数学学习指导書

上　册

陳　美　廉　編

（供化学系函授生用）

（内部發行　僅供参考）

華東師范大学函授部

華东師范大学函授部出版

委托新華書店上海
邮購書店內部發行

工本費 0.42 元

目　　錄

一、指導書

二、補充材料

一 指導書

序 言

按照函授教学計划的規定化学系一年級函授生应修數学，數学这一科目所包括的范圍十分广泛，在此我們所指的一般又称为高等數学基礎，其主要內容为解析几何学及微積分学。

解析几何学簡單地說就是用代數的方法來研究几何圖形，这样我們一方面可以得到代數方程的几何解釋，同時亦可从研究代數方程得到關于几何圖形的新的性質和定理。例如：以后我們將学到 $x^2+y^2=r^2$ 表示一个圓周，研究这个方程就可知道關于圓周的一些性質。

微積分学是更广的一門數学分析的入門，它的內容十分豐富，这里牽涉到很多新的概念因而現在不可能一下子把它說清楚，簡單地說微積分学是研究微分和積分兩种运算的学問。过去我們学算術時研究數的+、−、×、÷ 四則运算。而微分和積分則是对函數進行的兩种运算，因而說函數是我們研究的主要对象。

相对于高等數学我們可統稱在中学所念的代數、几何、三角为初等數学。当然區別初等及高等數学的并不是看它在中学呢还是在高等学校講授而是由于它們各有基本特征。在此只想指出一个基本區別卽在所研究的对象上的差別。在初等數学的范圍內研究的主要是些不变的量或圖形而在高等數学內則主要是研究变量或圖形。例如学習三角時，我們解三角方程 $\sin x=\frac{1}{2}$ 得 $x=30°$, $150°$, . . . 或一般的 $x=\pm n\cdot 180°+(-1)^n\cdot 30°$, $n=0,1,2$ . . . ，但今后我們所感到兴趣的是当 x 取不同的值時，$\sin x$ 跟着怎样变化，这里 x 是变量而 $\sin x$ 也是变量。

恩格斯在自然辯証法中寫道：∟变量是數学上的轉折點，有了变量，數学里就有了运動和辯証法，有了变量，不久就需要有微積分

学。」由此可見，变量的引入对數学有着非常重大的意义，而粗糙地說函數就是几个变量之間的相關性。

接下來我們談談学習數学对学好化学的必要性。數学是学習任何一門自然科学的一个必要工具，恩格斯說「要辯証而又唯物地了解自然就必須熟悉數学。」化学既是一門自然科学当然也不能例外。化学的一个內容是研究物質的变化及其規律。例如鐳由于放射現象而蛻化的規律必須利用屬于高等數学范圍的知識來表達，又例如計算一段曲綫的弧長或一不正規几何圖形的面積的問題都將在微積分学中獲得解答。同時微積分学的知識使我們有可能从一新的观點來考察物理学中某些問題，例如質點运動的速度及加速度等，而这些都是你們以后学習物理化学的基礎。在部頒的教学大綱上已明确地規定了本課程的目的要求在于使学生掌握学習化学特別是物理化学所需要的基本數学知識，并且能正确而熟練地应用其方法來处理一些自然科学上的問題。

函授教学是自学和面授兩者的有机結合，而以自学为其基本形式。教学大綱，教学進度表，教本，学習指導書以及面授期听課筆記等是自学的內容也是指導自学的材料。

为了对本課程的目的要求以及整个內容及系統有一全面的了解，函授生必須先仔細閱讀并体会教学大綱。

接着应参照教学進度表并按照各人的具体情况訂出个人的学習計划。这个計划应包括整个学期，可以以周为單位規定每門課程学習時間，这样一个每周学習計划表既經訂成后就必須象学校內課程表一样地去遵守它，以便保証按進度自学，偶而因故未能履行時亦必須及時補上。總而言之，我們必須重視这一點，因为經驗証明这是保証順利完成学習任务的一个關鍵。

函授生学習每一單元每一章時应按照下列步驟進行：

1. 先複習一下面授時的听課筆記，粗讀一遍指導。

2. 按指導書上指示按章節讀教材或補充資料做習題。我們反对讀完一章后才做習題，为了使函授生們能一边学理論、一边熟悉它們

的应用及应用技能。

3.学完一章后再仔細体会指導內容，然后按所附複習思考題檢查自己对这一部分知識掌握程度。

4.依指示規定按時完成測驗作業。

由于目前尙未看到更合適的教本，我們采用了 В·А·Кудрявцев 和Б·П·Демидович 著 高等數学簡明教程，此書在苏联原为生物土壤地質地理系用的，因而和化学系教学大綱的要求有些地方不全相同，在本指導書后面附錄中有部分補充資料主要是解决这个問題。希望函授生們按指導所記和教本一起并用。为了函授生們閱讀及做題時的方便，我們还將本課程中所常用的初等數学中的公式彙編成一表，以供参考，關于这些公式及結果的推導可在中学教本上找到。

在自学方法方面，我們还想提出几點引起大家注意：

1.我們建議在閱讀教材時采用边讀边做摘記或提綱的方式，要注意的是这里不是要求抄書本而是訓練自己用圖或表來簡要地表示問題的重點及關鍵。

2.數学对化学系学生來說是一門工具課，但这并不等于說只要同学会解一些題就够了。我們強調要并重基本概念和解題技巧。基本概念是計算的理論基礎，不掌握基本概念，我們的計算就成了机械的套公式，甚至是盲目的計算，只有懂得公式的來龍去脈，方才知道什么時候該用它和怎样去用它。同時我們亦反对只顧理論、背定义、背定理及公式而忽視实际計算的偏向。我們不單要求有技能，还要求有技巧——熟練的运用工具（定义、定理、公式等等）。大家都知道只有通过大量的練習和辛勤的劳動才能獲得熟練的技巧。

3.每一个函授生一定都懂得实驗对学習化学的意义、練習解題就是數学的实驗，通过練習，我們掌握了运用理論解决实际問題的能力，同時也加深了我們对理論的了解。通过練習我們不單能獲得技巧，同時还帮助我們培养工作清潔整齐的習慣，这里除了要求我們做練習時字迹要恭正外，更要求准确地、詳細地示出推理步驟。这些訓練不只是數学一科的要求，而是每一个科学工作者都应具备的修养。

第一章　坐標法

I　閱讀教本第一章§1、§2；練習第一章#1，#2及補充題#2。繼續讀§3，并練習#6，#7，#9。

II　解析几何学为用代數方法來研究几何圖形及性質的一支數学。我們先学習平面解析几何学，其中研究的对象为平面上的几何圖形及其性質。

在本章中我們首先建立平面上的直角坐标系，这样我們能用數來規定點在平面上的位置，即以該點到二坐标軸的距离冠以適当的符号（坐标）來規定，換言之，平面上任一點可用一个數对來規定，同時任一數对可完全決定一點的位置，我們称**平面上的點与數对成一一对应**。

我們要求函授生通过本章的学習做到能（1）給了點，找出它的坐标，（2）給了一數对，画出平面上該點的位置及（3）应用本章內所導出的公式以解决有關的問題。

正如書上所述§2及§3的公式虽就點位于第一象限時導出，但当點位于其他象限時，結果仍然成立。例如，下圖示出點A位于第二象限內的情况。可注意此時 $AC = x_2 - x_1$ 仍成立，因 $AC = AD + DC = (-x_1) + x_2 = x_2 - x_1$。

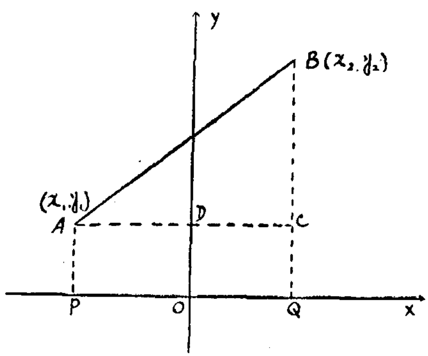

圖 1

我們建議函授生試就各种情况自行練習証明。

应用定比分割公式時应注意點 $A(x_1, y_1)$ 及點 $B(x_2, y_2)$ 的选擇，因交換了 x_1 和 x_2 及 y_1 和 y_2 時，分點 $M(x, y)$ 的坐标亦將改变，如書上第6頁上例題內若交換后，分點 $C'(x', y')$ 如下：

$$x' = \frac{4+\frac{3}{2}(-5)}{1+\frac{3}{2}} = \frac{8-15}{5} = -\frac{7}{5} = -1\frac{2}{5}$$

$$y' = \frac{-6+\frac{3}{2}(-3)}{1+\frac{3}{2}} = \frac{-12-9}{5} = \frac{-21}{5} = -4\frac{1}{5}$$

$\therefore$ C′點的坐标为 $\left(-1\frac{2}{5}, -4\frac{1}{5}\right)$。

对稱性：对称这一概念对我們并非陌生，現在讓我們來考察一下对称性反映在點的坐标上的情形如何。

我們說 M 与 M′ 兩點關于 OY 对称，若 OY 是 MM′ 的垂直平分綫。設 MM′ 交 OY 于 P 點，过 M 及 M′ 分別作 OX 的垂綫 MN 及 M′N′。設 M 的坐标为 (x, y)，則 M′ 的坐标必为 (−x, y)。因据对称性可知 NM＝N′M′ 及 PM＝M′P。根据相仿的討論可知若有 M″ 与 M 關于 OX 对称則 M″ 的坐标必为 (x, −y)。又若 M‴ 与M 關于原點 O 对称，卽謂 M, O, M‴ 三點在一直綫上，且 OM＝OM‴，試問M‴ 的坐标該若何？

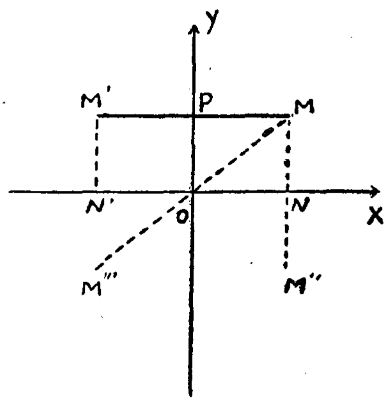

圖 2

例題：教本第 8 頁 #5。

已知：A(3,4)

求位于 OX 軸上且与 A 相距为 5 之點。

解：設M(x,y)为所求之點，則

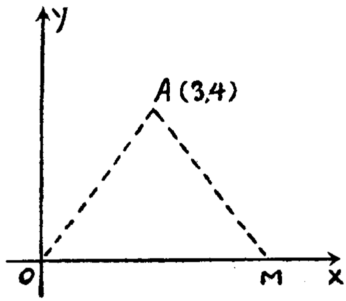

圖 3

$$AM = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=5$$

因此點位于 OX 上故必 $y=0$。

$\therefore \quad (x-3)^2+(-4)^2=25,$

$x^2-6x+9+16=25 \quad , \quad x^2-6x=0$

解得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6 \\ y=0. \end{cases}$

有兩點 O(0,0) 及 M(6,0) 適合本題要求。

Ⅲ　複習思考題:

1. 我們怎样利用笛卡儿直角坐标系來構成平面上的點和數对間的对应?

2. 在四个象限內點的坐标的符号是怎样变化的?

3. 關于 (i) OX, (ii) OY, (iii) 原點对称的點的坐标間有何關系?

4. 在平行于 (i) OX, (ii) OY 的直綫上的點的坐标有何特點?

5. 兩點間的距离公式若何? 若兩點位于同一平行于 (i) OX, (ii) OY 的直綫上時公式的形式若何?

6. 求一直綫段中點的公式若何? 为何說它是定比分割的一种特殊情况?

Ⅳ　補充題

1. 試描出与 A(2,1), B(−3,8), C(5,0) 關于 OX 对称的點及与 D(5,−6), E(−2,−2), F(0,2) 關于 OY 对称的點。

2. 已知一四角形的頂點为$(2,1)$，$(-2,8)$，$(-6,5)$，$(-2,2)$，試求其周長。

3. 試証頂點为$(1,2)$，$(3,4)$，$(-1,4)$的三角形是直角三角形。

第二章　曲綫及方程

Ⅰ　閲讀教本第二章 §1, §2, §3；練習第二章 # 1, # 2, # 7。再讀 §4, §5；練習 # 5 i, iii, 及 # 8。

Ⅱ　在上章內我們已藉坐标系把作为几何学中最基本元素，點，和代數学中元素，數，溝通了。在这个基礎上，我們將在本章內進一步考慮在解析几何学中处理問題的方法。平面曲綫作为點运動的軌迹可和包含 x, y 的方程对应起來，x, y 即为曲綫上點的坐标。这样（1）研究曲綫的方程就可了解曲綫的位置和形狀，（2）已知軌迹可得曲綫的方程。

曲綫及它的方程的關系是解析几何学的最主要的一个基本概念，同時在以后学習微積分学時亦時常要利用它，因此对这概念不允許有絲毫含糊之处。

曲綫的方程既为其上任一點的坐标所滿足，因而在導出曲綫的方程時我們常設 M(x, y) 为曲綫上任一點，然后根据已知条件（及所选定之坐标系）導出 x, y 所应滿足之關系，亦即曲綫之方程。點 M 的坐标 x, y 又称流通坐标。这种处理問題的方法是不同于初等數学中所用的，希望函授生們在讀例題時注意并習惯于它的应用。

Ⅲ　複習思考題

1. 什么叫做曲綫的方程？

2. 什么是解析几何学的基本問題？

3. 一般由已知軌迹求曲綫方程应如何進行？

4. 一般由方程作几何圖形应如何進行？

5. 怎样利用曲綫的方程的概念來決定 (i) 兩条曲綫的交點和 (ii) 一點是否在曲綫上（不必作圖）？

第三章 直 綫

I 閱讀第三章 §1、§2、§3、§4、§5，練習補充題 1a, 6、2、5、6；再讀教本 §6—§11，練習補充題 8 及第三章 #2#5#8#10。

II 直綫可說是平面上最簡單的几何圖形，因此我們把它作为第一个研究对象，而我們得到它的方程也就是含 x、y 的最簡單的一次式。同時我們也証明了每一个關于 x、y 的一次式都表示平面上一直綫。因而我們的結論是：直綫是唯一的**一次曲綫**。这是一个很有价值的結論，因为以后我們每次看到一个形式为 $Ax+By+C=0$ 的式子就可知其圖形必为一直綫，但对二次或二次以上的方程，我們一般不可能不另加討論而直接知道其形狀。

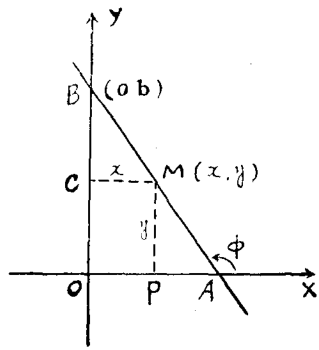

圖 4

第一節導出直綫方程的角系數式后，教本上指出若 φ 角为鈍角及 x、y 不均为正時結果依舊成立，附圖示出 φ 为鈍角但 x、y 均为正的情況。此時可过 M 作 $MP \perp OX$ 及 $CM \perp OY$、$\angle BMC$ 与 φ 互補。在直角三角形 BCM 中

$$\operatorname{tg} \angle BMC=\frac{BC}{CM}$$

但 $\angle BMC=\pi-\varphi$，$BC=b-y$，$CM=x$

$$\text{而 } \operatorname{tg}(\pi-\varphi)=-\operatorname{tg}\varphi=-k$$

$$\therefore \quad -k=\frac{b-y}{x} \text{ 或 } y=kx+b.$$

在本章內我們学到五种直綫方程的形式。我們对每一种研究之后还应綜合起來加以比較，以發現其共同之點，幷注意各各的特點。尤其应注意下列几點：

1) 每种形式都是 x、y 的一次方程式，因此最后歸納于直綫的一般式：$Ax+By+C=0$，亦即最一般的 x、y 的一次方程。应注意任一直綫方程式不論是兩點式、截距式、點斜式等均可寫成一般式，同学可自試，但并非每一条直綫均可以所有五种形式表示，例如过原點的直綫就无法用截距式表示。

2) 在几何学中我們熟知兩點唯一地決定一直綫，在解析几何学中我們要唯一地決定一直綫不一定用兩點而一般有**兩條件**就可。試就五种情况分别指出条件为何？

3) 当直綫方程寫成截距式時，我們一看就可知其与 OX 及 OY 的交點坐标，因而据兩點決定一直綫，我們立刻可作出其圖形。由于这一點，只要直綫方程內常數項不为零，我們往往先把它改寫成截距式，这样根据 a、b 的值可以很快作出該直綫的圖形。

在学習第 7 節時应注意等价方程的概念，当然与一給定直綫方程等价的方程可以任意多，这里我們可明顯地看到曲綫与方程的对应并非是一对一的。

在学習直綫的**標準式**時还应注意量 p，p 表示原點到直綫的垂綫段之長，因而我們規定 $p\geqslant 0$，沒有長度为負的綫段。因此在將直綫方程标准化時，必須使 M 与 C 異号才能保証 $MC=-p$ 成立。

必要條件和**充分條件**这兩名称在高等數学內被广泛地运用着，在本章 §2 及 §10 中我們首次遇到它們，大家必須对这兩名称的涵义仔細体会。在一个命題中我們肯定在某种条件（情况）下有某一結論成立，那末这种条件称为是充分的。反过來，若某一結論成立時必須具备这些条件，那末这些条件就叫做必要的。簡括而言：若具备「条件」則「結論」成立；条件便为充分。若有「結論」成立則必具备「条件」；条件便为必要。例如：兩直綫平行的充分条件是其角系數相等，意卽：若兩直綫的角系數相等則兩直綫必平行。兩直綫平行的必要条件是其角系數相等，意卽：若兩直綫平行則其角系數必相等。于此充分条件也就是必要条件，但一般而言，兩者是可以有差别的，以后我們將看到这种例子，因为一般說來必要条件是必不可少的，但仍可能是不足够的（不充分的）。例如：動物是人的必要条件，

但幷不是充分条件。

將§10和§2作比較后易見§10所談的只是§2內的推广，有了这样的推广对于我們今后处理問題十分方便，因为我們要鑒定兩条直綫是否平行或垂直時不一定要先找出它們的角系數。

上章內我們学到軌迹和它的方程的關系，根据曲綫方程的定义，不用画出該直綫我們就可知道某一點是否**在該直綫上**。例如，點(2,1)必在直綫 $2x+y=5$ 上因此點的坐标滿足这方程：$2\cdot2+1=5$，而點(3,1)不在該直綫上，因 $2\cdot3+1\neq5$。用同样的方法可帮助我們判定某一點是否在所給的曲綫上，我們建議函授生檢驗一下點(3,4)是否在(1) $x^2+y^2=25$，(2) $x^2-y^2=1$ 上？

利用曲綫方程的概念，我們立刻得到找兩直綫或曲綫的**交點**的方法。交點既同時位于兩綫上則其坐标必須同時滿足兩曲綫的方程，故可由联立解該曲綫方程組而得。

学習點斜式時宜注意，当給定一點而容許其斜率(卽角系數，k)变動時，我們得到直綫束的方程，表示經过該點的直綫全体，如書上第19圖所示，而若給定一k值作为所求直綫的角系數，我們亦可得无限多条直綫組成平行的**直綫族**，如右圖所示。

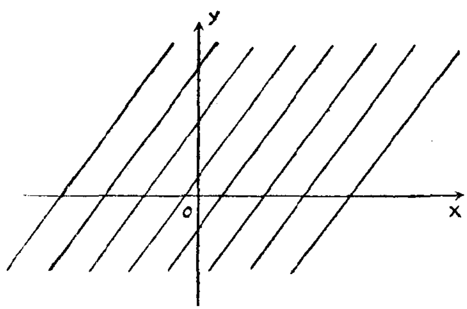

圖 5

例題：試寫出經过點M(3,4)且与直綫 $y=2x+1$ 交成45°角的直綫方程。

已知：L_1：$y=2x+1$，M(3,4)

求：过M(3,4)且与 L_1 交成45°角的直綫方程。

解：参閱附圖，我們立刻可知这問題的解答該有兩条直綫。

L_1綫的角系數 $k_1=2$。

1.設所求直綫 L_2 之角系數为 k_2，則 k_2 应滿足下式：

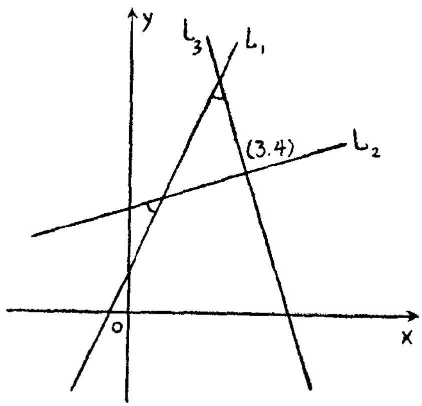

圖 6

$$tg45° = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - k_2}{1 + 2k_2}$$

$$tg45° = 1 \quad \therefore \quad 1 + 2k_2 = 2 - k_2, \quad 3k_2 = 1, \quad k_2 = \frac{1}{3}。$$

利用點斜式可得 L_2 綫方程为

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 3)$$

化簡后得　　$x - 3y + 9 = 0$。

2. 設所求直綫 L_3 之角系數为 k_3，則 k_3 应满足下式:

$$tg45° = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3} = \frac{k_3 - 2}{1 + 2k_3}$$

$\therefore$　　$1 + 2k_3 = k_3 - 2, \ k_3 = -3$。

仍利用點斜式可得 L_3 綫方程为

$$y - 4 = -3(x - 3)$$

化簡后得　　$3x + y - 13 = 0$。

Ⅲ　複習思考題

1. 你学过那几种直綫方程的形式？它們的公共特點是啥？何以

直綫又名一次曲綫?

2. $mx+ny+p=0$ 中系數 m、n、p 应滿足什么条件時原式才表示一直綫的标准式?

3. 取下列諸特殊位置的直綫方程有何特征?

a) 直綫过原點。

б) 直綫平行 OX 軸。

в) 直綫平行 OY 軸。

4. 几何学中「兩點决定一直綫」的事实在解析几何学中怎样得到擴充?

5. 怎样計算二直綫間之夾角? 怎样由而推得兩直綫平行及垂直的条件?

6. 何謂必要条件? 何謂充分条件? 試就初等數学內举例說明。

Ⅳ 補充題

1. 試作下列諸直綫: a) $y=2x$, б) $y=2x-1$, в) $3x+2=0$, г) $3y=5$。

2. 試求与 OX 軸交成角为 $\frac{2}{3}\pi$, 且交 OY 軸于 $(0,5)$ 的直綫方程。

3. 試求經过 $(1,-3)$ 且与 OX 交成角 arctg 2 的直綫方程。

4. 試求直綫 $2x-y+8=0$ 与 $2x+5y-4=0$ 間的銳角。

5. 試求过 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 且平行于 OY 軸的直綫方程。

6. 試求过點 $(5,-1)$ 而其角系數等于过 $(0,3)$ 及 $(2,0)$ 的直綫的角系數的直綫方程。

7. 試求交 OX 于 $(3,0)$ 及 OY 于 $(0,4)$ 的直綫方程, 并求其与坐标軸所成之三角形的面積。

8. 試求原點到直綫 $3x-y+7=0$ 的距离。

測驗作業(一)

Ⅰ 第一章: 補充題 1、3 及教本第一章 # 8。

Ⅱ 第二章: 教本第二章 # 3、# 6。

Ⅲ 第三章: 補充題 1б, 2、4、7 及教本第三章 # 6、# 9。