2002年考研冲刺辅导

经济数学模拟试卷

（北京模考班内部资料）

2001年12月

目　录

数学(三)模拟试卷(No.1)

得 分	评卷人

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上。)

(1)已知广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$,则 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx =$ $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$______.

(2)设 a、b、c 为常数,微分方程 $y'' + ay' + by = 3e^{x}$ 有一个特解为 $y = (2 + x)e^{x} - 2e^{-2x}$,则 $(a, b, c) =$ ______.

(3)设随机变量 X 的数学期望 $EX = \mu$,方差 $DX = \sigma^2$,则由切比雪夫(*Chebyshev*)不等式,有 $P\{|X - \mu| \geqslant 3\sigma\} \leqslant$ $\frac{1}{9}$ ______.

(4)设 4 阶方阵 A 的秩为 2,则其伴随矩阵 A^* 的秩为 = ___0___.

(5)设总体 X 的方差为 1,根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本,测得样本均值为 5,则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为 ______.

得 分	评卷人

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目的要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(1)设 $f(x)$ 为可导函数,且满足条件 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(1) - f(1 - x)}{2x} = -1$,则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为

(A) 2　　(B) -1

(C) $\frac{1}{2}$　　(D) -2　　(　)

(2)广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1 + x^n} dx\ (m > 0, n > 0)$,则

(A) 当 $m < 1$ 时,收敛;　　(B) 当 $n > 1$ 时,收敛;

(C) 当 $n - m < 1$ 时,收敛;　　(D) 当 $n - m > 1$ 时,收敛.　　(　)

(3)设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$,

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,其中 A 可逆,则 B^{-1} 等于

(A) $A^{-1}P_1P_2$　　(B) $P_1A^{-1}P_2$

(C) $P_1P_2A^{-1}$　　(D) $P_2A^{-1}P_1$　　(　)

(4)设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,则下列向量组中,线性无关的是

(A) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 - a_1$

(B) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + 2a_2 + a_3$

(C) $a_1 + 2a_2, 2a_2 + 3a_3, 3a_3 + a_1$

(D) $a_1 + a_2 + a_3, 2a_1 - 3a_2 + 22a_3, 3a_1 + 5a_2 - 5a_3$　　( )

(5)设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x) = f(x)$，$F(x)$是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有

(A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(C) $F(-a) = F(a)$　　(D) $F(-a) = 2F(a) - 1$　　( )

得 分	评卷人

三、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0) = f(1) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

试证：(1)存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使 $f(\eta) = \eta$；

(2)对任意实数 λ，必存在 $\xi \in (0, \eta)$，使得

$$f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$$

得 分	评卷人

四、(本题满分 6 分)

设 $z = (x^2 + y^2)e^{\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

得分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$p_1 = 18 - 2Q_1, p_2 = 12 - Q_2$$

其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位:万元/吨)，Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量，单位:吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是

$$C = 2Q + 5$$

其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q = Q_1 + Q_2$.

(1)如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

(2)如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小。

得分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\,dx$$

得 分	评卷人

七、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续，$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$，并设在$(0,\pi)$内仅有一点 ξ 使$f(\xi) = 0$ 试证明

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

得 分	评卷人

八、(本题满分 5 分)

求微分方程 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$ 满足条件 $y|_{x=e} = 2e$ 的特解.

得 分	评卷人

九、(本题满分 8 分)

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是矩阵 A 的特征值，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为对应的特征向量，且它们线性无关，证明 $X_1+X_2+\cdots+X_m$ 仍是 A 的特征向量的充要条件是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m$.

得 分	评卷人

十、(本题满分 8 分)

已知三阶矩阵 $B\neq O$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解：

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

(1)求 λ 的值;

(2)证明 $|B|=0$.

得 分	评卷人

十一、(本题满分 8 分)

商店销售某种商品,每出售一公斤可获利 a 元,如果未能售完,则余下商品每公斤净亏损 b 元,假设该商品需求量 X 是连续型随机变量,其概率密度函数为 $f(x)(x\geqslant 0)$. 为使商店能获得最大的期望利润,商店应贮备该商品多少公斤?

得 分	评卷人

十二、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从均匀分布,求:(1) X 和 Y 的相关系数;(2)问 X 与 Y 是否独立?

数学(三)模拟试卷(No.2)

得 分	评卷人

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上。)

(1)$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2-x}}=$ $\frac{1}{e}\arctan(e^{x-1})$ ______.

(2)微分方程 $y'\mathrm{tg}x-y=5$ 满足 $y(\frac{\pi}{2})=1$ 的特解______.

(3)设 X 的密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty$$

则 $E(X)=$ ___1___ ,$D(X)=$ ___$\frac{1}{2}$___ .

(4)设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$. 则线性方程组 $A^Tx=B$ 的解是______.

(5)设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本,得样本均值 $\overline{X}=5$,则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是______.

得 分	评卷人

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目的要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(1)积分 $\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cdot\cos x\mathrm{d}x$ 的值

(A) 与 a 无关且恒为正　　(B) 与 a 无关且恒为负

(C) 恒为零　　(D) 与 a 有关　　(　)

(2)设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$,则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛　　(　)

(3)若 3 阶矩阵 $A\sim B$,A 的伴随矩阵 A^* 的特征值是 2,-3,-6,那么 $|B-E|=$

(A) 0 或 12　　(B) -6

(C) 12　　(D) 6　　(　)

(4)设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量. 若秩$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$=秩$(A)$，则线性方程组

(A)$AX=\alpha$ 必有无穷多解　　(B)$AX=\alpha$ 必有惟一解

(C)$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 仅有零解　　(D)$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解　　(　)

(5)设 A、B、C 有三个随机事件，$P(ABC)=0$，且 $0<P(C)<1$，则一定有

(A)$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

(B)$(P(A+B)|C)=P(A|C)+P(B|C)$

(C)$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

(D)$P((A+B)|\bar{C})=P(A|\bar{C})+P(B|\bar{C})$　　(　)

得 分	评卷人

三、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$. 求常数 a 和 b，使得函数 $z(x,y)=e^{ax^2+by^2}f(x,y)$ 满足恒等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial x}+4x\frac{\partial z}{\partial y}+(4-8xy)z=0.$$

得 分	评卷人

四、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t & x>0 \end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

得 分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α,β 为正常数，且 $\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小?

得 分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

计算定积分 $$I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x+\tan^2 x}.$$

得分	评卷人

七、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = 0$,$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x = 0$.

试证明:在$(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

得分	评卷人

八、(本题满分 6 分)

求解微分方程 $y'' = \dfrac{1}{k\sqrt{y}} \quad (k>0)$.

得 分	评卷人

九、(本题满分 8 分)

设 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量,求 x 和 y 应满足的条件.

得 分	评卷人

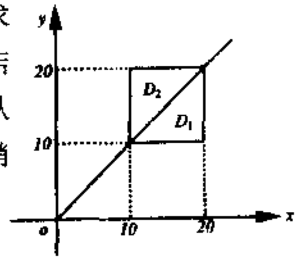
十、(本题满分 8 分)

设 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{bmatrix}$,且方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有 2 个线性无关的解向量,求 $Ax=0$ 的通解.

得 分	评卷人

十一、(本题满分 8 分)

一商店经销某种商品,每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量,且都服从区间 $[10,20]$ 上的均匀分布,商店每售出一单位商品可得利润 1000 元;若需求量超过了进货量,商店可从其他商店调剂供应,这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.



得 分	评卷人

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(0,4)$,令 $U=X+Y$, $V=X-Y$.

(1)求随机变量 U 与 V 的联合密度函数;

(2)判断 U 与 V 是否相互独立.

数学(三)模拟试卷(No.3)

得 分	评卷人

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上。)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,且 $F(0)=1, F(2)=3, F'(2)=-2$,则 $\int_0^2 x f'(x)\mathrm{d}x=$ ___-6___.

(2) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为________.

(3) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵,如果可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\a\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 1 与 2 的特征向量,则 $\boldsymbol{P}=$________.

(4) 设 A、B 是两个随机事件,$0<P(B)<1$,且 $AB=\bar{A}\bar{B}$,则 $P(A|\bar{B})+P(\bar{A}|B)=$ ___2___.

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$,而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本,则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从________分布,参数为________.

得 分	评卷人

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目的要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(1) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 可以写成

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(　　)

(2) 设常数 $\lambda>0$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 λ 有关　　(　　)

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是 n 阶可逆矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$ 的秩为 r_1,则

(A) $r>r_1$　　(B) $r<r_1$

(C) $r=r_1$　　(D) r 与 r_1 的关系视 $\boldsymbol{C}$ 而定　　(　　)

(4) 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$,则

(A) 事件 A 和 B 互不相容　　(B) 事件 A 和 B 互相对立

(C) 事件 A 和 B 互不独立　　　　　　　　(D) 事件 A 和 B 相互独立　　　　　　(　　)

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，X 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是

(A) $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{S_1}{\sqrt{n-1}}}$　　　　　　(B) $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{S_2}{\sqrt{n-1}}}$

(C) $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{S_3}{\sqrt{n}}}$　　　　　　(D) $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{S_4}{\sqrt{n}}}$　　　　　　(　　)

得分	评卷人

三、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 可导，$f'(0)=\mathrm{e}$，且对任意实数 x,y 有 $f(x+y)=\mathrm{e}^y f(x)+\mathrm{e}^x f(y)$，求函数 $f(x)$.

得分	评卷人

四、(本题满分 6 分)

设 $y=y(x),z=z(x)$ 满足 $\begin{cases}x+y+z=0\\ xyz=2\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$.

得 分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

某公司可通过电台及报纸两种方式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元)与电台广告费用 x_1(万元)及报纸广告费用 x_2(万元)之间的关系有如下经验公式：

$$R = 15 + 14x_1 + 32x_2 - 8x_1x_2 - 2x_1^2 - 10x_2^2.$$

(1)在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(2)若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

得 分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

设$\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{(x+2)^2} = a$，试将$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{x+1}$ 用 a 表示.