

第三十四分集

代 數

編著者：嚴文祥

代 數

目 次

第一章 文字數

1. 什麼是代數 2. 文字數 3. 運算符號 4. 代數式
5. 項 6. 關係符號 7. 括號 8. 什麼叫因數和係數

第二章 正數和負數

1. 本章的目的 2. 正負號 3. 正負數 4. 性質符號和
運算符號的分別 5. 絕對值 6. 加法 7. 減法 8. 乘
法 9. 除法 10. 開方

第三章 方程式

1. 什麼叫方程式 2. 等式和恆等式 3. 未知數 4. 根
5. 解方程式需用的公理 6. 解方程式 7. 釋應用問
題爲方程式法

第四章 整式

1. 代數式的運算
2. 指數
3. 什麼叫整式
4. 獨項式和
多項式
5. 單項式的加法和減法
6. 多項式的加減
法
7. 單項式的乘法
8. 次數
9. 同次式
10. 冪，降
冪排列，升冪排列
11. 單項式同多項式的乘法
12. 多
項式乘多項式
13. 單項式的除法
14. 單項式除多項式
15. 多項式除多項式

第五章 一次方程式

1. 一元一次方程式
2. 聯立二元一次方程式
3. 聯立
二元一次方程式的解法
4. 聯立方程式應用題
5. 聯
立三元一次方程式
6. 聯立三元一次方程式的解法

第六章 特別乘積和因數分解

1. 特別乘積的公式及其應用
2. 特別商的公式及其應
用
3. 因數分解法

第七章 公約式和公倍式

1. 最高公約式的求法
2. 最低公倍數的求法

第八章 分數式

1. 分數式的加法和減法 2. 分數式的乘除法

第九章 乘方，開方，無理數，虛數

1. 乘方 2. 開方 3. 開立方 4. 無理數 5. 虛數
6. 複數

第十章 一元二次方程式

1. 一元二次方程式 2. 一元二次方程式的解法 3. 一元二次方程式的應用問題

第十一章 對數

1. 什麼叫對數 2. 對數定理 3. 常用對數 4. 指標及假數 5. 對數的應用

第十二章 級數

1. 什麼叫級數 2. 等差級數 3. 求級數 4. 等級差數的和 5. 等差中項

代 數

第 一 章

文 字 數

1. 什麼是代數：

代數是算學的一科，用文字代數，而研究數的性質和運算方法，擴大算術的範圍，以期運算的簡明，和應用的普遍。

2. 文字數：

代數在算術所用的阿拉伯數碼 123……90 以外，更用拉丁字母或者希臘字母來代表數，平時所用的文字，是拉丁字母ab……xy等，這種用文字表示的數，叫“文字數”。對於以前用數字表示的數叫“數字數”。

在算術裏，每一個阿拉伯數字，只可以表一個數，如果用文字數，便沒有這種限制，就是用文字代無論什麼數都可以的。

3. 運算符號：

$+$ ， $-$ ， $\times$ ， $\div$ 四個符號，在代數中仍表示加減乘除四種運算，同算術中一樣。如：

$a+b$ 表示 a 加 b 的和，同 $6+2$ 表示 6 加 2 一樣。

注意 代數中文字數和文字數相乘的時候，其中的乘號可省去；文字數和數字數相乘的時候，乘號亦可省去，不過數字數和數字數乘的時候就不可省去了。如：

$a \times b$ 可寫 ab ， $2 \times a$ 可寫 $2a$ ， 3×4 卻不可以寫 34 。

4. 代數式：

凡用運算符號，連接數字數和文字數的算式，叫“代數式”。如：

$2b$ ， abc ， $axy+3-ac+a$ 皆是代數式。

5. 項：

一個式中有加減號分開的，連同他前面相鄰的符號就叫“項”。如：

$4a+5a$ ， $4a$ ，和 $5a$ 就是項。

6. 關係符號：

等號 $=$ ，不等號 $\neq$ ，大於 $>$ ，小於 $<$ ，等的符號，在代數上就叫關係符號。

7. 括號：

$()$, $[\]$, $\{ \}$, 這幾種括號, 在代數上也用, 和算術中一樣:

8. 什麼叫因數和係數:

許多數乘起來的一個數, 這許多個數, 就叫這一個數的“因數”。如:

$5 \times a \times b = 5ab$, 這5, a , b , 就是 $5ab$ 的因數。

連乘積中所含有的各個因數, 可任意分做兩組, 這兩組中的任一組, 得互稱為他組的“係數”。如:

$5ab$ 中 $5a$ 是 b 的係數, $5b$ 是 a 的係數。

第 二 章

正數和負數

1. 本章的目的:

在算術裏, 必須被減數大減數小才可以減, 那個減法才能通行, 若被減數小減數大了就不能通行了。這真是算術上的一個大缺點, 代數學的目的, 是在使一切算法通行無阻。正負數就是幫助打破這一種困難的利器。

2. 正負號

代正字以 $(+)$ 叫做“正號”, 代負字以 $(-)$ 叫做“負號”。

3. 正負數：

用正號(+)表示的數，叫做“正數”；用負號(-)表示的數叫做“負數”。

注意 代數的習慣，正數前面的正號，皆省去不寫，凡是前面沒有符號的數，都是正數。如：

5即(+5)

4. 性質符號和運算符號的分別：

(+)(-)這兩個符號的用法，有兩種的分別。放在一個數的前面，表示這個數的正負關係的，叫做這兩個符號為性質符號；放在二個數中間表示加減關係的，便叫他“運算符號”。

5. 絕對值：

不問這個數是正數或負數，祇看他的數字的大小，這個數目就叫有正號或者負號數的絕對值。如：

(+5)的絕對值是5，(-8)的絕對值是8。

6. 加法：

1. 要求兩個同號數的和的時候，只要先求絕對值的和，再將公有的符號寫在前。

2. 求兩個異號的和，先求他們絕對值的差，再將絕對值大的那數符號寫在前面。

用這幾個正負號相消法，則所得幾個有號數的和，叫做“代數和”。

例 1. $(+4) + (+3) = (+7)$

2. $(-7) + (-2) = (-9)$

3. $(+6) + (-3) = (+3)$

4. $(-7) + (+4) = (-3)$

注意 0是沒有(+)(-)號的分別的。

7. 減法：

演算減法的時候，祇要把減號變成加號，把減號後面的性質符號也改變一下，然後再照加法的法子演算就可也。

例 $(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = (+3)$

8. 乘法：

兩個同號數的乘積，等於此兩絕對值的積，再加以正號(+); 兩異號數的乘積，等於此兩絕對值的積，再加以負號(-)。

例 1. $(+3) \times (+4) = (+12)$

2. $(-5) \times (-5) = (+25)$

3. $(-4) \times (+2) = (-8)$

4. $(+7) \times (-6) = (-42)$

說明 同號相乘爲正；異號相乘爲負。

9. 除法：

先求兩絕對值的商。假使是同號相除的話，商的前面加以正號(+)；是異號數相除的話，商的前面加以負號(-)。

$$\text{例1. } (+8) \div (+2) = (+4)$$

$$2. (-8) \div (+2) = (-4)$$

說明 同號相除爲正，異號相除爲負。

10. 開方：

求正數或負數的根，先求其絕對值的根，但正數之偶次根正或負，正數之奇次根爲正，負數之奇次根爲負，而負數之偶次根僅能以 $\sqrt[n]{}$ 負數記之。

$$\text{例 } 1. (+5)^2 = +25 \quad \text{則} \sqrt{+25} = +5$$

$$2. (-5)^2 = +25 \quad \text{則} \sqrt{+25} = -5$$

$$3. (+5)^3 = +125 \quad \text{則} \sqrt[3]{+125} = +5$$

$$4. (-5)^3 = -125 \quad \text{則} \sqrt[3]{-125} = -5$$

第三章

方程式

1. 什麼叫方程式：

方程式是代數的主體，是解應用題的利器，所以我們對於他的性質和運算，應當要深切的了解。

若等式中的文字數，必須用特別的數值來代替他，這式的兩端才能相等，這個式就叫“方程式”。

2. 等式和恆等式：

若兩個算式表相同的數目，我們可以用等號“=”表明他們相等，如此所得的式，叫做“等式”。

如： $6+2=8$ ， $3b+3=9$ ， $a+b=7$ 皆是等式。

若等式的中間沒有文字數，或者其中文字不表什麼數，那兩式的兩端恆能相等，這種等式叫做“恆等式”。

如： $4+3=7$ ， $ab+4b=b(a+4)$ ，等都是“恆等式”。

3. 未知數：

方程式中，有一個或幾個文字的值尚未曉，這個文字就叫“未知數”。

在方程式中代替未知數的，都是用 x 和 y 代的。

如： $3x+3=9$ 中的 x 是未知數。

4. 根：

若用一個數，代替方程式的未知數，方程式變為恆等式，我們說這個數適合方程式，凡適合方程式中未知數的

數值，叫做方程式的“根”。

如：用2代替方程式 $3x+3=9$ 的 x ，方程式變為恆等式 $2 \times 3 + 3 = 9$ 。我們說3是適合這方程式的數，也就是這方程式的根。

5. 解方程式需用的公理：

1. 方程式兩端各加相等的數，兩端仍相等。

如：解方程式 $x-3=2$ 依照公理一，兩邊各加3，得 $x=5$ ，即方程式的根。

2. 方程式兩端，各減相等的數，兩端仍相等。

如：解方程式 $x+5=9$ 依公理二，兩端各減5，得 $x=4$ 即方程式的根。

由公理一二得下列法則：

（法則一）方程式的任一項，可移至他端，但須改變該項的符號。此法簡稱“移項”。

如： $2x+4=x+7$ 移項： $2x-x=7-4$

（法則二）方程式兩端的數，可各自集合，此法簡稱“合併”。

如： $3x+5x=38-6$ 合併： $8x=32$

3. 方乘式的兩端各用相等的數乘，兩端仍相等。

如：解方程式 $\frac{x}{3}=3$ 依公理三兩端都以3乘，得

$x=9$ 。即方程式的根。

4. 方程式兩端，各用相等的數除，兩端仍相等。

如：解方程式 $5x=25$ 依公理 4，兩端各以 5 除，得 $x=5$ 即方程式的根。

由公理三四得下列法則：

(法則三) 方程式一端各項分母的最小公倍數，可移乘他端各項，此法簡稱做“移除作乘”。

如： $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = x + 2$ 移除作乘 $2x + 3x = 4(x + 2)$

(法則四) 方程式一端的公共因數，可移除他端各項，此法簡稱“移乘作除”。

如： $2x=12$ 移乘作除 $x = \frac{12}{2} = 6$

注意 1. 法則三的移除作乘，同法則四的移乘作除，目的都是在使未知數的係數為“1”所以又稱謂“去係數”。

2. 用上面四個公理變更方程式的形式，其目的在使方程式的根很容易露出，至於未知數的值，並不因此改變，所以將所得的根代入原方程式，恰好適合。

6. 解方程式：

解方程先要移項，將未知數的移在一端，不含未知數的移在一端。次要合併，就是把兩端的數各自合併。第三步的手續是去係數，用未知數的係數除兩端。

例 1. 解方程式

$$2x - 14 + 3x = 38 - x - 4$$

解 $2x - 14 + 3x = 38 - x - 4$

移項 $2x + 3x + x = 38 + 14 - 4$

合併 $6x = 48$

去係數 $x = \frac{48}{6} = 8$ (答)

例2. 解方程式

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$$

解 去分母 (先求各分母的最小公倍數是6, 用6去遍乘各項) $6x + 3x + 2x = 66$

合併 $11x = 66$

去係數 (兩端用11除) $x = \frac{66}{11} = 6$ (答)

說明 欲解係數為分數的方程式的時候, 可先求諸分母的最小公倍數, 用最小公倍數遍乘式中各項, 將分母化去, 然後再照上法去解。

7. 釋應用問題為方程式法:

應用問題皆是可以方程式推求答數的, 所以我必先將釋問題為方程式的方法練習純熟。這個方法可分三步。

1. 用 x 表適當的未知數。

2. 把題中各數釋做代數式, 每式加以說明, 並化一單

位。

3. 將什麼和什麼相等的關係，用等號連接起來，就成爲方程式。

例 1. 甲乙丙三田共 135 畝，今知乙田的畝數是甲田的二倍，丙田的畝數是乙田的三倍，問三田各多少畝？

解 設 x = 甲田的畝數

那末 $2x$ = 乙田的畝數

$3(2x)$ = 丙田的畝數

但是 135 = 三畝共有的畝數

由題意得方程式：

$$x + 2x + 3(2x) = 135$$

$$\text{即 } x + 2x + 6x = 135$$

解方程式

$$x + 2x + 6x = 135$$

$$\text{合併 } 9x = 135$$

去係數（兩端各以 9 除） $x = 15$ ……甲田畝數

$$2 \times 15 = 30 \dots\dots \text{乙田畝數}$$

$$6 \times 15 = 90 \dots\dots \text{丙田畝數}$$

第 四 章

整 式

1. 代數式的運算：

代數學最大的目的，在研究解方程式，但方程式中的各部份，都是代數式組成功的，如果遇到一個方程式很複雜時，那末先要明白這些代數式的運算方法，才可以去解這個方程式。

代數式的最初運算法是加減乘除四個基本方法：

2. 指數：

若乘積中有幾個因數相同，可將重複的因數，祇寫一個，另用一個數寫在他的右肩上，去表明相同因數的個數。

如： $5aaxxx$ 可寫為 $5a^2x^3$ 讀作5乘 a 的平方， x 的立方。

寫在因數右肩上的數，如 a 上面的2， x 上面的3，都叫因數的“指數”。因數右肩上沒有指數便是1如 a 的指數就是1。

上面的5不是指數是係數。指數和係數的分別如下：

$$3x = x + x + x$$

$$x^3 = x \times x \times x$$

若 $x=2$ 則 $3x=2+2+2=6$

若 $x=2$ 則 $x^3=2 \times 2 \times 2=8$

3. 什麼叫整式：

整式的定義如下：

1. 一個代數式的分母中，不含文字數的，叫“整式”。

$x^2+7cx+4x$ ， $-\frac{a}{3}+2b$ ， $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$ 都是叫“整式”。

$\frac{b}{a}$ ， $\frac{5a}{x}+2b \times$ 都不是整式。

4. 獨項式和多項式：

代數式只有一項的，叫“獨項式”。如：

ab ， $a \times y$ ， $\frac{bc}{3}$ 都是獨項式。

許多獨項式合成的式叫“多項式”。如：

$10ab+3a^2b+4a$ ， $2x+3y$ 都是多項式。

5. 單項式的加法和減法。

同類項的加法，只要先求各係數的代數和，然後把公有文字數寫在後面，

$$\text{例 } 3b^2c+8b^2c=(3+8)b^2c=11b^2c$$

同類項的減法，只要先求各係數的較，然後把公有的文字數寫在後面。