一般式与特殊式…………………………………18—22

2、直线方程的应用………………………………………………22—28

六、椭圆、曲线、抛物线的几何特征、标准方程和应用

㈠、椭圆……………………………………………………………29—40

㈡、双曲线……………………………………………40—48
㈢、抛物线……………………………………………48—56
七、椭圆、双曲线、抛物线为什么又叫圆锥曲线……………57—62
八、圆锥曲线的几何作图法
㈠、椭圆的画法………………………………………63—6
㈡、双曲线的画法……………………………………67—70
㈢、抛物线的画法……………………………………70—72
九、关于曲线的渐近线………………………………73—80
十、圆锥曲线的光学性质
1、圆锥曲线的切线和法线……………………………81—82
2、圆锥曲线的切线和法线性质………………………83—94
十一、椭圆和抛物线弓形的面积与弧长
㈠、椭圆及其部分的面积……………………………95—99
㈡、抛物线弓形的面积………………………………99—101
㈢、椭圆周长和抛物线弧长的近似公式………………102
十二、平移和旋转在简化二次曲线方程中的作用
1、平移和旋转的坐标变换公式…………………………103—106
2、平移变换下二次方程的系数的变化…………………106—107
3、旋转变换下二次方程的系数的变化…………………107—108
4、一般二次方程的化简………………………………108—114
5、二次曲线类型和形状的判别…………………………114—118
十三、极坐标
1、极坐标系的意义……………………………………119—121
2、极坐标与直角坐标的互换……………………………121—124
3、极坐标下曲线的方程………………………………124—138

4、由极坐标方程画出它的曲线……………………138—143
四、曲线的参数方程
1、参数方程的意义……………………………144—147
2、参数方程和普通方程的互化…………………147—156
3、由参数方程绘曲线图形………………………156—159
五、渐开线齿轮传动的平稳性；凸轮轮廓线的画法
1、圆的渐开（伸）线……………………………160—163
2、直线型齿轮传动的不平稳性…………………163—164
3、渐开线齿轮传动的平稳性……………………164—166
4、关于凸轮轮廓线的画法………………………166—171
六、旋轮线的性质及其应用
1、旋轮线的形成及其参数方程…………………172—173
2、旋轮线的性质及其应用………………………173—181
3、圆外旋轮线（外摆线）………………………181—186
4、圆内旋轮线（内摆线）………………………186—190

一　解析几何的产生及研究对象和方法

[redacted]析几何的产生及研究对象和方法

[redacted]7 世纪初期，当时欧洲已向新的资本主义生产方式过渡。农业生产要求更进一步精确地划分季节，准确定出春分、秋分、夏至、冬至的日期。远洋航海迅速发展，船舶远离陆地，看不到任何陆标，如何准确地测定船位便成为急待解决的问题。这样的活动促使人们对太阳及其行星和其它恒星，进行仔细的观测，设法了解它们的变化规律，于是天文学得以发展。

在军事上，要求炮弹发射的准确，导致了对抛射体运动的研究；在机械建筑、水利等方面，如对拱形桥受力情况的分析等，促使力学也得到迅速的发展。

在自然科学迅速发展的情况下，人们不断改善观察方法，积累了丰富的实验数据，通过对这些数据的分析，综合和整理使得人们的认识提高了一步。因此在十七世纪前后出现了对解析几何的产生有重要影响的一些发现。例如在1590年发现投射物的路线是抛物线；1609—1619年间根据火星在天空中运动的大量观察数据发现行星沿着椭圆形轨道绕太阳运行；1615年发表的开普勒（德国）的《酒桶的立体几何学》中，研究了圆锥曲线旋转体的体积；笛卡尔总结发展了前人的工作，于1637年出版了《几何学》一书，正式把变量引进了数学，并把描述运动的函数关系和几何中曲线问题的研究统一了起来。

事实说明，解析几何产生的当时，由于生产的需要，天文学、力学有了迅速发展，迫切要求对所发现的各种曲线、曲面进行计算和研

究它们的性质。这样便产生了解析几何。因此，归根到底，解析几何的产生是和人类生产活动分不开的。正如恩格斯所指出的："科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。"

在某些旧的解析几何教材中，极力散布唯心论的先验论，把解析几何归于笛卡尔（法国哲学家兼数学家，1596—1650年）个人的"爱思索"的头脑的纯粹思维的产物，这完全是歪曲历史事实。辩证唯物主义认为：知识和才能来源于实践，来源于群众，任何英雄豪杰他们的头脑只能起一个加工厂的作用，其原料或半成品是来自人民群众的。解析几何产生的历史也充分说明了这一点。

通常所说的几何学，是研究物体的形状、大小和位置的相互关系（简称图形性质），即物体的空间形式的一门科学。而解析几何，则主要是用代数方法研究几何图形性质的一个几何学的分科。它是以坐标法为桥梁，使几何中的基本元素"点"与代数中的基本元素"数"之间建立联系，再用运动的观点把图形看作是动点的轨迹，使几何中的曲线与代数中的方程之间建立联系，这样就可用代数的方法来研究几何图形的性质了。例如，要想研究椭圆的对称性，用代数方法就只须考查它在特定坐标系下的标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

看出它的左端是关于x、y的二次齐次式（方程的性质），并且不含x、y的乘积项，因此若(x, y)适合方程，则$(-x, y)$、$(x, -y)$、$(-x, -y)$也必适合方程，于是我们得出结论：若点P(x, y)是椭圆上任意点，则这个点关于坐标轴（椭圆的轴在坐标轴上）和原点（也是椭圆的中心）的对称点$P_1(-x, y)$，$P_2(x, -y)$、$P_3(-x, -y)$也一定在椭圆上，因此椭圆具有对称性。

这就是用代数法研究曲线性质的典型例子。

为了进一步说明代数法（后面也称解析法）的特点，再举一例用两种方法对比加以证明：

例一 求证任意直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等。

已知：$\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$；E 为斜边AB的中点。

求证：$|EA| = |EB| = |EC|$

解 析 法

证明：建立直角坐标系。取直角顶点C为原点，CB和CA所在直线为x轴和y轴（图1－1）。

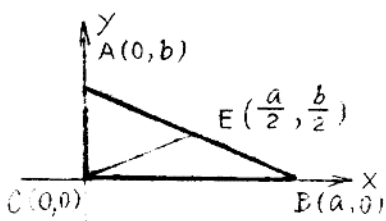

图1－1

于是C的坐标为(0，0)，设B(a，0)，A(0，b)，则斜边AB的中点E的坐标为($\frac{a}{2}$，$\frac{b}{2}$)。

根据两点间的距离公式得：

$$|EC| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$|EA| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

$$|EB| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},$$

综 合 法

证明：取斜边AB中点E为圆心，AB长的一半为半径画圆，则A、B两点在这个圆上，而C点对AB（圆的直径）张直角，所以C点也在这个圆上（图1－2）

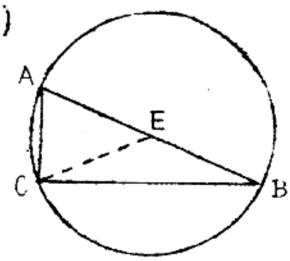

图1－2

因此，A、B、C都在以E为圆心，AB的一半为半径的圆上。

$\therefore |EA| = |EB| = |EC|$

$\therefore |EA| = |EB| = |EC|$

我们看到，解析法首先要适当选取坐标系，然后通过代数的运算解决问题，因此较综合法思路明确，清晰，容易入手。但有时计算较繁，而综合法一般变化较多，不易入手，解法也往往因人而异。因此解析法能充分利用代数的工具，对图形性质的研究一般能有一个统一的处理格式和明确的解法。

在几何中由于采用了代数方法，使得研究的内容和结果都更进一步深化了，我们已经能够详尽的研究某些平面曲线的性质，而且一切结果都能用数量关系表示出来。例如两条直线的位置关系用它们的斜率关系表示，椭圆的扁平程度用离心率大小表示，三种圆锥曲线的区别也可由离心率划分，一般二次方程的判别也归结为计算一个判别式等等。

解析几何是变量数学的开始，只有在数学中引入变数，用流动坐标描写动点，才能表达质点运动的过程和规律，只有在数学中引进变数，才能使数学中的两大对象形和数对立的双方统一起来。因此变数进入数学使数学发生了质的变化，它再也不只是象常量数学那样零碎的，孤立的，静止的看待研究的对象。所以恩格斯指出："数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数辩证法进入了数学……。"

㈡　关于坐标法

人类生活的世界是物质的世界，而物质是不能离开运动而存在的。运动虽有多种方式，但"一切运动都是和某种位置移动相联系的"。在自然科学中最先发展起来的是简单的位置移动的理论。实际上无论是宇宙中的巨大恒星还是构成物质的基本粒子都在不停的发生着位移移动，因此在研究运动着的物体时，怎样表示运动着的物体在某一时

刻的位置，这是必须首先要解决的。我们知道，物体的静止位置是相对的，都是对于某个参照物来说的。因此要描写物体的位置必须首先选择参考系。正象有人问我们自然博物馆在那里？我们就必须告诉他自然博物馆周围的街道建筑物的特征，而只从它本身很难说清楚，这就是坐标法产生的原始思想。例如古代天文学中，在幻想的天球里利用特设的坐标系来确定最亮星的位置，并画成星图。随后在航海中发展了地理坐标，以确定海上船只的位置等等。可见坐标法在开始仅仅是为了确定对象的位置。

在十七世纪初期随着生产的发展，人们的活动范围不断扩大，认识能力不断深化，要求确定位置的精度越来越高，特别是对描写和掌握运动规律的要求，以及对需要进行性质研究和弧长、面积等计算，这样就产生了用坐标法来研究的几何学。如解析几何、仿射几何和射影几何以及微分几何学等。于是使坐标法不再只是确定位置，而成为研究各种几何学的非常重要的方法。这种方法不但被应用到数学的其他领域而且也直接应用到力学、物理学之中。由于应用范围的扩大，研究的许多问题有质的差别，因此必须建立适合所研究问题的特点的各种坐标系，例如在研究平行射影下的几何（仿射几何），而建立仿射坐标系（斜角坐标系）。在微分几何里在曲面上建立各种曲线坐标等等。通常我们在平面解析几何里所用的平面直角坐标和极坐标可以说是两种最常见，也最自然的坐标系。

因此，坐标法的实质就是适当选取某个或某几个物体作为标准，按一定的方法来证明其它需要研究的物体与它们的相互位置的关系；但当有了一定的度量单位后，相互位置的关系通常是用数来表示的。于是，通过坐标法，就有可能把形和数结合起来，进而能使我们通过对数量关系的讨论来研究物体的几何性质。

二　曲线和方程

1. 关于曲线的概念

曲线通常是作为物体的形状、或物体运动的轨迹而出现的。除常见的直线与圆外，还有许多其他也是常见的较复杂的曲线。

例如，炮弹在空中飞行的路线；轮船在海中的航线；行星在空间运行的路线；刀具在金属工件上留下的痕迹；旋转着的车轮上的一点的痕迹；悬挂着的缆绳的形状；带动飞轮的皮带的形状，各种螺旋弹簧的形状以及凸轮、齿轮边缘的形状等等，都是数学中所研究的曲线的现实模型。因此曲线的概念绝不是从天上掉下来的，也绝不是人们头脑里固有的，而是从自然界和人们的社会实践中抽象出来的。这些曲线，都具有一定的规律性，这个规律性常常就反映为曲线上点所共同具有的某些特征性质，即曲线可以看成是具有某些特征性质的点所构成的。如半径为R的圆就可以看成为所有到一定点距离为R的点组成的。因此，在解析几何里常把一条曲线看作是满足某种条件的点所组成的轨迹（即满足同一条件的所有点的集合）。所谓一条曲线是满足某种条件的点的轨迹，是指：

(1)　曲线上所有点都满足某种条件；

(2)　满足某种条件的所有点，都在这条曲线上。第①条的意思是说曲线上各点都有同一性质—— 适合同一条件，找不出任何一点例外，也就是它们都具有“清一色”的性格，没有一点是鱼目混珠的，通常称它为轨迹的纯粹性（也叫必要性）。第②条的意思是说适合条件的点一个也没有漏掉，全部都在曲线上，适合条件的点具备“只此一家，别无分店”的性格，通常称它为轨迹的完备性（也叫充分性）。这两

条合起来，保证了轨迹上的点不漏不杂。

因此要证明适合某种条件的点的轨迹是某条曲线（包括直线）时，必须同时考虑①②两个方面（即顺的方面和逆的方面）这就是通常所说的“轨迹问题需要两面证。”那末为什么轨迹问题要这样大费周折，反来复去一证再证呢？请看下面两例：

甲、一动点P和一条定直线 a 保持一定距离 d 而运动，求其轨迹。

作直线AB，使和 a 平行，并和 a 相距为 d，则从“平行线间距离处处相等”的道理，易证“在AB上的点，都和 a 有一定距离 d”，这时如果我们就下结论说“所求的轨迹为直线AB”就有缺陷。因为除AB外，还有另一平行线CD也是所求轨迹，而被忽略了。

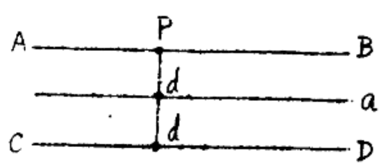

图 2—1

乙、一动弦在定圆内平行移动，求其中点的轨迹。

设动弦在运动中的一个位置是AB，中点为L，从“过圆的中心和弦的中点的直线必垂直于弦”的事实，可证“动弦AB的中点L，常在过圆心O而垂直于这弦的直线 xy 上”，这时如果我们就下结论说“所求轨迹为直线 xy”，无疑问也造成了错误。因动弦常在圆内，其中点不会运动到圆外，因此只有直线 xy 上的一部分点（线段PQ）适合条件，所

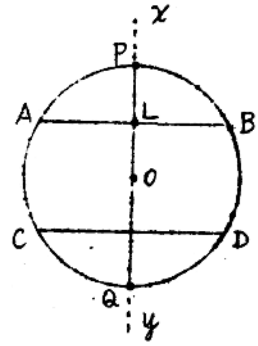

图 2—2

求轨迹只能说是线段PQ。

从这两个例子我们看出，对轨迹问题，如果只考虑①而不考虑②，就只注意到曲线上的点能适合指定条件，而未注意到适合指定条件的点也许不全在这曲线上，致使求到的轨迹有不充分的弊病。如果只考虑②而不考虑①，就只注意到适合条件的点在曲线上，而没注意到曲线上的点也许不完全能适合条件，致使求到的轨迹中存在着不必要的部分。因此轨迹问题必须对①、②两个方面都加以考虑，缺一不可。事实上，从命题的观点来看，轨迹的纯粹性和完备性正好是构成一对互逆命题，而互逆的两个命题一般未必是同时成立的。因此必有确凿的根据，证明了纯粹性和完备性，才能肯定这个轨迹问题可靠。当然根据原命题和其逆否命题的等效性，亦可将①和②叙述为：

①′ 凡不适合某种条件的点，都不在曲线上；

②′ 凡不在曲线上的点，都不适合某种条件。但这种叙述形式，初学者往往不易措辞得当，所以在一般情况下，还是尽量考虑①和②为好。

2　曲线和方程的对应

解析几何里既把曲线看作是按一定规律（条件）变动的点所形成的轨迹。因为变动的规律不同，所形成的轨迹也就不同，因此，可以说轨迹是说明变动规律的几何形象。在引进坐标系后，由于点完全被它的坐标所决定，因而曲线上的点的共同性质（即点的变动规律），就反映为曲线上点的坐标（x，y）所应满足的限制条件（即坐标的变动规律），它们常被表示为一个等式：

$$F(x, y)=0 \quad \text{或有时可写为}\ y=f(x)$$

而称为方程。因此可以说方程是说明变动规律的代数表现。

如上所述，同一变动规律，可以用点的轨迹来表示，也可以用坐

标所满足的方程来表示，因此，不难想象点之轨迹与坐标所满足的方程之间有一种对应关系，这种对应关系正如同点与坐标间之关系一样。这种点的坐标所满足的方程就称为对应轨迹的方程。由于点的轨迹是曲线，故和它相应的方程就叫曲线的方程。根据轨迹的纯粹性和完备性知道曲线和方程的关系具体说来是：

在给定的平面直角坐标系下，如果根据曲线上的点所满足的条件列出点的坐标 x 和 y 之间的一个方程，并且这个方程和曲线之间有下面的关系：

(1) 曲线上所有点的坐标都满足这个方程。

(2) 坐标满足这个方程的所有点，都在这条曲线上。

则这样的方程就称为这条曲线的方程；而这条曲线称为这个方程所确定的曲线。（或方程的图形）。

在曲线与方程之间建立了上述关系后，研究曲线的几何问题就可以转化为研究方程的代数问题了。

3 曲线和方程的转化

曲线和方程是平面解析几何一对主要矛盾，用解析法研究几何问题题必须善于处理它们之间的互相转化工作，具体的就是给出曲线如何求它的方程，反之，给出方程如果求（画出）它的曲线。

给出曲线求它的方程，一般可归纳成五个步骤，下面结合求以C为圆心，r 为半径的圆方程的例子来说明：

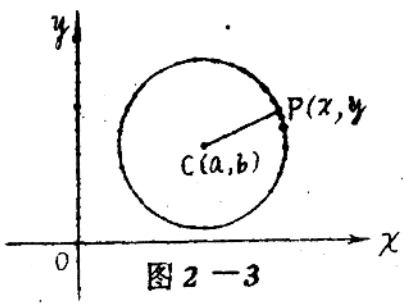

图2—3

1）如图2－3那样设置坐标系，在圆上任取一点P（x, y）；

2）$|CP|=r$；

3）$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

4）化简：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

5）证明：从求方程的过程中实际上已经证明了圆上的任意点P的坐标（x，y）适合4，中的方程。而坐标适合方程的点必在已知圆上的证明只要倒推回去就可以了。

事实上：设P_1（x_1，y_1）为适合4）中的方程的任一点，即

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2$$

则$\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2}=r$

故$|P_1C|=r$

此说明点P_1在已知圆上故4中的方程即为已知圆方程。

1）立标：在平面上建立适当的（直角）坐标系，在曲线上任取一点P（x, y）；

2）立式：根据曲线上的点所要适合的条件写出等式；

3）代换：用坐标x，y的关系式来表示上面等式；

4）化简：整理化简上面关系式，得较简方程；

5）证明：证明所得方程就是所给曲线的方程（这一步有时从略）。

已知方程，求（画出）它的曲线：一般用“描点法”其具体步骤是

(1) 解方程：解已知方程，用x表示y（或用y表示x）；

(2) 列数值表：在变数的允许值范围内，适当地给x（或y）以一系列实数值，求出y（或x）的对应实数值，列出数值表；

(3) 描点：用数值表中之对应值为坐标，画出各点；

(4) 联线：依次连接上面描出之各点而成光滑的曲线，便得这个方程的曲线。

用描点法绘制方程的曲线，若对曲线的性质没有事先掌握，所画出的曲线往往不够精确，或需画出很多点而增加许多计算。因此为了能较精确而迅速地画出方程的曲线，在画图前对方方程先做一些必要的讨论，以便掌握曲线的性质和其大致轮廓。在解析几何里，对方程的讨论，大致有如下几点：

(1) 截距：考查曲线是否与坐标轴有交点。

(2) 对称性：考查曲线是否关于坐标轴和原点对称。

(3) 范围：由方程判定 x 和 y 的允许值（即使另一变数为确定的实数的值），从而看曲线存在的范围。

(4) 无限伸张趋势：当曲线为无界曲线时，考查它无限伸张的趋势，看它有无渐近线。

三 关于直线的斜率

在用解析法研究直线的问题时斜率的概念起着重要作用。因此在学习直线的内容时首先必须对斜率概念和作用有正确和深入的理解。下面我们将对斜率的概念和在研究直线中的作用作一些说明。

1 斜率作为直线倾斜角的函数

一条直线的倾斜角是这样规定的：它是这种直线向上的方向（一条直线可以规定两个方向，这里是指指向x轴（水平轴）上半平面的那个方向）和x轴的正方向所成最小正角。也就是自x轴的正向按反时针方向旋转第一次遇到这条直线时所构成的角α。当直线平行于x轴时规定其倾斜角是0°，这是个补充定义。首先定义本身把倾斜角α的范围限制在0到π之内（$0 \leqslant \alpha < \pi$）。其次对于平面上的任意一条直线，在范围$0 \leqslant \alpha < \pi$内保证有唯一确定的倾斜角，反之给出上述范围内的一个角α，并不能确定唯一的一条直线，而是确定一族平行直线，它们的倾斜角都是α。

一条直线的倾斜角α的正切叫做这条直线的斜率，通常记为k

$$k = tg\,\alpha$$

显然斜率k是倾斜角α的函数。其定义域为$0 \leqslant \alpha < \pi$中除去$\alpha = \frac{\pi}{2}$的点。因此平行于y轴的直线（包括y轴）显然具有倾斜角，但却没有斜率。所以在用斜率讨论有关问题时，要把这种情况除掉。

除去平行y轴直线外，每一条直线都有唯一确定的斜率，平行直线具有相同的斜率，所以每一斜率实际对应一个平行线族。

2 斜率的几何意义

斜率概念刻化了直线对x轴的倾斜程度，描写了直线的方向。倾斜程度首先由倾斜角的大小表现出来，而斜率是倾斜角的函数，自然斜率也就刻化了直线的倾斜程度。用斜率表示直线的倾斜程度比用倾

斜角来表示有一个突出的好处就是它具有直接的解析表达式

$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（其中（$x_1$，$y_1$）、（$x_2$，$y_2$）是直线上不同两点的坐标，且 $x_1\neq x_2$），因此用解析法研究问题比较方便。

斜率也是确定直线的位置的一个条件，确定一条直线的位置必须而且只须两个条件。例如，已知一点和斜率，或已知在 y 轴上的截距和斜率都能唯一确定直线的位置。如何知道给出斜率是作为确定直线位置的一个条件呢？因为直线的一般方程为：$Ax+By+c=0$，当 $B\neq 0$ 时可写成斜截式

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{c}{B}\quad,$$

给出斜率 k 就等于给出需要确定的两个常数之比（$\frac{A}{B}$）

3　应用斜率判别两条直线的位置关系

对于已知两条直线的平行、垂直和相交的位置关系的判别，只要知道两条直线的斜率就足够了（当其斜率不存在时，可转而用其倾斜角来判断）。

设已知两条直线 ℓ_1，ℓ_2 的斜率分别是 k_1 和 k_2，则当 $k_1=k_2$ 时，$\ell_1 /\!/ \ell_2$；

$$\text{当 } k_1\neq k_2 \text{ 时}\begin{cases} k_1\cdot k_2=-1 \text{ 时，} \ell_1\perp\ell_2\text{；} \\ \\ k_1\cdot k_2\neq -1 \text{ 时，} \ell_1 \text{ 和 } \ell_2 \text{ 相交} \end{cases}$$

但不垂直。

4　应用斜率求相交两条直线的交角

两条直线的交角 θ 为确定起见是这样规定的：由第一条直线按逆