

第 二 篇 能 量 传 输

目 录

第 八 章 导 热

§ 8-1 温 度 场	8-3
§ 8-2 导热的基本定律	8-6
§ 8-3 导 热 系 数	8-7
§ 8-4 一维稳定态导热	8-10
§ 8-5 付立叶导热微分方程式	8-20
§ 8-6 二维稳定态导热	8-24
§ 8-7 图 解 分 析 法	8-34
§ 8-8 导热形状系数	8-35
§ 8-9 数 值 方 法	8-37

第 九 章 对 流 传 热

§ 9-1 对流传热简化模型	9-1
§ 9-2 对 流 传 热 系 数	9-2
§ 9-3 层流边界层能量方程	9-4
§ 9-4 热 边 界 层	9-6
§ 9-5 管内层流流动	9-16
§ 9-6 整 体 温 度	9-19
§ 9-7 管内湍流流动	9-22
热的涡流扩散率	9-24

涡流扩散率	9-25
雷诺类似	9-26
§ 9-8 因次分析和实验数据的整理	9-29
§ 9-9 强制对流传热实验关系式	9-36
柯尔本类似和 j 因子	9-40
流体横向流过单根管子	9-45
流体流过散料层	9-48

第 十 章 自 然 对 流

§ 10-1 竖板上层流传热	10-21
§ 10-2 因次分析和相似转换	10-12
§ 10-3 实验关系式	10-15

第 十 一 章 沸 腾 传 热

§ 11-1 沸腾过程	11-1
§ 11-2 膜状沸腾	11-4
§ 11-3 泡核沸腾	11-9
§ 11-4 过渡沸腾	11-12

第 十 二 章 辐 射 传 热

§ 12-1 传热的两种基本型式	12-1
§ 12-2 黑体和辐射率	12-3
§ 12-3 能量分布和辐射能力	12-5
§ 12-4 灰体和吸收率	12-10

§ 12-5	两无限大平板之间的辐射热交换	12-11
§ 12-6	角 度 系 数	12-15
§ 12-7	炉 壁 的 作 用	12-23
§ 12-8	辐射传热系数	12-27
§ 12-9	温度测量中的辐射误差	12-33
§ 12-10	气 体 辐 射	12-35
§ 12-11	火焰炉内辐射热交换	12-44

第 十 三 章 综 合 传 热

§ 13-1	综合传热系数	13-1
§ 13-2	通过炉壁的热损失	13-3
§ 13-3	园 管	13-7
§ 13-4	细 杆	13-8
§ 13-5	高炉碳矽炉底	13-14

第 十 四 章 不 稳 定 态 导 热

§ 14-1	瞬 变 导 热	14-1
§ 14-2	牛 顿 型 加 热 或 冷 却	14-1
§ 14-3	一维瞬变导热方程	14-10
§ 14-4	无 限 大 平 板 (表 面 突 然 冷 却)	14-12
§ 14-5	无 限 大 平 板 (在 恒 温 介 质 中 加 热)	14-15
§ 14-6	薄 材 和 厚 材 加 热 的 概 念	14-27
§ 14-7	半 无 限 大 固 体	14-28

§ 14-8 长时间值和短时间值的解.....14-37

§ 14-9 数值方法.....14-43

§ 14-10 图解分析法.....14-49

第十五章 凝固传热

§ 15-1 砂模.....15-1

§ 15-2 金属.....15-8

§ 15-3 凝固传热积分解法.....15-25

§ 15-4 连续铸锭传热积分解法.....15-29

第十六章 热交换器计算原理

§ 16-1 热交换器.....16-1

§ 16-2 基本方程式.....16-2

§ 16-3 热交换器效能.....16-5

§ 16-4 气体-固体料块逆流换热.....16-8

§ 16-5 蓄热室.....16-12

§ 16-6 填充床.....16-18

第十四章 不稳定态导热

§14-1 瞬变导热

在第八章中，已研究过固体内部的温度仅仅依赖于空间位置的稳定态导热。在这一章，我们要进一步研究在固体内部的温度不仅依赖于空间位置，而且依赖于时间（在任一空间位置上温度随时而连续变化）的固体内部导热，即不稳定态导热。

与稳定态导热不同，不稳定态导热是和固体的加热或冷却相联系的；当加热一固体物质时，固体不断吸收热量，温度随之上升，而固体被加热，反之即被冷却。在加热或冷却过程中，固体的内能发生变化。经历若干时间后，固体内部的温度达到了平衡状态，不再随时间而变，这时物体内部的导热属于稳定态导热。在稳定态导热情况下，固体仅仅是传递热量的中间物质，并不吸收或放出热量，固体内部的温度场和内能不再随时间而发生变化。

在达到这种平衡状态以前，固体内部的温度处于瞬变状态。这时，固体内部的导热，即为瞬变导热，便属于不稳定态导热一类。与稳态不同，瞬变热流不是个常数，一般随时间的平方根而下降。

由此可见，求解瞬变导热问题，就是要寻求物体内部任何位置上的温度和热流依赖于时间的函数关系。

研究瞬变导热在冶金工程上有着重要的意义，因为加热和冷却是冶金过程常用的工序，需要加以计算。对于金属加热和热处理作业，瞬变导热的研究尤为重要。

§14-2 牛顿型加热或冷却

我们从简单的加热或冷却过程着手研究瞬变导热。假若从开始时，在一个物体具有均匀的温度 t_i ，然后把这一物体放入处在均匀温度 t_f 下的流体介质中。还假定在加热或冷却过程中，流体介质始终保持恒定的温度 t_f ，所以 t_f 也就是物体最后的均匀温

度。在实际操作上，将物体加热到均匀温度后，自炉内取出，放在车间内任其冷却，就是这种简单过程的一个例子。在这一场合， t_f 为炉温， t_f 为车间温度。

在上述的简单瞬变导热系统，热流的特征可分为二个主要部分：

1、物体内部的导热。

2、物体表面和环境之间的对流传热或综合传热。

其中一个的热阻可能占总热阻的绝大部分，成为过程的控制因素。例如，一块很薄的平板或一个很小的物体，其导热系数又很大，则其加热或冷却往往主要由影响表面至环境的传热的条件所控制。这时，物体内部的热阻与表面热阻相比为很小，以致在加热或冷却期间，物体本身内外的温度差与表面和环境之间的温度差相比为很小的温度梯度。在这种情况下，不计其内部温度梯度值，则温度仅可认为仅仅是时间的函数。这就是最简单的加热或冷却过程。

这种最简单的情况，能量平衡式最为简单。设物体在加热或冷却期间内的任一时刻 τ 的温度为 t （在整个物体的温度均同为 t ），则其内能的变化等于质量（或体积 $V \times$ 密度 ρ ），比热 C_p 与温度对时间的变化率 $dt/d\tau$ 三者的乘积：

$$\dot{Q} = -V\rho C_p \frac{dt}{d\tau} \quad (14-1)$$

这一内能的降低，就是物体在单位时间内将热量损失于环境的速率 $\dot{Q}$ 。另一方面，物体表面向环境传热的速率又可表示为：

$$\dot{Q} = hA(t - t_f) \quad (14-2)$$

其中 h 为综合传热系数， A 为表面积， t 为物体的表面温度，在讨论的情况亦为物体的内部温度， t_f 为恒定的环境温度。对这一物体作能量平衡，使内能的变化等于热损失，得到

$$-V\rho C_p \frac{dt}{d\tau} = hA(t - t_f) \quad (14-3)$$

这就是所论情况的能量平衡式。对 $dt/d\tau$ 求解，则上式变为

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{hA}{V\rho C_p} (t - t_f). \quad (14-4)$$

式(14-4)表明，物体的加热或冷却速率正比于物体和环阱之间的温度差。将式(14-4)分离变量并积分（假定 h 和 C_p 不依赖于温度）：

$$\int_{t_i}^t \frac{dt}{t - t_f} = - \frac{hA}{V\rho C_p} \int_0^\tau d\tau$$

$$\frac{t - t_f}{t_i - t_f} = e^{-\frac{hA}{V\rho C_p} \tau} \quad (14-5)$$

这就是牛顿加热或冷却定律。在应用这一定律时，我们就说物体作牛顿型加热或冷却，或者说物体达到了牛顿型加热或冷却条件。

应注意式(14-5)的应用不受物体的几何形状的限制，可用于任何形状的物体。还应注意式(14-5)中不含物体的导热系数。由式(14-5)可知，使物体达到某一温度变化（即得到 $(t - t_f)/(t_i - t_f)$ 的某一数值）所需的时间，与传热系数 h 、物体的面积对体积的比值 A/V 成反比，而与物体的体积比热（即单位体积热容量） ρC_p 成正比。

图(14-1)为几种简单形状物体的加热或冷却。在特征尺寸相同的情况下，无限大平板、无限长圆筒（或无限长方棒）和球体（或正方体），它们加热或冷却至一某温度所需的时间彼此不同。这里所谓特征尺寸相同是指无限大平板的半厚、无限长圆筒的半径和球体的半径彼此相等。由图可见，将它们譬如冷却到不超过与环阱的热平衡的1%（即 $t - t_f / t_i - t_f = 0.01$ ）时，无限长圆筒所需的时间比相同材料的球体要长50%，而无限大平板所需的时间比相同材料的无限长圆筒要长100%。这是因为在相同的特征尺寸下，无限大平板、无限长圆筒和球体的 A/V 值之比为1:2:3的缘故。

牛顿加热或冷却定律的适用范围将在 §14-6 中讨论。

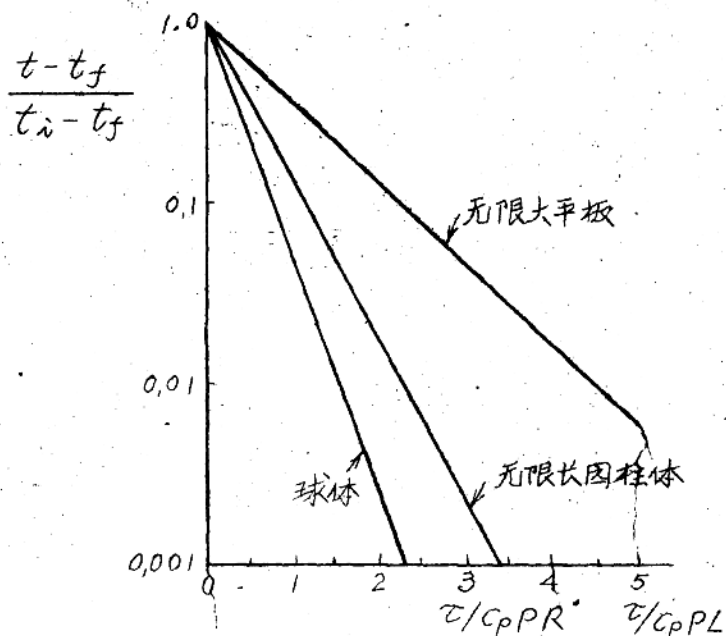


图14-1 简单形状物体的加热或冷却

例1、一长钢轴系，直径25毫米，开始温度为 20°C ，置入温度为 1100°C 的炉中加热，在5分钟内，钢轴达到 876°C 。试用牛顿加热或冷却定律，估计钢轴达到 820°C 、 1070°C 和 1090°C 所需的时间。

解：对于所述的加热过程

$$t_i = 20^{\circ}\text{C}, \quad t_f = 1100^{\circ}\text{C}$$

又当 $t = 876^{\circ}\text{C}$ 时， $\tau = 5 \text{ 分钟} = 0.083 \text{ 小时}$

代入式(14-5)，两边取对数，得

$$\begin{aligned} \frac{hA}{2.3 \sqrt{P C_p}} &= - \frac{1}{0.083} \log \frac{876 - 1100}{20 - 1100} \\ &= 8.2 \text{ 1/时} \end{aligned}$$

因此，对所述的加热过程，牛顿加热或冷却定律可表示为

$$\tau = - \frac{1}{8.2} \lg \frac{t - t_f}{t_i - t_f}$$

当 $t = 820^\circ\text{C}$ 时,

$$\tau = - \frac{1}{8.2} \lg \frac{820 - 1100}{20 - 1100} = 0.0715 \text{ 小时} \\ = 4.3 \text{ 分钟}$$

同样地, 可以求出加热到其他温度所需的时间。

应注意可将所给数据与其他数据一起计算炉子对钢轴的传热系数。既然求得

$$\frac{hA}{2.3V\rho C_p} = 8.2 \text{ 1/时},$$

又因

$$\frac{A}{V} = \frac{\pi D l}{\frac{\pi D^2}{4} l} = \frac{4}{D} = \frac{4}{0.025} = 160 \text{ 1/米}$$

对钢轴来说,

$$\rho = 9000 \text{ 公斤/米}^3, \quad C_p = 0.14 \text{ 大卡/公斤}^\circ\text{C}$$

$$\therefore h = \frac{8.2 \times 2.3 \times 9000 \times 0.14}{160} = 148 \text{ 大卡/米}^2 \cdot \text{时}^\circ\text{C}$$

例2. 钢锭 $0.6 \times 0.6 \times 1.5$ 米, 从温度为 1200°C 均热炉中取出轧制, 轧制这种钢锭所需的最低温度为 1040°C 。试估计轧制可用的时间。

假定钢锭在空炉外冷却的传热系数为 $73 \text{ 大卡/米}^2 \cdot \text{时}^\circ\text{C}$ 。

解: 轧制可用的时间为钢锭在 20° 的车间中从 1200°C 冷却到 1040°C 所需的时间, 可用式 (14-5) 进行估计。

$$t = 1040^\circ\text{C}$$

$$t_i = 1200^\circ\text{C}$$

$$t_f = 20^\circ\text{C}$$

$$h = 73 \text{ 大卡/米}^2 \cdot \text{时}^\circ\text{C}$$

$$A = 2 \times 0.6 \times 0.6 + 4 \times 0.6 \times 1.5 = 4.32 \text{ 米}^2$$

$$V = 0.6 \times 0.6 \times 1.5 = 0.54 \text{ 米}^3$$

$$\rho = 9000 \text{ 公斤/米}^3, \quad C_p = 0.14 \text{ 大卡/公斤}^\circ\text{C}$$

$$\tau = - \frac{2.3 V \rho C_p}{k A} \lg \frac{t - t_f}{t_i - t_f}$$

$$= - \frac{2.3 \times 0.54 \times 9000 \times 0.14}{73 \times 4.32} \lg \frac{1040 - 20}{1200 - 20}$$

$$= 0.3 \text{ 小时或 } 18 \text{ 分钟}$$

式(14-5)也可写成

$$\frac{t - t_f}{t_i - t_f} = e^{-\left(\frac{hL}{k}\right)\left(\frac{a\tau}{L^2}\right)} \quad (14-5a)$$

式中: hL/k —— 毕奥准数, 无因次;

$a\tau/L^2$ —— 付立叶准数, 无因次;

k —— 导热系数, 大卡/米·时·°C;

a —— 热扩散率或导温系数, 米²/时;

L —— 系统的特征尺寸, 米。

$$L = \frac{V}{A}$$

当牛顿加热或冷却定律按照式(14-5a)来应用时, 可以将各种物体的加热或冷却过程简化为单一的通用图。如图(14-2)所示。

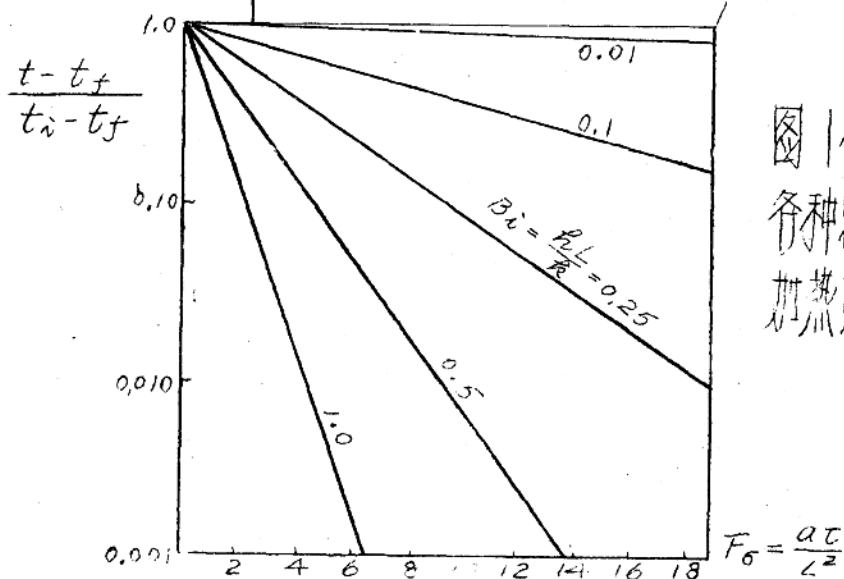


图 14-2
各种物体的
加热或冷却

如果物体只是由辐射加热或冷却, 则在热流(或冷流)恒定温度 t_s 下, 式(14-3)应写成

$$-V\rho C_p \frac{dT}{d\tau} = \sigma \epsilon A (T^4 - T_s^4) \quad (14-6)$$

$$\text{或} \quad \frac{dT}{d\tau} = - \frac{\sigma \epsilon A}{V\rho C_p} (T^4 - T_s^4) = - \frac{\sigma \epsilon}{\rho C_p L} (T^4 - T_s^4) \quad (14-7)$$

其中 L 为物体的特征尺寸, T 为绝对温度。将上式变换为无量纲方程, 为此, 令

$$M = \frac{\sigma \epsilon T_0^3 L}{k}, \quad F_0 = \frac{a\tau}{L^2},$$

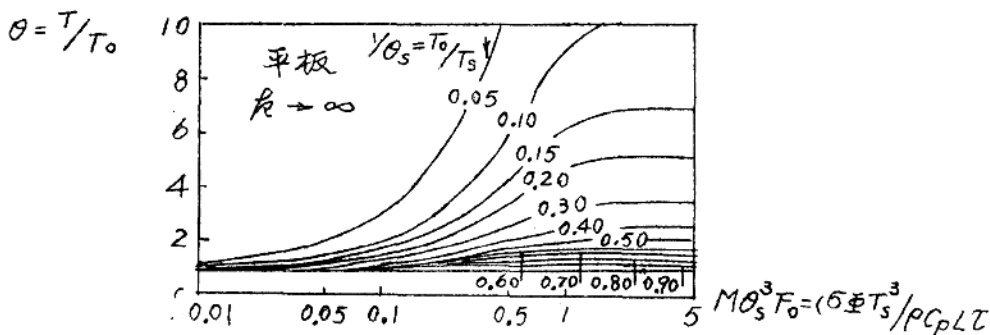
$$\theta_s = \frac{T}{T_0}, \quad \theta = \frac{T_s}{T_0}.$$

$$\eta = M\theta_s^3 F_0 = \frac{\sigma \epsilon T_0^3 L}{k} \left(\frac{T_s}{T_0}\right)^3 \cdot \frac{k}{\rho C_p} \cdot \frac{\tau}{L^2} \\ = \frac{\sigma \epsilon T_s^3 \tau}{\rho C_p L}$$

其中 T_0 为物料的初始温度。于是, 得到

$$\frac{d\theta}{d\eta} = - \left(\frac{1}{\theta_s}\right)^3 (\theta^4 - \theta_s^4) \quad (14-8)$$

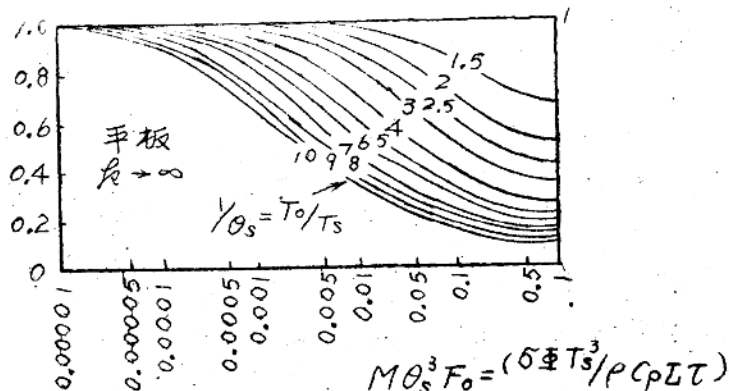
已知初始条件, 不难求得积分上式的结果, 由此绘制成图(14-3), 其中(a)和(b)依次为辐射加热和辐射冷却。



(a) 加热 $\theta_s = T_s/T_0 > 1$

14-8

$$\theta = T/T_0$$



(b) 冷却 $\theta_s = T_s/T_0 < 1$

图 14-3 平板的辐射加热和辐射冷却

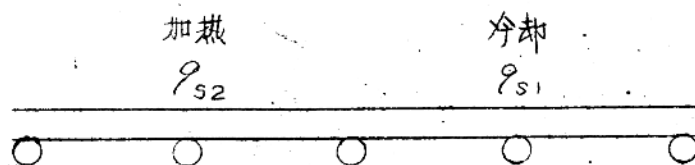
例、将一厚为 1.02 毫米的连续薄钢板，通过备有加热期和冷却期的辐射炉作热处理。这座辐射炉上部装有 3 米长的热沉段（ $\epsilon = 0.72$ ），温度为 1200°C ；接着又装有热沉段（ $\epsilon = 0.86$ ），温度为 -129°C 。设此钢板入炉温度为 20°C ，加热至 1090°C ，然后冷却至 260°C 出炉。

求：(1) 所需给料速度，

(2) 冷却段长度。

已知钢板的密度为 7780 公斤/米^3 ，

钢板的比热为 $0.11 \text{ 大卡/公斤}^\circ\text{C}$ 。



解：(1) 忽略钢板背面所损失的热量，对于加热段，所应用图

(14-3a)，其中
$$\frac{1}{Q_s} = \frac{T_0}{T_s} = \frac{20 + 273}{1200 + 273} = 0.199$$

$$Q = \frac{T}{T_0} = \frac{1090 + 273}{20 + 273} = 4.65$$

由图(14-3a), 查出

$$M\theta_s^3 F_0 = \frac{5\phi T_s^3 \tau}{\rho C_p L} = 0.980$$

于是, 加热时间为

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{0.980 \rho C_p L}{5\phi T_s^3} = \frac{(0.980)(7780)(0.11)(0.00102)}{(4.88 \times 10^{-8})(0.72)(1200 + 273)^3} \\ &= 0.00764 \text{ 时} = 27.5 \text{ 秒} \end{aligned}$$

故给料速度为

$$\frac{3 \text{ 米}}{27.5 \text{ 秒}} = 0.109 \text{ 米/秒}$$

(2) 对于冷却段

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{T_0}{T_s} = \frac{1090 + 273}{-129 + 273} = 9.46$$

$$Q = \frac{T}{T_0} = \frac{260 + 273}{1090 + 273} = 0.39$$

于是, 由图(14-3b)查出

$$M\theta_s^3 F_0 = 0.0064$$

由此求出冷却时间

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{(0.0064)(7780)(0.11)(0.00102)}{(4.88 \times 10^{-8})(0.86)(-129 + 273)^3} \\ &= 0.0448 \text{ 时} = 161 \text{ 秒} \end{aligned}$$

故所需冷却段长度为

$$0.109 \times 161 = 17.5 \text{ 米}$$

§14-3 一维瞬变导热方程

上一节所讨论的，是一种理想的情况。实际上，在加热或冷却过程中，物体内部有着不均匀的温度分布。考虑到这一点，牛顿加热或冷却定律便不适用，而必须取一微元体进行分析。

对于一维瞬变导热系统，温度仅为空间坐标 x 和时间 τ 的函数，即

$$t = f(x, \tau) \quad (14-9)$$

这样，一般导热微分方程(式8-23)简化为、

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (14-10)$$

为便于问题更加清楚起见，下节专就所讨论的一维瞬变导热直接导出上式。仍然考虑如图(8-4)所示的固体，并假定导热系数 k 不依赖于温度。注意那块离热面 x 距离、厚度为 dx 的薄片，它的两侧是二个等温面。在一定的瞬间内，在 x 处的温度梯度值为 $\partial t / \partial x$ ，而在时间间隔 $d\tau$ 内，在 x 处输入的能量为 $-kA(\partial t / \partial x)d\tau$ 。在距离为 $x+dx$ 处的温度梯度值比在 x 处的温度梯度值要大一差，并可表示成

$$\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) dx$$

于是，在 $x+dx$ 处输出的能量为

$$-kA \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) dx \right) d\tau$$

而输入超过输出的能量为

$$-kA \frac{\partial t}{\partial x} dx + kA \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx \right) d\tau = kA \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx d\tau$$

这部分能量都贮存在薄片内，升高了薄片的温度。

由能量平衡，得到

$$kA \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx d\tau = \rho C_p A dx \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau$$

两端除以 $\rho C_p A dx d\tau$ ，则得

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (14-11)$$

即
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (a = \frac{k}{\rho C_p}) \quad (14-11a)$$

这是一个二阶线性偏微分方程。但就这一方程而言，它并不会含有常数项，唯一的偏微商系数（导热系数 a ）通常又假定为常数（即不依赖于温度 t 和位置 x ），这种方程在二阶偏微分方程中算是特别简单的了。

虽然如此，式(14-11a)还是不能用直接积分的方法求解。我们必须根据各种不同的数学函数的性质，选择其中能够满足这一微分方程的一些数学函数。例如，我们可以假设和尝试，假定式(14-11a)的解为

$$t = C e^{\alpha \tau} e^{\beta x} = C e^{\alpha \tau + \beta x} \quad (14-12)$$

其中 α 、 β 和 C 皆为常数。由此可得

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha t; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \beta t; \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \beta^2 t.$$

代入式(14-11a)，得

$$\alpha = a \beta^2 \quad (14-13)$$

可见常数 C 和 α 或 β 可以任意选择。倘能满足式(14-13)中常数要求，式(14-12)便是这一微分方程（式14-11a）的解。同时，在它的解（式14-12）中加上某一恒定温度 t_0 或者以 t 和某一经过适当选择的初始温度之间的温度差 Δt 来代替 t ，也还是它的解。

按照式(14-13)， $a > 0$ ，故 $\alpha > 0$ 。但是将 $\alpha > 0$ 的值代入 $\Delta t = C e^{\alpha \tau + \beta x}$ ，结果 Δt 不是随时间而下降，而是继续增大，这显然与热力学第二定律相矛盾。为避免这一点，必然要求 β^2

14-12

< 0 , 即 β 为虚数。据此, 取 $\beta = \pm i r$, 于是得到

$$\Delta t = C e^{-r^2 a \tau} e^{\pm i r x} \quad (14-14)$$

根据欧拉公式:

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix}) / (2i), \quad \cos x = (e^{ix} + e^{-ix}) / 2.$$

式(14-14)又可写成:

$$\Delta t = C_1 e^{-r^2 a \tau} \sin(r x) + C_2 e^{-r^2 a \tau} \cos(r x).$$

这种式子的任意个之和, 例如

$$\begin{aligned} \Delta t = & C_{11} e^{-r_1^2 a \tau} \sin(r_1 x) + C_{21} e^{-r_1^2 a \tau} \cos(r_1 x) \\ & + C_{12} e^{-r_2^2 a \tau} \sin(r_2 x) + C_{22} e^{-r_2^2 a \tau} \cos(r_2 x) + \dots \end{aligned} \quad (14-15)$$

也能满足微分方程(式14-11a)。因此, 式(14-11a)的解至少可写成如下几种形式:

$$\Delta t = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-r_n^2 a \tau} \sin(r_n x) \quad (14-16)$$

$$\Delta t = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-r_n^2 a \tau} \cos(r_n x) \quad (14-17)$$

$$\Delta t = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-r_n^2 a \tau} \sin(r_n x) + B_n e^{-r_n^2 a \tau} \cos(r_n x) \quad (14-18)$$

其中的常数 A_n 、 B_n 和 r_n 由所讨论情况的初始条件和边界条件来决定。

§14-4 无限大平板(表面突然被冷却)

在§14-2中, 已讨论过有限尺寸物体的加热或冷却完全由外部热阻控制而物体内部的热阻可以忽略不计的情况(牛顿型加热或冷却); 可以说这是一个极端 ($B_i \rightarrow 0$)。现在, 再讨论另一个极端 ($B_i \rightarrow \infty$), 即有限尺寸物体的加热或冷却过程完全由物体内部的热阻所控制, 而外阻(表面热阻)可以忽略不计的情况。

设有一块如图(14-4)所示的平板, 表面为无限大, 厚度为 $2L$, 放入温度为 t_f 的流体介质中冷却。平板原来各处均为温度 t_i 下, 到处温度都一样。因冷却过程完全由内阻控制, 平板表面的温度 t 马上就变为流体介质的温度 t_f , 此后并且保持不变。描述这一物理现象的微分方程为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (14-19)$$

引入过余温度 θ

$$\theta = t - t_f$$

按式(14-19)具有更普通的形式:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (14-20)$$

初始条件和边界条件:

$$\tau = 0 \text{ 时, 在 } 0 \leq x \leq 2L \text{ 处, } \theta = \theta_i = t_i - t_f \quad (14-21a)$$

$$\tau > 0 \text{ 时, 在 } x = 0 \text{ 处, } \theta = 0 \quad (14-21b)$$

$$\tau > 0 \text{ 时, 在 } x = 2L \text{ 处, } \theta = 0 \quad (14-21c)$$

如§14-3所述, 选取下列级数形式的解:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{B_n^2 a \tau}{L^2}} \cos\left(\frac{B_n x}{L}\right) \quad (14-22)$$

其中 A_n 和 B_n 为积分常数。为了按上式满足边界条件(式14-21b和式14-21c), 必须

$$B = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore \theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right]^2 a \tau} \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2L} x\right] \quad (14-23)$$

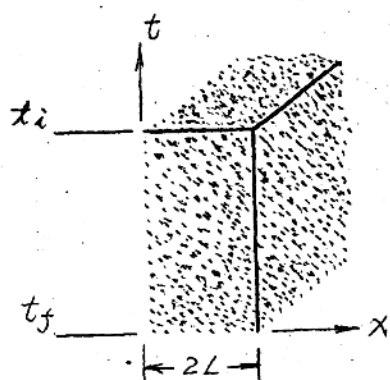


图14-4 表面突然冷却的无限大平板