十二年制学校初級中学課本

代　　数

DAISHU

（試教本）

第四册

（供三年級用）

人 民 教 育 出 版 社

十二年制学校初級中学課本代数(試教本)第四冊

目　　录

第十六章　二元二次方程組

16.1 二元二次方程組　我們来看下面的两个問題:

1. 一个数比另一个数多 5, 这两个数的平方和等于 625, 求这两个数.

設大数是 x, 小数是 y, 那么根据題意就得到方程組:

$$\begin{cases} x = y + 5, & (1) \\ x^2 + y^2 = 625. & (2) \end{cases}$$

解这个方程組就可以求得这两个数.

2. 一个人民公社的两个生产队收割小麦, 甲队收小麦 23,744 斤, 乙队收小麦 16,200 斤. 已知乙队的麦地比甲队的麦地少 40 亩, 并且每亩平均多收 13 斤. 求每队的麦地亩数和每亩的平均产量.

設甲队有麦地 x 亩, 每亩的平均产量是 y 斤, 那么, 乙队有麦地 $(x-40)$ 亩, 每亩的平均产量是 $(y+13)$ 斤. 根据題意就得到方程組:

$$\begin{cases} xy = 23744, & (1) \\ (x-40)(y+13) = 16200. & (2) \end{cases}$$

整理后得:

$$\begin{cases} xy = 23744, & (3) \\ xy + 13x - 40y = 16720. & (4) \end{cases}$$

解这个方程組就可以求得每队的麦地亩数和每亩的平均产量.

从上面两个問題得出的方程組来看，每个方程組里的两个方程都含有两个未知数. 第一个方程組中的方程(1)，含有未知数的項的次数都是1；第一个方程組中的方程(2)和第二个方程組中的方程(3)，含有未知数的項的次数都是2；第二个方程組中的方程(4)，含有未知数的項的次数最高的是2.

一个整式方程,如果含有m个未知数,并且含有未知数的項的次数最高的是n，这个方程就叫做**m元n次方程**. 例如,上面第一个方程組中的方程(2)以及第二个方程組中的方程(3)和(4)是二元二次方程; 方程 $x^3+y^3=9$ 和 $2x^2y+x-3y=7$ 是二元三次方程; 方程 $x^2+y-z=3$ 是三元二次方程.

由一个二元一次方程和一个二元二次方程組成的方程組,或者由两个二元二次方程組成的方程組,叫做**二元二次方程組**.

我們知道，解二元一次方程組是根据方程組同解的三个性质. 解二元二次方程組，除了要根据这些性质以外,还要根据下面的性质(4).

如果 A、B、C 都是整式,那么方程組

$$\begin{cases}A=0,\\BC=0\end{cases}$$

和方程組

$$\begin{cases}A=0,\\B=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}A=0,\\C=0\end{cases}$$

同解.

例如,方程組

$$\begin{cases}x+y=3,\\(x-y)(x-2y)=0\end{cases}$$

和方程組

$$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=3,\\x-2y=0\end{cases}$$

同解.

从方程組同解的性质(4)还可以推出:

如果 A、B、C、D 都是整式,那么方程組

$$\begin{cases}AB=0,\\CD=0\end{cases}$$

和方程組

$$\begin{cases}A=0,\\C=0;\end{cases}\quad\begin{cases}A=0,\\D=0;\end{cases}\quad\begin{cases}B=0,\\C=0;\end{cases}\quad\begin{cases}B=0,\\D=0\end{cases}$$

同解.

例如,方程組 $\begin{cases}x(x-y+3)=0,\\(y-1)(x+y-6)=0\end{cases}$

和方程組

$$\begin{cases}x=0,\\y-1=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0,\\x+y-6=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y+3=0,\\y-1=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x-y+3=0,\\x+y-6=0\end{cases}$$

同解.

练 习

1. 說明上面的結論是怎样推出来的.

2. 說出下列方程組同解的根据是什么:

(1) $\begin{cases}x+y=5,\\x^2+y^2=13\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y=5-x,\\x^2+y^2=13.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}y=5-x,\\x^2+y^2=13\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y=5-x,\\x^2+(5-x)^2=13.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+y^2=13,\\x^2+y=7\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y^2-y=6,\\x^2+y=7.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}(x-3)(x-4)=0,\\3x+4y=5\end{cases}$ 和

$$\begin{cases}x-3=0,\\3x+4y=5;\end{cases}\qquad\begin{cases}x-4=0,\\3x+4y=5.\end{cases}$$

3. 方程組 $\begin{cases}(2x-3y)(3x+4y)=0,\\(x+y-5)(x+y+4)=0\end{cases}$

和哪些方程組同解?

16.2 由一个二元一次方程和一个二元二次方程組

成的方程組　我們来看下面的方程組:

$$\begin{cases}5x^2-y^2=11,\\2x-y=1.\end{cases}$$

这个方程組依次和下面的方程組同解:

I. $\begin{cases}5x^2-y^2=11,\\y=2x-1;\end{cases}$　[方程組同解的性质(1)]

II. $\begin{cases}5x^2-(2x-1)^2=11,\\y=2x-1;\end{cases}$　[方程組同解的性质(2)]

III. $\begin{cases}(x-2)(x+6)=0,\\y=2x-1;\end{cases}$　[方程組同解的性质(1)]

IV. $\begin{cases}x-2=0,\\y=2x-1;\end{cases}$　$\begin{cases}x+6=0,\\y=2x-1;\end{cases}$

[方程組同解的性质(4)]

这两个二元一次方程組的解分别是

$$\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-6,\\y=-13.\end{cases}$$

所以原方程組的解是

$$\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-6,\\y=-13.\end{cases}$$

在解題时可以采用下面的簡单写法.

例1　解方程組:

$$\begin{cases}5x^2-y^2=11, & (1)\\2x-y=1. & (2)\end{cases}$$

解　从(2)，　　　$y=2x-1.$　　　(3)

代入(1)，得　　$5x^2-(2x-1)^2=11.$

整理后得　　　$x^2+4x-12=0.$

解这个方程，得　$x_1=2,\quad x_2=-6.$

分别代入(3)，得　$y_1=3,\quad y_2=-13.$

$$\therefore\quad \begin{cases}x_1=2,\\ y_1=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-6,\\ y_2=-13.\end{cases}$$

从这个例子可以看出，解由一个二元一次方程和一个二元二次方程組成的方程組的一般步驟是:

> **1. 把二元一次方程里的一个未知数用另一个未知数的代数式来表示;**
>
> **2. 把这个代数式代入二元二次方程里，得到一个一元方程;**
>
> **3. 解这个一元方程，求得第二个未知数的値;**
>
> **4. 把所求得的値代入第一步所得的代数式里，求得第一个未知数的値;**
>
> **5. 把求得的两个未知数的相应的値按組写在一起，就是原方程組的解.**

例 2　解方程組:

$$\begin{cases}x-3y-2=0, & (1)\\ x^2-2xy-3y^2+2x-3y+14=0. & (2)\end{cases}$$

解　从(1)，　　$x=3y+2.$　　(3)

代入(2)，得

$$(3y+2)^2-2(3y+2)y-3y^2+2(3y+2)-3y+14=0.$$

整理后得

$$11y+22=0,$$

$$\therefore\quad y=-2.$$

代入(3)，得

$$x=-4.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=-4,\\ y=-2.\end{cases}$$

练　习

1. 解方程組:

(1) $\begin{cases}x=y+5,\\ x^2+y^2=625;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-2y=1,\\ x^2-4y^2-5=0.\end{cases}$

2. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程組成的方程組至多可以有几組解？为什么？

某些方程組，經过变形以后，如果可以化成由一个二元二次方程和一个二元一次方程組成的方程組，那么就可以用上述的方法来解．但是必須注意，如果解方程組时，曾經把方程的两边同乘以一个含有未知数的代数式，或者把方程的两边同次乘方，那么最后求得的解，必須代入原方程組里的每一个方程进行檢驗．

例 3 解方程組:

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{5}{y+1}=1, & (1)\\ \dfrac{3}{x+3}=\dfrac{2}{y}. & (2)\end{cases}$$

解 把(1)的两边同乘以$(x-1)(y+1)$，整理后得

$$xy+6x-5y-10=0. \qquad (3)$$

把(2)的两边同乘以$y(x+3)$，再同除以3，得

$$y=\frac{2}{3}(x+3). \qquad (4)$$

解方程組

$$\begin{cases}xy+6x-5y-10=0,\\ y=\dfrac{2}{3}(x+3).\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x_1=3,\\ y_1=4;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=-10,\\ y_2=-\dfrac{14}{3}.\end{cases}$$

这两組解代入$(x-1)(y+1)$和$y(x+3)$都不为零，所以都是原方程組的解.

例 4 解方程組:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}, & (1)\\ x+y=10. & (2)\end{cases}$$

解 把(1)的两边平方，得

$$\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}=\frac{9}{4}. \tag{3}$$

把(3)的两边同乘以$4xy$，整理后得

$$4x^2-17xy+4y^2=0,$$

就是

$$(4x-y)(x-4y)=0.$$

解方程組

$$\begin{cases}4x-y=0,\\x+y=10;\end{cases}\qquad\begin{cases}x-4y=0,\\x+y=10.\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x_1=8,\\y_1=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=2,\\y_2=8.\end{cases}$$

把$x_1=8$，$y_1=2$代入(1)，左边$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；代入(2)，左边$=8+2=10$，所以是原方程組的解.

把$x_2=2, y_2=8$代入(1)，左边$=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}\neq\frac{3}{2}$，所以不是原方程組的解.

$$\therefore\quad\begin{cases}x=8,\\y=2.\end{cases}$$

注意如果方程組中的一个二元二次方程可以分解成两个一次因式，就分别把这两个一次因式同另一个二元一次方程組成两个二元一次方程組求解.

例5 解方程組:

$$\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=20,\\ \frac{4}{x^2}+\frac{25}{y^2}=200.\end{cases}$$

解 設$\frac{2}{x}=u$, $\frac{5}{y}=v$, 那么$\frac{4}{x^2}=u^2$, $\frac{25}{y^2}=v^2$, 原方程組就变形成

$$\begin{cases}u+v=20,\\ u^2+v^2=200.\end{cases}$$

解这个方程組, 得

$$\begin{cases}u_1=10,\\ v_1=10;\end{cases}\qquad \begin{cases}u_2=10,\\ v_2=10.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases}\frac{2}{x_1}=10,\\ \frac{5}{y_1}=10;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{2}{x_2}=10,\\ \frac{5}{y_2}=10.\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x_1=\frac{1}{5},\\ y_1=\frac{1}{2};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\frac{1}{5},\\ y_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

练 习

1. 解下列方程組时, 应当怎样把它們变形成整式方程組? 求得的整式方程組的解为什么必須进行檢驗?

(1) $\begin{cases}2x+3y=-10,\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x-\sqrt{y^2+3}=4,\\ x+y=3.\end{cases}$

2. 用换元法把下列方程組变形成由一个二元一次方程和一个二元二次方程組成的方程組，应当設什么为 u，什么为 v？

(1) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6},\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36};\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{y^2}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{\sqrt{y}}=3,\\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{y-1}=1,\\ x+y=5.\end{cases}$

习題六十四

1. 下列方程是几元几次方程？

(1) $2x^2-3y=5x-6$;　　(2) $xy=1$;

(3) $8-4y^2=7y$;　　(4) $x^2+3xy+y^2-x+3=0$.

2. 下列 x 和 y 的値是不是方程組 $\begin{cases}x+y=5,\\ x^2+y^2=13\end{cases}$ 的解？为什么？

(1) $x=2, y=3$;　　(2) $x=3, y=2$;

(3) $x=4, y=1$;　　(4) $x=-3, y=-2$.

3. 設 A、B、C、D、E 都是整式，方程組 $\begin{cases}ABC=0,\\ DE=0\end{cases}$ 和哪些方程組同解？

解下列方程組(第 4 題——第 6 題)：

4. $\begin{cases}x^2+xy=2,\\ y-3x=7.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}2x+3y=4,\\ 2x^2-xy-6y^2+y=21.\end{cases}$

6. $\begin{cases}2x^2-5xy+y^2+10x+12y=100,\\ 2x-3y-1=0.\end{cases}$

7. 下列解法是否正确？为什么？

解方程組:

$$\begin{cases}y^2=5-x^2, & (1)\\ y-x=1. & (2)\end{cases}$$

解 从(2)，$\qquad y=x+1.\qquad (3)$

代入(1),整理后得

$$x^2+x-2=0.\qquad (4)$$

解这个方程,得

$$x_1=1,\ \ x_2=-2.$$

把 $x_1=1$ 代入(1),得

$$y^2=4.$$

$$\therefore\quad y=\pm 2.$$

把 $x_2=-2$ 代入(1),得

$$y^2=1.$$

$$\therefore\quad y=\pm 1.$$

因此,方程組的解是:

$$\begin{cases}x=1,\\ y=2;\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\ y=-2;\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\ y=1;\end{cases}\ \begin{cases}x=-2,\\ y=-1.\end{cases}$$

解下列方程組(第 8 題——第 17 題):

8. $\begin{cases}(x-1)(y-1)=2,\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}=1.\end{cases}$

9. $\begin{cases}(x-3)(y+2)=(x+4)(y-5),\\ 2x^2-y^2-xy=2.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{2}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1,\\ x-y+1=0.\end{cases}$　　11. $\begin{cases}\dfrac{2x-5}{x-2}+\dfrac{2y-3}{y-1}=2,\\ 3x-4y=1.\end{cases}$

12. $\begin{cases}(x+2)(y-2)=xy,\\ \sqrt{(x+1)(y+4)}+x+3=0.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6},\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36}.\end{cases}$　　14. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=3,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=1.\end{cases}$

15. $\begin{cases}x-y=2,\\ y+z=7,\\ x^2+z^2=41.\end{cases}$　提示：把前两个方程里的 x 和 z 都用 y 的代数式来表示.

16. $\begin{cases}x+y=5,\\ x+z=6,\\ xy+xz+yz=29.\end{cases}$　　17. $\begin{cases}x-2y+z=-1,\\ 3x-5y+2z=2,\\ x^2+y^2+z^2=49.\end{cases}$

18. 解下列关于 x、y 的方程組:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4.\end{cases}$$

19. k 等于什么值时，下列方程組有相等的两組实数解?

$$\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ x-y=k.\end{cases}$$

20. 已知下列方程組有相等的两組实数解，解这方程組:

$$\begin{cases}y^2-4x-2y+1=0,\\ y=kx+2.\end{cases}$$

列出方程組解下列应用題:

21. (我国古代問題)* 长方形田的面积等于 864 平方步, 长与寬的和是 60 步. 长和寬各多少步?

22. 要把一根长 28 厘米的铁絲折起来, 圍成面积是 48 平方厘米的长方形零件. 这长方形的长和寬应当各是多少?

23. 机器制造厂制成一种新式机器, 用 875 公斤的鋼所制出的新式机器比用900公斤的鋼所制出的旧式机器多 3 台. 已知一台旧式机器比两台新式机器重 100 公斤, 一台旧式机器和一台新式机器各重多少公斤?

24. 一个打麦組打麦子, 如果先用第一台打麦机打一半, 然后用第二台打剩下的, 一共要打 9 天. 如果两台一起打, 4 天就打完了. 每一台打麦机单独打所有的麦子各要多少天?

25. 甲乙两列車从相距 360 公里的两城相向开行. 如果乙車比甲車早出发 1 小时 30 分, 那么两車就可以在路途的中点相遇; 如果同时出发, 那么出发后 5 小时两車还相距 90 公里. 求各車的速度.

16.3 由两个二元二次方程組成的方程組

这种形式的方程組, 消去一个未知数以后, 一般要得出一个一元四次方程. 例如, 方程組

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ x = y^2 - 2, \end{cases}$$

---

* 这題选自宋代楊輝著的"田亩比类乘除算法"(1275 年). 原題是: "直田积八百六十四步, 只云长闊共六十步. 問闊及长各几步? 答曰: 闊二十四步, 长三十六步."

消去 y,就得出

$$x^4+2x^2-x-1=0.$$

这个四次方程我們还不会解.

但是在某些特殊情况下，有些二元二次方程組可以化成我們会解的方程組. 下面是比較常見的几种情况.

(1) 可以消去二次項的

例1 解方程組:

$$\begin{cases}x+y+xy=5, & (1)\\ 2x+y-xy=2. & (2)\end{cases}$$

这个方程組的特点是: 两个方程都只含有一个二次項 xy.

解 (1)+(2), $3x+2y=7$,

$$\therefore \quad y=\frac{1}{2}(7-3x). \qquad (3)$$

代入(1),整理后得

$$x^2-2x+1=0.$$

解这个方程,得

$$x_1=1, \qquad x_2=1.$$

代入(3),得 $y_1=2, y_2=2$.

$$\therefore \quad \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=2;\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=2.\end{cases}$$

例2 解方程組: