一九八〇年中学生复习资料

数学

（二）

教学研究室
益阳行署教学辅导站编印
数理化学会

一九七九年十月

目　录

第一章　三角函数

这一章主要复习角和角的度量，三角函数的定义，同角三角函数间的关系，诱导公式以及三角函数的图象和性质。

复习这一章时应注意以下几点：

1．正确理解牢固掌握三角函数的定义和性质，并能根据三角函数的规律描出三角函数的图象。（主要是正弦，正切）。

2．熟练地掌握同角三角函数间的关系式和诱导公式，并能较灵活地运用它们进行同角三角函数间变换，求值及证明恒等式。

3．对三角函数进行运算的时候，要特别注意三角函数的符号。

4．三角函数的图象，对于三角函数的性质的研究有很大帮助，所以应该把函数的图象和函数的性质结合起来学习。

第一节　角和角的度量

一、角

角是由一条射线绕着它的端点在一个平面内旋转所得到的旋转量。射线的起始位置叫角的始边，射线的终止位置叫角的终边，绕着旋转的点叫角的顶点。

在坐标系中，一般规定原点是角的顶点，ox轴的正方向为角的始边，由于射线旋转的方向不同，为了研究或解决问题的需要，我们又规定了正角和负角。

按逆时针方向旋转所成的角为正角，按顺时针方向旋转所成的角为负角。

二、角的度量

(一)角度制：1周角＝360°，$1^\circ=60'$ $1'=60''$。

(二)弧度制：等于半径长的弧所对的圆心角叫做一弧度的角。用弧度作单位来度量角（或弧）的大小的方法叫做弧度制。

圆心角(α)、半径(R)和弧长(L)有如下关系：

$$\alpha=\frac{L}{R};\quad L=\alpha R\ \ (\alpha\text{表示弧度})。$$

(三)度与弧度的换算：基本关系式是

$$180^\circ=\pi\text{弧度}\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.017453\text{弧度}；$$

$$1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ17'44.8''\ (\text{或}57.2957^\circ)。$$

几个常用角度与弧度的换算表：

度	0°	90°	180°	270°	360°	度	45°	135°	225°	315°
弧度	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	弧度	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
度	30°	150°	210°	330°		度	60°	120°	240°	300°
弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$		弧度	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$

三、区间角、终边相同的角与象限角

（一）区间角：角的量数确定在某个区间内（上），这角叫做某确定区间的角。

例 若 $0<\alpha<\pi$ 则角 α 叫作区间（0，π）内的角。

（二）终边相同的角：具有共同的始边和终边的角叫做终边相同的角。和角 α 终边相同的角写作：$k\cdot 360^\circ+\alpha$ 或 $2k\pi+\alpha$（k 为整数）

（三）象限角：置角的顶点于平面直角坐标系的坐标原点，角的始边与 ox 轴的正方向重合。在此约定下，角的终边若在第几象限，则称这个角为第几象限的角。

象限角可以用无限个区间角表示。

例如：第一象限的角 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

第二象限的角 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$

第三象限的角 $2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi$

第四象限的角 $2k\pi+\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2k\pi+2\pi$ （k 为整数）

【注意：若角的终边恰巧落在坐标轴上，这时称为轴线角。】

例 1 如果飞轮的半径是 $20cm$，在 3 分钟内旋转 1000 周，求它的角速度和飞轮边缘一点的线速度。

解：$\because$ 1 周 $=2\pi$ 弧度

$\therefore$ 1000 周 $=2\pi$ 弧度 $\times 1000=2000\pi$ 弧度

$\therefore$ 飞轮的角速度 $\omega=\dfrac{2000\pi}{60\times 3}=\dfrac{100\pi}{9}$（弧度/秒）

飞轮边缘一点的线速度

$$V=\omega R=0.2\times\frac{100\pi}{9}$$

$$=\frac{20}{9}\text{（米/秒）}$$

【注意：在应用公式$L=R\alpha$时，α一定要取弧度。】

例 2　把下列各角化成$k\cdot 360^\circ+\alpha$的形式.（k是整数 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$）

(1) 1000°　(2) -1080°　(3) -1897°

解：(1) $1000^\circ=2\cdot 360^\circ+280^\circ$

(2) $-1080^\circ=(-3)\cdot 360^\circ+0^\circ$

(3) $-1897^\circ=(-5)\cdot 360^\circ-97^\circ$

$=(-5)\cdot 360^\circ-360^\circ+360^\circ-97^\circ$

$=(-6)\cdot 360^\circ+263^\circ$

例 3　已知$\alpha=532^\circ$问α，2α，$\dfrac{\alpha}{2}$，$\dfrac{\alpha}{4}$各是第几象限角。

解：$\because$　$\alpha=532^\circ=1\cdot 360^\circ+172^\circ$

$\therefore$　α是第二象限角.

$\because$　$2\alpha=1064^\circ=2\cdot 360^\circ+344^\circ$

$\therefore$　2α是第四象限角.

$\because$　$\dfrac{\alpha}{2}=266^\circ$

$\therefore$　$\dfrac{\alpha}{2}$是第三象限角.

$$\because \frac{\alpha}{4} = 133^{\circ}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{4}是第二象限角.$$

第二节 三角函数的概念

一、坐标法定义：

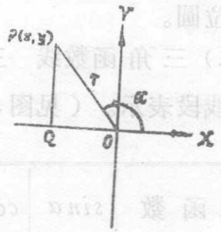
（一）定义：在直角坐标系中，ox为角α的始边，设$P(x、y)$为角α终边上任一点，o到P的距离为γ，角α的六个三角函数是：

α的正弦 $sin\,\alpha = \frac{y}{r}$

α的余割 $csc\,\alpha = \frac{r}{y}$

α的余弦 $cos\,\alpha = \frac{x}{r}$

α的正割 $sec\,\alpha = \frac{r}{x}$



4-1

α的正切 $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$　　α的余切 $ctg\,\alpha = \frac{x}{y}$

（二）三角函数的定义域：

当α的终边落在y轴上（即$\alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$）时，$x$为0，

这时$\frac{y}{x}$，$\frac{r}{x}$不存在；又当α的终边落在x轴上(即$\alpha = n\pi$)时，y为0，这时$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{y}$不存在。所以它们的定义域如下表：

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
α可取值的范围	任何实数	任何实数	$\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$	$\alpha \neq n\pi$	$\alpha \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$	$\alpha \neq n\pi$

二、三角函数线：

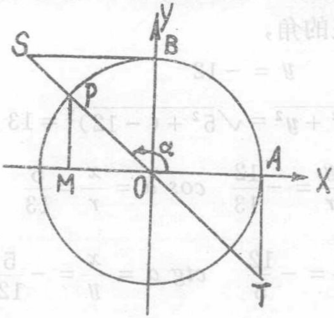
（一）单位圆　以原点为圆心，单位长的线段为半径的圆叫单位圆。

（二）三角函数线　三角函数的大小，可用单位圆中某些有向线段表示。（见图4—2）

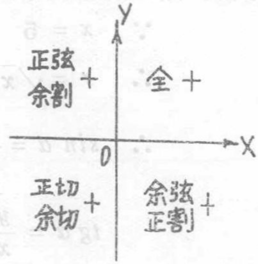
三角函数	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$
三角函数线	$\overline{MP}$	$\overline{OM}$	$\overline{AT}$	$\overline{BS}$	$\overline{OT}$	$\overline{OS}$

（三）三角函数的符号：

各象限中的角的三角函数值的符号如图4—3所示。其中图上没有指出的函数都是负值。



4-2



4-3

三、几个特殊角的三角函数值：

角度 函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$ctg\,\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

例1　已知角α终边上有一点$P(5,-12)$求这个角的三角函数值。

解：因为P点的横坐标为正，纵坐标为负1所以P点在第四象限，角α是第四象限的角，

$$\because \quad x = 5 \qquad y = -12$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{y}{r} = -\frac{12}{13} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{5}{13}$$

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{12}{5} \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y} = -\frac{5}{12}$$

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{13}{5} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y} = -\frac{13}{12}$$

例2　θ在哪些象限内，下列各式有意义：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{-\sin\theta}}$；　　(2) $lg(\cos\theta \cdot ctg\,\theta)$。

解：(1) 要$\dfrac{1}{\sqrt{-\sin\theta}}$有意义，必须$\sin\theta < 0$

故θ应是第三、四象限的角。

(2) 要使$lg(\cos\theta \cdot ctg\,\theta)$有意义，必须$\cos\theta$与$ctg\,\theta$同号，故$\theta$应在第一、二象限内。

例3　求下列各函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{1 - tg2x}$；　(2) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$；

(3) $y = lg\sin(x + \dfrac{\pi}{2})$。

解：(1) $\because \quad 1 - tg2x \neq 0 \qquad \therefore \quad tg2x \neq 1$

$$\therefore \quad 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

即 $x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$（$k$ 为整数）

又 $\because$ $2x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$（$k$ 为整数）

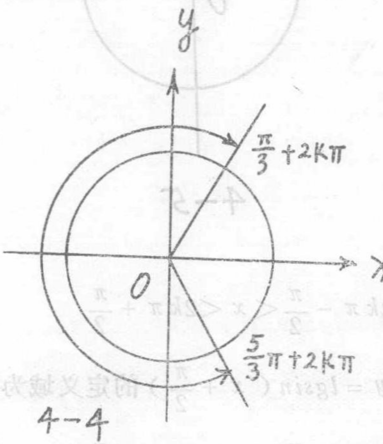
故 $y=\frac{1}{1-tg2x}$的定义域为

$x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$和 $x \neq \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

（2）$\because$ $1-2\cos x \geqslant 0$ $\therefore$ $\cos \leqslant \frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{\pi}{3}+2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$

（如图 4 — 4 ）



4-4

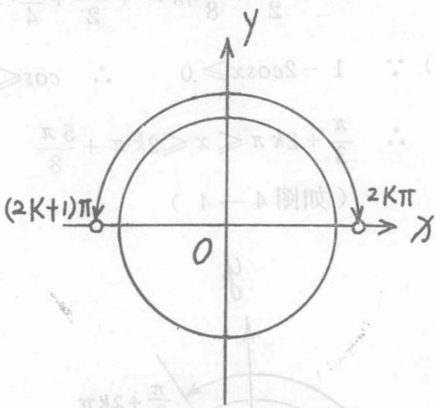
故　$y=\sqrt{1-2\cos x}$的定义域为

$$\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}$$

（3）由已知得　$0<\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 1$

$$2k\pi<x+\frac{\pi}{2}<(2k+1)\pi$$

（如图4－5）



4－5

$\therefore\quad 2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

故　$y=\lg\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的定义域为

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

【利用单位圆求三角函数定义域或解三角不等式比较直观方便。】

习 题 一

1．两角的差为11°，它们的和为1弧度，这两个角各是多少弧度？

2．一个直径是$40cm$的滑轮，以45弧度/秒的角速度旋转，求轮周上一点在5秒钟内所经过的距离。

3．把下面的度化成弧度

(1) -75°；　　(2) 420°；

(3) $67^\circ30'$；　　(4) $54^\circ45'30''$；

(5) $-750^\circ30'$。

4． 把弧度化成度：

(1) $\frac{\pi}{12}$　　(2) $\frac{3}{4}\pi$　　(3) $4\frac{1}{6}\pi$

(4) $-\frac{4}{3}\pi$　　(5) -0.27π；　　(6) $-12\frac{1}{2}\pi$．

5． 若$\alpha_1=-930^\circ$　$\alpha_2=(2k+1)180^\circ+45^\circ$．($k$为整数)。

(1) α_1，α_2是第几象限的角。

(2) $2\alpha_1$，$\frac{\alpha_1}{2}$，$\frac{\alpha_1}{4}$分别是第几象限的角。

6．如果角终边上一点的坐标是(1) $(-3, 4)$；(2)$(2, -1)$；　(3)$(0, 10)$；　(4)$(-5, 0)$．求这些角的三角函数值。

7. 确定下列各式的符号：

（1）$\sin 140^\circ - \sin 240^\circ$；　（2）$\operatorname{ctg} 300^\circ - \operatorname{ctg} 310^\circ$；

（3）$\cos 320^\circ - \cos 350^\circ$；　（4）$\dfrac{\cos 160^\circ - \cos 170^\circ}{\operatorname{tg} 155^\circ}$．

8. 说明 x 在什么范围内（$0 < x \leqslant 2\pi$）下列各式成立。

（1）$\sin x \geqslant \dfrac{1}{2}$ 且 $\operatorname{tg} x \leqslant 1$；

（2）$\sqrt{3} - 2\cos x \geqslant 0$ 且 $\sin x - \cos x < 0$；

（3）$|\sin x| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

9. 求下列各式的值：

（1）$a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \operatorname{tg} 180^\circ$；

（2）$m \cdot \operatorname{tg} 0^\circ + n \cdot \cos 90^\circ - p \cdot \sin 180^\circ - q \cdot \cos 270^\circ - r \cdot \sin 360^\circ$；

（3）$p^2 \sin \dfrac{\pi}{2} - 2pq\cos 0 - q^2 \cos \pi$；

（4）$\sin \dfrac{\pi}{2} + \sin \dfrac{\pi}{3} + \sin \dfrac{\pi}{4} + \sin \dfrac{\pi}{6} - \sin \pi - \sin \dfrac{3\pi}{2} - \sin 2\pi$；

（5）$3\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ + 2\cos 60^\circ$；

（6）$\cos 60^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ + \dfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ$；

10. 求下列各函数的定义域：

（1）$y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$；　（2）$y = \sqrt{2\sin^2 x - 1}$；

(3) $lg(2cosx-1)$； (4) $y=\sqrt{cosx+cscx}$。

第三节 同角三角函数间的关系

一、同角三角函数间的关系

由三角函数的定义可以直接导出：

1。平方关系式：

$$sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$$

$$tg^2\alpha+1=sec^2\alpha \qquad ctg^2\alpha+1=csc^2\alpha$$

2。商的关系式：

$$tg\,\alpha=\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} \qquad ctg\,\alpha=\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$$

3。倒数关系式：

$$sin\,\alpha\,csc\,\alpha=1$$

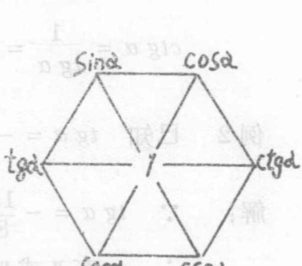
$$cos\,\alpha\cdot sec\,\alpha=1 \qquad tg\,\alpha\cdot ctg\,\alpha=1$$

同角三角间的关系式可用图4—6帮助记忆：(1) 平方关系：倒立三角形上面两角顶平方之和等于下角顶平方。(2) 商的关系：边上任一角顶等于相邻两角顶之乘积。

如$sin\,\alpha=tg\,\alpha\cdot cos\,\alpha$

即 $tg\,\alpha=\dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$。

(3) 倒数关系：对角线两端之积等于1。



4－6

二、同角三角函数间的关系式的应用。上面这些关系式，在三角运算中应用很广，可用于

1. 已知一角的三角函数值，求该角的其他三角函数值.

例 1　已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ 且 α 在第Ⅱ象限，求 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值.

解：　由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

α 在第二象限，得

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\because\quad \sin\alpha=\frac{5}{13}$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{15}\right)^2}=-\frac{12}{13}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5}$$

例 2　已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{15}{8}$，求 α 的其他各三角函的值。

解：　$\because\quad \operatorname{tg}\alpha=-\frac{15}{8}$

$\therefore$　α 在Ⅱ或Ⅲ象限

对于第二象限的角 α，可以得到：

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{-\frac{15}{8}}=-\frac{8}{15}$$

$$sec\,\alpha = -\sqrt{1+tg^2\,\alpha}$$

$$= -\sqrt{1+\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = -\frac{17}{8}$$

$$cos\,\alpha = \frac{1}{sec\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{17}{8}} = -\frac{8}{17}$$

$$sin\,\alpha = cos\,\alpha \cdot tg\,\alpha$$

$$= \left(-\frac{8}{17}\right) \times \left(-\frac{15}{8}\right) = \frac{15}{17}$$

$$csc\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha} = \frac{1}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{15}$$

对于第四象限的角 α，可以得到：

$$ctg\,\alpha = -\frac{8}{15} \quad sec\,\alpha = \frac{17}{8}$$

$$cos\,\alpha = \frac{8}{17} \quad sin\,\alpha = -\frac{15}{17} \quad csc\,\alpha = -\frac{17}{15}$$

【注意：知道一个角的一个三角函数，利用同角的三角函数间的关系，可以求出它的其他三角函数，但特别需要注意符号的正确选择。一般可分以下三种情况：

（1）如果已知角 α 所在的象限，那末就只有一解；（如例 1）；

（2）如果已知三角函数的值，但没有给出角 α 所在的象限，那么就要根据已知的函数值先确定角 α 可以存在的象限，然后再求解；（如例 2）

（3）如果已知的三角函数的值是一个用字母表示的数但