同济五版

高等数学习题全解

聚骄文化 策划

仅作为《高等数学辅导》（陈文灯主编）的赠品

- 本书答案详尽，解题规范。
- 建议同学们先独立做完练习题后，再看答案。

赠

（此书不售）

FOCUS 聚焦图书

目　录

第一章　函数与极限

习题 1-1 习题解析

1. $A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty), A \cap B = [-10, -5)$,
$A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty), A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5)$.

2. 因为 $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow B^c \Rightarrow x \in A^c \cup B^c$
所以 $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$　①
反之因为 $x \in A^c \cup B^c \Rightarrow x \in A^c$ 或 $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)^c$
所以 $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$　②
则由 ① 和 ② 得 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

3. (1) $y = f(x_0) \in f(A \cup B) = \{f(x) \mid x \in A \cup B\}$
$\Leftrightarrow x_0 \in A$ 或 $x_0 \in B \Rightarrow f(x_0) \in f(A)$ 或 $f(x_0) \in f(B) \Leftrightarrow f(x_0) \in f(A) \cup f(B)$
所以 $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ 且 $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$
故 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
(2) $f(A \cap B) = \{f(x) \mid x \in A \cap B\}\, y \in f(A \cap B)$,则 $\exists x_0 \in A \cap B$,有 $y = f(x_0)$
则 $x_0 \in A$ 且 $x_0 \in B$,即 $f(x_0) \in f(A)$ 且 $f(x_0) \in f(B)$, $y = f(x_0) \in f(A) \cap f(B)$.
故 $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. 首先证明 f 是双射
$\forall y \in Y, \exists x \in X$,使得 $x = g(y), f(x) = f \circ g(y) = y$
对于 X 中任意两个元素 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2$,要证明 $f(x_1) \neq f(x_2)$,用反证法. 如果 $f(x_1) = f(x_2)$,则 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$,即 $x_1 = x_2$,矛盾. 所以 f 是双射,根据定义 g 是 f 的逆映射.

5. (1) $\forall x \in A$,则 $y = f(x) \in f(A), f^{-1}(y) = x \in \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\} = f^{-1}(f(A))$
即 $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(2) 如果 f 是单射, $\forall x \in f^{-1}(f(A)), \exists y \in f(A)$,有 $f^{-1}(y) = x$,即 $f(x) = y$
由 $x' \in A, f(x') = y$. 由于是单射,则 $x = x' \in A$
$\therefore f^{-1}(f(A)) \subset A$. $\therefore f^{-1}(f(A)) = A$.

6. (1) 要使函数有定义,当且仅当 $3x + 2 \geqslant 0$,即 $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$,
所以函数 $y = \sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.
(2) 要使函数有意义,当且仅当 $1 - x^2 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,所以函数 $y = \dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域为
$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$
(3) 要使函数有意义,则要求 $x \neq 0$ 且 $1 - x^2 \geqslant 0$,即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$. 所以函数 $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为: $[-1, 0) \cup (0, 1]$.
(4) 要使函数有意义,当且仅当 $4 - x^2 > 0$,即 $-2 < x < 2$. 所以原函数的定义域为 $(-2, 2)$
(5) $[0, +\infty)$.　　(6) $\{x \mid x \neq kx + \dfrac{x}{2} - 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

(7)$[2,4]$.　　　　(8)$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9)$(-1,+\infty)$.　　　　(10)$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

7. (1) 不同. 因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

(2) 不同. 因为对应法则不同,$f(x)=x$,而 $g(x)=|x|$.

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. 因为定义域不同.

8. $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

因为 $|-2|>\frac{\pi}{3}$,所以 $\varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1－1 所示.

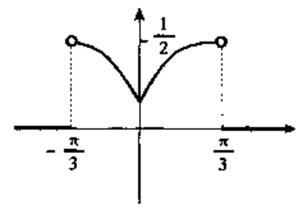

图 1－1

9. (1) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且 $x_1\leqslant x_2$

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}$$

$\therefore y(x_2)-y(x_1)\geqslant 0$　　$\therefore y=\frac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\leqslant x_2$

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\ln x_2-(x_1+\ln x_1)=(x_2-x_1)+\ln(\frac{x_2}{x_1})$$

$\because x_1x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\leqslant x_2$　$\therefore\frac{x_2}{x_1}\geqslant 1,\therefore\ln(\frac{x_2}{x_1})\geqslant 0$

$\therefore y(x_2)-y(x_1)\geqslant 0$　$\therefore y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 上单调增加.

10. 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]\xlongequal{\text{奇函数}}-f(-x_2)+f(-x_1)$$

又 $-x_2,-x_1\in(0,l)$ 且 $-x_1>-x_2$,故由 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内的单增性知:

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)>0$$

从而 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也是单调增加的.

11. (1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为两个任意的偶函数,

令　$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$,则 $F(-x)=f_1(-x_1)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为两个任意的奇函数,令　$G(x)=g_1(x)+g_2(x)$

则 $G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为任意两个偶函数,令　$F(x)=f_1(x)f_2(x)$

则 $F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为任意两个奇函数,令　$G(x)=g_1(x)g_2(x)$

则　$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=G(x)$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为任一偶函数,而 $g(x)$ 为任一奇函数,令　$T(x)=f(x)g(x)$

则　$T(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)=-T(x)$

故 $T(x)$ 为奇函数.

12. (1) 因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$,所以 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$,即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) 因为 $f(-x)=(-x)[-(x)-1][-(x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$,所以

$f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$,即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数.

(6) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数.

13. (1) 是周期函数,周期 $T=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数.因为 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,所以周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

14. (1) 因为 $y=\sqrt[3]{x+1}$,所以 $x=y^3-1$,从而 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 因为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,所以 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,从而 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) $\because y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\therefore x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$

$\therefore y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为: $y=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,所以 $y=2\sin 3x$ 的反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 得 $x=\dfrac{e^y}{e}-2$,所以,所求反函数为 $y=e^{x-1}-2$

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,所以,所求反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

15. 1) 必要性

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在数 $M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X$

因而 $\qquad -M\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in X$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界(M),又有下界$(-M)$.

2) 充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1,下界 M_2,即 $M_2\leqslant f(x)\leqslant M_1, x\in X$,

令 $M=\max(|M_1|,|M_2|)$,则 $-M\leqslant M_2, M_1\leqslant M$,

因而 $-M\leqslant f(x)\leqslant M, x\in X$,即 $|f(x)|\leqslant M, x\in X$,故 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. (1) $y=\sin^2 x$, $\quad y(x_1)=\dfrac{1}{4}$, $\quad y(x_2)=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x$, $\quad y(x_1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad y(x_2)=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$, $\quad y(x_1)=\sqrt{2}$, $\quad y(x_2)=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}$, $\quad y(x_1)=1$, $\quad y(x_2)=e$.

(5) $y=e^{2x}$, $\quad y(x_1)=e^2$, $\quad y(x_2)=e^{-2}$.

17. (1)$f(x^2)$ 的定义域为$[-1,1]$.

(2)$f(\sin x)$ 的定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$,$(n=0,\pm 1,\cdots)$.

(3)$f(x+a)$ 的定义域为$[-a,1-a]$.

(4) 若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,定义域为$[a,1-a]$.若 $a>\frac{1}{2}$,则函数无定义.

18. $f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$ 即 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\text{(见图 1-2)}\\ -1, & x>0\end{cases}$

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1=e, & |x|<1\\ e^0=1, & |x|=1\text{ (见图 1-3)}\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

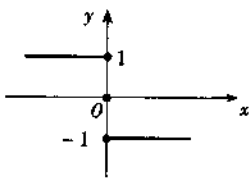

图 1-2

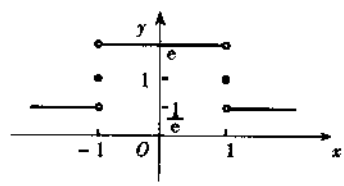

图 1-3

19. $AB=DC=\dfrac{h}{\sin 40^\circ}$

又由 $\dfrac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40^\circ\cdot h)]=S_0$

可得 $BC=\dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h$,因此 $L=\dfrac{S_0}{h}+\dfrac{2-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h$

自变量 h 的取值范围应由不等式组 $\begin{cases}h>0\\ \dfrac{S_0}{h}-\cot 40^\circ\cdot h>0\end{cases}$

确定,故定义域为$(0,\sqrt{S_0\tan 40^\circ})$.

20. (1)$p=\begin{cases}90 & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 90-(x-100)\cdot 0.01 & 100<x<1\,600\\ 75 & x\geqslant 1\,600\end{cases}$

(2)$P=(p-60)x=\begin{cases}30x & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 31x-0.01x^2 & 100<x<1\,600\\ 15x & x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

(3) 当定购 1000 台时,按(2) 的结论

厂方可获利 $P=31x-0.01x^2=[31\times 1000-0.01\times(1000)^2]$ 元 $=21000$ 元

$\therefore$ 当定购 1000 台时,厂商获利 21000 元.

习题 1-2 习题解析

1. (1)0 (2)0 (3)2 (4)1 (5) 没有极限.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.其证明如下:

因为 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$,所以对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|x_n-0|<\varepsilon$,只要$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,$|x_n-0|<\varepsilon$.　由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1000$,即若取 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1000$,就有 $|x_n-0|<0.001$.

3. (1) 对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|a_n-0|=\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$

只须 $n^2>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

于是对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,当 $n>N$ 均有　$|a_n-0|=\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$

即　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}$

要使 $\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ 只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

于是 $\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,只要 $n>N$,就有　$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

(3) 因为 $|a_n-1|=\left|\sqrt{\frac{n^2+a^2}{n}}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$

故 $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$,只须 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$　即 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$

于是对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时均有 $|a_n-1|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

(4) 因为 $|a_n-1|=|\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}-1|=\frac{1}{10^n}$,

故对 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|a_n-1|=|0.0999\cdots9-1|<\varepsilon$,只须 $10^n>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\lg\frac{1}{\varepsilon}$,于是对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\left(\lg\frac{1}{\varepsilon},0\right)$,当 $n>N$ 均有:$|a_n-1|=|\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}-1|=<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{0.999\cdots9}_{n个}=1$.

4. 对 $\forall\varepsilon>0$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 对于存在自然数 N 使得当 $n>N$ 时均有 $|u_n-a|<\varepsilon$

又因为 $\big||u_n|-|a|\big|\leqslant|u_n-a|$　所以当 $n>N$ 时均有 $\big||u_n|-|a|\big|<\varepsilon$

即 $\lim|u_n|=|a|$

反之结论不成立. 例如 $u_n=(-1)^n$ 显然没有极限,但是 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.

5. 因数列 x_n 有界,故存在 $M>0$,对一切 n 均有 $|x_n|\leqslant M$

设 $\varepsilon>0$ 为任意给定正数,由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,所以对 $\frac{\varepsilon}{M}>0$,存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时均有 $|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$,于是当 $n>N$ 时,恒有:$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$,故由定义知　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=0$.

6. 设 ε 为任意给定正数

因为 $x_{2k}\to a(k\to\infty)$,所以对此 $\varepsilon>0$,存在自然数 K_1,使得对一切自然数 $k>K_1$,均有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$

又因为 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,所以对上述 $\varepsilon>0$,存在自然数 K_2,使得对一切自然数 $k>K_2$ 均有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$

因此,取 $N=\max(2K_1,2K_2-1)$,则对任意 $n>N$ 均有 $|x_n-a|<\varepsilon$,由定义即知　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 1-3 习题解析

1. (1) 因为 $|(3x-1)-8|=3|x-3|$,因此,对 $\forall\varepsilon>0$,

要使 $|f(x)-8|<\varepsilon$,即 $3|x-3|<\varepsilon$,只须 $|x-3|<\frac{1}{3}\varepsilon$

取 $\delta=\frac{1}{3}\varepsilon$,则当 $0<|x-3|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-8|=|(3x-1)-8|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to3}(3x-1)=8$.

(2) 因为 $|f(x)-12|=|(5x+2)-12|=5|x-2|$,故 $\forall\varepsilon>0$,

要使 $|f(x)-12|<\varepsilon$,只须 $5|x-2|<\varepsilon$,即 $|x-2|<\frac{1}{5}\varepsilon$

故取 $\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$,则当 $0<|x-2|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-12|=|(5x-2)-12|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to2}(5x-2)=12$.

(3) 因为 $|f(x)-(-4)|=\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|=\left|\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right|=|x+2|=|x-(-2)|$,$(x\neq-2)$

故 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|f(x)-(-4)|<\varepsilon$,只须 $|x-(-2)|<\varepsilon$

故取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|x-(-2)|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-(-4)|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(4) 因为 $|f(x)-2|=\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|1-2x-2|=2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$,$(x\neq-1/2)$

要使 $|f(x)-2|<\varepsilon$,只要 $2\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\varepsilon$,即 $\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\frac{1}{2}\varepsilon$

故取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$,则当 $0<\left|x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-2|=\left|\frac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

2. (1) 因为 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1+x^3-x^3}{2x^3}\right|=\frac{1}{2|x|^3}$

$\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 只须 $\frac{1}{2|x|^3}<\varepsilon$,即 $|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$

故取 $X=\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时恒有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $|f(x)-0|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$,故 $\forall\varepsilon>0$,要使 $|f(x)-0|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$,即 $x>\frac{1}{\varepsilon^2}$,

故取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$,则当 $|x|>X$ 时恒有 $|f(x)-0|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

3. 由于 $x\to2$,$|x-2|\to0$,不妨设 $|x-2|<1$,即 $1<x<3$,故 $|x^2-4|=|x+2||x-2|<5|x-2|$

因此要使 $|x^2-4|<0.001$,只要 $|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002$,取 $\delta=0.0002$,

则当 $0<|x-2|<\delta$,就有 $|x^2-4|<0.001$.

4. 要使 $\left|\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|=\frac{4}{x^2+3}<0.001$,

只要 $|x|>\sqrt{\frac{4}{0.001}-3}=\sqrt{397}$,取 $X_0=\sqrt{397}$,故只要取 $X\geqslant X_0$ 均可.

5. 因为 $|f(x)-0|=||x|-0|=|x|=|x-0|$，故 $\forall\varepsilon>0$ 要使 $|f(x)-0|<\varepsilon$，只须 $|x|<\varepsilon$

取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-0|<\delta$，恒有　$|f(x)-0|=||x|-0|<\varepsilon$，所以　$\lim\limits_{x\to0}|x|=0$.

6. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$，所以　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$

故 $\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$ 不存在.

7. 设 $\varepsilon>0$ 为任意正数，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，故由定义知，对 $\varepsilon>0$，存在 $X_1>0$，使得当 $x>X_1$ 时，恒有：

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad ①$$

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，再次利用定义知，对同一 $\varepsilon>0$，存在 $X_2>0$，使得当 $-x>X_2$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon \qquad ②$$

令 $X=\max(X_1,X_2)$，则当 $|x|>X$ 时，恒有 $x>X_1$ 或 $-x>X_2$，因而①或②成立，即当 $|x|>X$ 时

恒有　$|f(x)-A|<\varepsilon$

故由定义知　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

8. 必要性：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有　$|f(x)-A|<\varepsilon$

特别地，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即　$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

充分性：设 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$

则对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

对上述 $\varepsilon>0$，同样存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta_2$ 时恒有

$|f(x)-A|<\varepsilon$，故取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

9. 当 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性定理：

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则存在常数 $M>0$ 和 $x>0$，使得当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，取 $\varepsilon\in R^r$，则存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时

$|f(x)-A|<\varepsilon\Longrightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+\varepsilon$

记 $M=|A|+\varepsilon$，则定理成立.

习题 1-4 习题解析

1. 不一定.　例如，当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=x$，$\beta(x)=2x$ 都是无穷小，但 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 不是无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

又如当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=x$，$\beta(x)=x^2$ 均是无穷小，但 $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{1}{x}$ 是无穷大.

2. (1) 设 $\varepsilon>0$ 为任意给定正数，要使　$|f(x)-0|=\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}-0\right|=|x-3|<\varepsilon$，　$x\neq-3$

只须 $0<|x-3|<\varepsilon$ 且 $x\neq-3$，因此令 $\delta=\min(\varepsilon,1)$

则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，恒有　$|f(x)-0|=\left|\dfrac{x^2-9}{x+3}\right|<\varepsilon$

由定义知，当 $x\to3$ 时，$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为无穷小.

(2) 因为 $|f(x)-0| = \left|x\sin\frac{1}{x}-0\right| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| = |x-0| \quad (x \neq 0)$

故对 $\forall \epsilon > 0$,欲使 $|f(x)-0| < \epsilon$,只须 $|x-0| < \epsilon$ 且 $x \neq 0$

因而取 $\delta = \varepsilon$,则当 $0 < |x-0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x)-0| < \varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

3. 因为 $|f(x)| = \left|\frac{1+2x}{x}\right| = \left|2+\frac{1}{x}\right| \geqslant \left|\frac{1}{x}\right| - 2$,所以对任意 $M > 0$,

欲使 $|f(x)| = \left|\frac{1+2x}{x}\right| > M$,只须 $\left|\frac{1}{x}\right| - 2 > M$

即 $|x| < \frac{1}{M+2}$,取 $\delta = \frac{1}{M+2}$,则当 $0 < |x-0| < \delta$ 时,恒有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right| > M$

所以由定义知,当 $x \to 0$ 时,$\frac{1+2x}{x}$ 为无穷大量.

令 $M = 10^4$,得 $\delta = \frac{1}{10^4+2}$,故当 $0 < |x-0| < \frac{1}{10^4+2}$ 时,恒有 $\left|\frac{1+2x}{x}\right| > 10^4$.

4. (1) 因为$\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$,而当 $x \to \infty$ 时,$\frac{1}{x}$ 为无穷小量,故由定理 1 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x} = 2.$$

(2) 由于$\frac{1-x^2}{1-x} = 1 + x\left(|x| < \frac{1}{2} \text{ 时}\right)$,而当 $x \to 0$ 时,x 为无穷小量,故由定理 1 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x} = 1.$$

5.

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$使 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\epsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 恒有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 恒有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 恒有$f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$使 当$0<x-x_0<\delta$时 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\epsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0<x-x_0<\delta$时 恒有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0<x-x_0<\delta$时 恒有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0<x-x_0<\delta$时 恒有$f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$使 当$0>x-x_0>-\delta$时 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\epsilon$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0>x-x_0>-\delta$时 恒有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0>x-x_0>-\delta$时 恒有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists\delta>0$使 当$0>x-x_0>-\delta$时 恒有$f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\epsilon>0,\exists X>0$ 使当$\lvert x\rvert>X$时 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\epsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$\lvert x\rvert>X$时 恒有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$\lvert x\rvert>X$时 恒有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$\lvert x\rvert>X$时 恒有$f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\epsilon>0,\exists X>0$ 使当$x>X$时 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\epsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$x>X$时 恒有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$x>X$时 恒有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$x>X$时 恒有$f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\epsilon>0,\exists X>0$ 使当$x<-X$时 恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\epsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$x<-X$时 恒有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$x<-X$时 恒有$f(x)>M$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当$x<-X$时 恒有$f(x)<-M$

6. 因为对任意的 $M > 0$,总存在 $x_M = 2([M]+1)\pi$,

使得 $y = (x_M) = 2([M]+1)\pi\cos 2([M]+1)\pi = 2([M]+1) > M$

所以 $y = x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内无界.

但当 $x \to +\infty$ 时,$y = x\cos x$ 不是无穷大,下面用反证法证明之.

假设 $y = x\cos x$ 是当$x \to +\infty$ 时的无穷大,则由定义,对任意 $M > 0$,总存在 $X > 0$,使得对一切满足 $|x| > X$ 的 x 均有 $|y(x)| > M$.但是 $x_X = 2([X]+1)\pi + \frac{\pi}{2} > X$ 却满足:

$|y(X_X)| = \left[2([X]+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]\cos\left[2([X]+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right] = 0 < M$

故矛盾,因而当 $x \to \infty$ 时,$y = x\cos x$ 不是无穷大量.

7. (1) 因为对任意 $M > 0$,总存在 $x_M = \dfrac{1}{2[M]\pi + \frac{\pi}{2}} \in (0,1]$,使得 $|y(x_M)| = y(x_M) = 2([M]+1)\pi + \dfrac{\pi}{2} > M$,所以 $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1]$上无界.

(2) 当 $x \to 0^+$ 时,$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大.(反证法)设 $x \to 0^+$ 时,$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷大,则由定义知对任意 $M > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $0 < x < \delta$ 时,恒有

$$|y(x)| = \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| > M$$

但是,总存在 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi} < \delta$ $\left(因为\ x_k = \dfrac{1}{2k\pi} \to 0, 当\ k \to +\infty\right)$,而

$|y(x_k)| = 2k\pi\sin\dfrac{1}{\frac{1}{2k\pi}} = 0 < M$,矛盾.

因而 $x \to 0^+$ 时,$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是无穷大量.

习题 1-5 习题解析

1. (1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3} = \dfrac{2^2+5}{2-3} = -9$;

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1} = \dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1} = 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1} = 0$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4x^2-2x+1)}{(3x+2)} = \dfrac{1}{2}$;

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h+x)(x+h-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 2 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} = 2$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = \dfrac{1}{2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 0$;

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2}{x-1} = \dfrac{2}{3}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=\dfrac{1}{5}$;

(14) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=-1.$

2. (1) 因为 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=\dfrac{0}{16}=0$,故 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=0$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}=\infty$.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=0$,因此 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x+1)=\infty$.

3. (1) 因为 $x\to0$ 时,x^2 为无穷小量,而 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$,即 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量,故

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(2) 因为在 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小量,而 $|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,即 $\arctan x$ 为有界变量,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x=0.$

4. 定理3的(2)为:

如果 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,那么 $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

$\because\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$ $\therefore f(x)=A+\alpha,g(x)=B+\beta$(其中 α、β 均为无穷小)

$\therefore f(x)\cdot g(x)=AB+(B\alpha+A\beta+\alpha\beta)$

其中 A、B 为常数,α、β 为无穷小,故 $B\alpha$、$A\beta$、$\alpha\beta$ 均为无穷小.

故 $\lim f(x)\cdot g(x)=AB=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

习题 1-6 习题解析

1. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\omega\sin\omega x}{\omega x}\xlongequal{\omega x=t}\lim\limits_{t\to0}\omega\dfrac{\sin t}{t}=\omega$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin3x}{3x}\dfrac{3}{\cos3x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{3x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{\cos3x}=3$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2}{5}\dfrac{\sin2x}{2x}\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sin5x}{5x}\right)}\right]=\dfrac{2}{5}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}x\dfrac{\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\sin x}{x}}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=2$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}}x\xlongequal{\frac{x}{2^n}=t}x\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=x$.

2. (1) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[1+(-x)^{(\frac{1}{-x})}]^{-1}\xlongequal{t=-x}\lim\limits_{t\to0}[(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-1}=\dfrac{1}{e}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{2x}}=[\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2=e^2$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2} = e^{2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{(-x)(-k)} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-k}$

$= e^{-k}$.

3. 我们仅对 $x\to x_0$ 的情形加以证明，$x\to\infty$ 的情形类似可证，其实对左右极限以及 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 的情形也完全类似.

设 ε 为任一给定正数，由于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，故由定义知，对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时恒有　$|g(x)-A|<\varepsilon$

即
$$A-\varepsilon<g(x)<A+\varepsilon \qquad ①$$

又 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，由定义，对同一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时恒有　$|h(x)-A|<\varepsilon$，

即
$$A-\varepsilon<h(x)<A+\varepsilon \qquad ②$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 ①、② 式同时成立，又因为

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),\quad (x\in \mathring{U}(x_0,r))$$

因此由 ①② 可得：$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，　即　$|f(x)-A|<\varepsilon$

故　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

4. (1) 因为 $1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}\leqslant 1+\frac{1}{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

因此由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ 存在并且　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1$.

(2) 因为 $n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}$

而　$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

(3) $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$　$(n=1,2,\cdots)$，$x_1=\sqrt{2}$

① 数列 x_n 有界：显然 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，下面证明 x_n 有上界 2.

当 $n=1$，$x_1=\sqrt{2}<2$，假定 $n=k$ 时 $x_k<2$，当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}<2$，所以由归纳法知 $x_n<2$　$(n=1,2,\cdots)$

② 数列 x_n 单调递增：

因为 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}$

由 $x_n<2$ 及上式知 $x_{n+1}-x_n>0$，所以 x_n 单调递增.

由 ①② 知　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

由于 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，即 $x_{n+1}^2=2+x_n$，两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}^2=\lim_{n\to\infty}(2+x_n),\quad 即\quad a^2=2+a$$

解方程得　$a_1=2$，$a_2=-1$（舍去），故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

(4) 当 $x>0$ 时，$1<\sqrt[n]{1+x}<1+x$，　当 $-1<x<0$ 时，$1+x<\sqrt[n]{1+x}<1$；

$\lim\limits_{x\to0}(1+x)=1$　　$\lim\limits_{x\to0}1=1$　　$\therefore\lim\limits_{x\to0}\sqrt[n]{1+x}=1$.

(5) $\because\ \frac{1}{x}-1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$　当 $x\in(0,1)$

$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{1}{x}-1)\cdot x=1,\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\frac{1}{x}=1\quad\therefore\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot[\frac{1}{x}]=1.$

习题 1-7 习题解析

1. 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-x^3}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^2}{2-x}=0$,所以 x^2-x^3 是高阶无穷小.

2. (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}(1+x+x^2)=3$,所以 $1-x^3$ 与 $1-x$ 为同阶无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x}{2}=1$,所以$\frac{1}{2}(1-x^2)$与$(1-x)$为等价无穷小.

3. (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\xlongequal{y=\arctan x}\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\tan y}=\lim\limits_{y\to0}\frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}}=1$,所以当 $x\to0$ 时,$\arctan x\sim x$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec x-1}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1$

故当 $x\to0$ 时,$\sec x-1\sim\frac{x^2}{2}$.

4. (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

(2) $\because\sin x^n\sim x^n,\sin x\sim x$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim_{x\to0}\frac{x^n}{x^m}=\lim_{x\to0}x^{n-m}=\begin{cases}0 & m<n\\1 & m=1\\\infty & m>n\end{cases}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x\sin^2x}\xlongequal{\text{等价无穷小替换}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$(等价无穷小)

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot(\cos x-1)}{\cos x\cdot\frac{x^2}{3}\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\cos x\cdot\frac{x^2}{3}}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\cos x\cdot\frac{x^2}{3}}$$

5. (1) 因为 $\lim\frac{\alpha}{\alpha}=1$,故 $\alpha\sim\alpha$.

(2) 因为 $\alpha\sim\beta$,故 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,从而 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$,即 $\beta\sim\alpha$.

(3) 因为 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$,所以 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1,\lim\frac{\gamma}{\beta}=1$,

从而 $\lim\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\gamma}{\beta}\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}\ \lim\frac{\gamma}{\beta}=1$,因此 $\alpha\sim\gamma$.

习题 1-8 习题解析

1. (1) 显然 $f(x)$ 在$[0,1]$和$[1,2]$上连续,而 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$

所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1=f(1)$,故 $f(x)$ 在 $x_0=1$ 处连续,因此,$f(x)$ 在$[0,2]$上连续.

函数图形如图 1－4 所示.

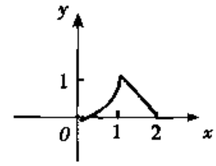

图 1-4

(2) 显然，$f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 内连续，又

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} x = -1 = f(-1)$，　$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0} 1 = 1$.

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处间断，但右连续.

函数图形如图 1－5 所示.

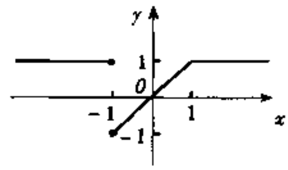

图 1-5

2. (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2} = -2$，

所以 $x = 1$ 为可去间断点（第一类间断点），如果补充定义 $y(1) = -2$，则函数在 $x = 1$ 处连续.

而　$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \infty$，所以 $x = 2$ 为第二类中的无穷间断点.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = 1$，所以 $x = 0$ 为第一类中的可去间断点，如果补充定义 $y(0) = 1$，则函数在 $x = 0$ 处连续.

因为　$\lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x} = \infty$　$(k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$，所以 $x = k\pi\ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为第二类中的无穷间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x} = 0$　$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，

所以 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为第一类中的可去间断点，如果补充定义 $y\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$，则函数在 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ 处连续.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $x = 0$ 为第二类间断点（振荡间断点）.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+} y = \lim\limits_{x\to 1^+}(3-x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} y = \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1) = 0$

所以 $x = 1$ 为第一类中的跳跃间断点.

3. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x = \begin{cases} -x, & \text{当 } |x| > 1 \\ 0, & \text{当 } |x| = 1 \\ x, & \text{当 } |x| < 1 \end{cases}$

在分段点 $x = -1$ 处，因为

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1-0}(-x) = 1$　$\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1+0} x = -1$

所以 $x = -1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

在分段点 $x = 1$ 处，因为

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} x = 1$　$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}(-x) = -1$

所以 $x = 1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点.

4. 不妨设 $f(x_0) > 0$，由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续，故　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

由定义知，对 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}f(x_0) > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}f(x_0)$

从而当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x_0) - \dfrac{1}{2}f(x_0) < f(x) < f(x_0) + \dfrac{1}{2}f(x_0)$

因而有　$f(x) > \dfrac{1}{2}f(x_0) > 0$，　$(|x - x_0| < \delta)$，故　$f(x) \neq 0, x \in (x_0, \delta)$.

5. (1) $f(x) = \tan\dfrac{2x+1}{2}\pi + \tan\dfrac{2+x}{x}\pi$;