

高等数学

中国人民大学数学教研室编

北京 1963年

目 录

第一篇 平面解析几何初步

第一章 坐标法	1—16
§1.1. 直线上点的坐标	1
(一)有向线段	1
(二)直线上点的坐标·数轴	2
(三)直线上两点间的距离	3
§1.2. 平面上的直角坐标系	4
§1.3. 几个基本问题的研究	6
(一)两点间的距离	6
(二)线段的定比分点	7
(三)直线的斜角和斜率	10
(四)二直线平行与垂直的条件	12
习 题	14
第二章 曲线方程	17—24
§2.1. 曲线方程的概念	17
§2.2. 建立曲线方程的一般法则	18
§2.3. 曲线方程的图形的作法	21
§2.4. 两曲线的交点	23
习 题	23
第三章 直 线	25—39
§3.1. 直线的方程	25
(一)点斜式	25
(二)斜截式	26
(三)平行于坐标轴的直线的方程	27

(四)兩点式	28
(五)截距式	29
§3.2. 直綫与一次方程	30
§3.3. 由直綫方程作它的图形	32
§3.4. 兩条直綫的交点	33
• §3.5. 一次不等式的几何意义	34
习 題	37
第四章 圓錐曲綫	40—56
§4.1. 拋物綫	40
(一)拋物綫的定义与标准方程	40
(二)拋物綫形状的研究	41
(三)拋物綫的其他最簡方程	42
§4.2. 橢 圓	43
(一)橢圓的定义与标准方程	43
(二)橢圓形状的研究	45
§4.3. 双曲綫	47
(一)双曲綫的定义与标准方程	47
(二)双曲綫形状的研究	48
• §4.4. 圓錐曲綫	53
习 題	54

第二篇 数学分析

第五章 函 数	57—83
§5.1. 常量和变量	59
§5.2. 区 間	60
§5.3. 函数概念	61
§5.4. 函数的表示法	64
(一)列表法	64
(二)公式法	64
(三)图象法	66
§5.5. 函数的几个简单的特性	66

(一)單調性	66
(二)奇偶性	67
(三)周期性	69
§5.6. 改變量	69
§5.7. 幾個最簡單的函數	71
(一)正比關係	71
(二)綫性函數	71
(三)二次函數	73
(四)反比關係	73
§5.8. 反函數	74
§5.9. 初等函數	76
§5.10. 複合函數	80
習 題	81

第六章 極限與連續84—123

§6.1. 絕對值及其性質	84
§6.2. 無窮小量	86
§6.3. 變量的極限	88
§6.4. 無窮大量	92
§6.5. 無窮小量的性質	94
§6.6. 極限的運算法則	96
§6.7. 極限存在的判定法	102
§6.8. 函數的極限	103
§6.9. 兩個重要極限	107

(一)證明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 107

(二)關於 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的存在問題109

§6.10. 無窮小量的比較	112
§6.11. 函數的連續性	114
§6.12. 連續函數的運算法則及性質	118
習 題	120

第七章 微 商.....124—154

§7.1. 引进微商概念的具体问题124

(一)速度问题124

(二)非均匀棒的密度125

§7.2. 微商的概念127

(一)微商的定义127

(二)微商的几何意义129

(三)可微性与连续性的关系130

§7.3. 微商法则131

(一)常量的微商132

(二)幂函数的微商132

(三)代数和的微商132

(四)乘积的微商133

(五)商的微商135

(六)对数函数的微商136

(七)三角函数的微商137

(八)复合函数的微商139

• (九)反函数的微商141

(十)隐函数的微商142

(十一)指数函数的微商143

(十二)任意幂函数的微商144

(十三)反三角函数的微商144

(十四)微商表145

§7.4. 高阶微商147

习 题149

第八章 用微商研究函数.....155—190

§8.1. 中值定理155

(一)罗尔定理155

(二)拉格朗日定理156

• (三)柯西定理159

§8.2. 函数单调性的条件160

§8.3. 函数的极值	162
§8.4. 最大与最小問題	168
§8.5. 曲线的凹向与拐点	172
§8.6. 渐近线	175
(一) 水平渐近线	175
(二) 铅垂渐近线	175
• (三) 斜渐近线	176
§8.7. 函数的作图法	177
• §8.8. 未定式的定值法——罗彼塔法则	181
习 题	187
第九章 微 分	191—200
§9.1. 微分概念	191
(一) 微分的定义	191
(二) 微分的几何意义	194
§9.2. 微分法则	194
§9.3. 微分形式的不变性	196
§9.4. 微分在近似计算上的应用	196
(一) 计算函数的近似值	196
(二) 误差的估计	197
习 题	199
第十章 多元函数	201—217
§10.1. 基本概念	201
§10.2. 偏微商	202
• §10.3. 全微分	204
• §10.4. 复合函数的微商 隐函数的微商	207
(一) 复合函数的微商	207
(二) 隐函数的微商	210
§10.5. 函数的极值	211
§10.6. 按最小二乘法建立经验公式	212
(一) 最小二乘法的概念	212
(二) 经验公式的建立	213

习 题	215
第十一章 不定积分	218—249
§11.1. 原函数 · 不定积分	218
§11.2. 不定积分的几何意义	221
§11.3. 基本积分表	222
§11.4. 不定积分的基本法则	224
§11.5. 代换积分法	228
§11.6. 分部积分法	231
* §11.7. 有理分式的积分法	232
* §11.8. 微分方程的概念	238
习 题	243
第十二章 定积分	250—296
§12.1. 引出定积分概念的问题	250
(一) 确定曲边梯形的面积	250
(二) 确定变速运动的距离	251
§12.2. 定积分的定义	252
§12.3. 定积分的主要性质	254
§12.4. 定积分与不定积分的联系	259
§12.5. 牛頓——萊布尼茨公式	261
§12.6. 定积分中的变量替换法	263
§12.7. 定积分中的分部积分法	266
§12.8. 定积分的应用	267
(一) 平面图形面积的计算	267
(二) 旋轉体的体积	272
(三) 变力所作的功	275
(四) 函数的平均值	277
§12.9. 定积分的近似计算	278
(一) 梯形法则	279
(二) 拋物綫法则	279
§12.10. 广义积分	283
(一) 积分区間为无限的情形	283

(二)函数具有間断点的情形	286
习 題	288
第十三章 无穷級数	297—336
§13.1. 基本概念	297
§13.2. 基本性質 收敛的必要条件	300
§13.3. 正項級数	303
§13.4. 交錯級数 绝对收敛	308
§13.5. 幂級数	312
§13.6. 幂級数的微分与积分	317
§13.7. 戴劳公式	318
§13.8. 戴劳級数	321
§13.9. 某些函数的幂級数展开式及其应用	322
(一) e^x 的展开式	322
(二) $\sin x$ 与 $\cos x$ 的展开式	324
(三) 二項式 $(1+x)^m$ 的展开式	325
(四) $\ln(1+x)$ 的展开式	327
(五) 积分的近似值	329
* §13.10. 斯特林公式	329
习 題	332

第一篇 平面解析幾何初步

第一章 坐标法

解析几何是几何学的一个重要分支。在高等数学里，它是一个不可缺少的組成部分。是进入高等数学之宫的大門。本篇只作簡要介紹。

运用代数計算的方法，进行几何图形的研究，就是解析几何。而这种研究方法又以坐标法的采用为基础。因为，只有通过坐标法做媒介，才能使代数的“数”和几何的“形”密切結合起来。

由上述可見，坐标的概念是解析几何的第一个基本概念。所謂点的坐标，就是确定一点位置的数。这种用数来确定点的位置的方法就叫坐标法。

§1.1. 直线上点的坐标

(一)有向线段 在一条直线上存在着两个相反的方向，任指其一为正向，用箭头表示；另一个便是負向。这条規定了正負方向的直线叫做軸。习惯上，常以从左到右的方向算做正向(图1.1)。



图 1.1

在軸上任意給定兩点A和B，得到一个以A、B为端点的綫段(图1.2)。这个綫段的长度也随之而定。但是，在解析几何里，仅知道綫段的长度是不够的，还必須知道綫段的方向，也就是要在两个

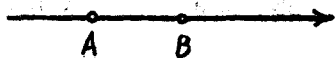


图 1.2

端点中指出那个是起点,那个是终点.由起点到终点的方向是线段的方向.带着方向的线段叫做有向线段.在本讲义里,今后提到“线段”,如不作特别声明,都是指有向线段.以 A 为起点以 B 为终点的有向线段用记号 $\overline{AB}$ 表示.因此, $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 表示两个长度相同方向相反的有向线段.

为了用“数”来表示有向线段的大小,首先选定单位长度,作有向线段与单位长度之比,规定其比值是这样个数,它的绝对值是有向线段的长度,符号的选择视有向线段是否与轴的方向一致,如果一致,取正号;相反,取负号.这个数叫做有向线段的值.用记号 AB 表示线段 $\overline{AB}$ 的值,用 $|AB|$ 表示它的长度.显然 $AB = -BA$, 但 $|AB| = |BA|$.

如果 A, B, C 是轴上任意三点,则线段 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 与 $\overline{AC}$ 的值 AB, BC 与 AC 之间必有下面的恒等关系

$$AB + BC = AC. \quad (1.1)$$

按照点 A, B, C 在轴上的位置可能有顺序,恒等式 (1.1) 的证明须分两种情况进行:

(i) 若 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 方向相同 (图1.3), 则 $|AC| = |AB| + |BC|$, 且 AC 和 AB, BC 的符号相同, 因此恒等式 (1.1) 成立.

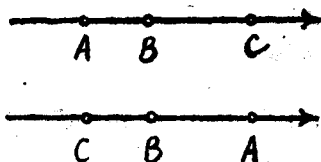


图 1.3

(ii) 若 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 方向相反 (图1.4), 则 $|AC|$ 为 $|AB|$ 与 $|BC|$ 之差, 而 AC 的符号和 AB, BC 之中绝对值较大的一个的符号相同, 因此, 根据正负数加法法则, 可知恒等式 (1.1) 仍成立.

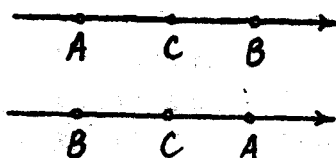


图 1.4

由此可见, 不论点 A, B, C 在轴上的位置如何, 恒等式 (1.1) 总是成立的.

(二) 直线上点的坐标·数轴 要想用数来确定直线上点的位置

置,首先需要指定直线的那一个方向是正向,例如水平直线习惯上常指定从左到右的方向为正向(图1.5),使之成为轴;再在轴上任选一点 O ,作为度量轴上其他一切点的起点,叫做原点;最后,还要取定一个长度作为度量单位.

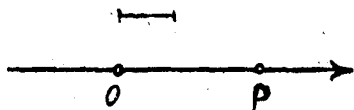


图 1.5

这样一来,轴上任何一个点 P 都被唯一的实数确定.这个数就是以 O 为起点,以 P 为终点的有向线段 $\overline{OP}$ 的值 OP . 设

$$OP = x,$$

数 x 叫做点 P 的坐标,以 $P(x)$ 记之.显然,原点的坐标为 O ,即 $O(0)$. 凡在点 O 右侧的点,它们的坐标都是正的;左侧的点,坐标都是负的.反之,对于任何一个实数 x ,在轴上只能确定一个点 P 的位置,这个点 P 就是以点 O 为起点,值等于 x 的有向线段 $\overline{OP}$ 的终点.这就是说,直线(轴)上所有的点与全体实数之间建立了一一对应的关系.

若在一一直线上建立了点与实数之间的一一对应关系,此直线叫数轴,或坐标轴.

(三)直线上两点间的距离 设 M_1, M_2 是数轴上任意两点,它们的坐标分别为 x_1, x_2 , 则线段 $\overline{M_1M_2}$ 的值 M_1M_2 等于终点 M_2 的坐标 x_2 减去起点 M_1 的坐标 x_1 , 即

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \quad (1.2)$$

证: 根据公式 (1.1) 有

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

从而

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

但

$$OM_1 = x_1, OM_2 = x_2,$$

因此

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

由于点 M_1, M_2 间的距离就是线段 $\overline{M_1M_2}$ 的长度, 故

$$|M_1M_2| = |x_2 - x_1|. \quad (1.2')$$

例 设数轴上的点 A, B, C 的坐标分别为 $2, -1, 3$, 求 $\overline{AB}$,

$\overline{BC}$ 和 $\overline{CA}$ 的值及长度。

解 根据公式 (1.2) 及 (1.2') 得

$$AB = -1 - 2 = -3, \quad |AB| = 3.$$

$$BC = 3 - (-1) = 4, \quad |BC| = 4.$$

$$CA = 2 - 3 = -1, \quad |CA| = 1.$$

§1.2. 平面上的直角坐标系

現在我們来建立确定平面上点的坐标的方法。

在平面上任意选定兩条互相垂直的直綫，通常一条取水平位置，一条取鉛垂位置，規定每条的正向，并附一箭头表示之，这两条直綫就成了两个互相垂直的軸。一般地，水平位置的直綫，自左至右的方向取为正向，并叫做橫軸或 x 軸；鉛垂位置的，从下向上的方向取为正向，并叫做縱軸或 y 軸。同时，以兩軸的交点 O 作为它們共同的原点，叫做坐标原点。最后，再选一个适当的长度做單位長度。这样选定以后，这两条互相垂直的坐标軸就組成了平面上的直角坐标系（图1.6）。

坐标系选定之后，平面上任意一点 M 的位置就可以用一对有序的数来确定。过点 M 分别向 x 軸和 y 軸作垂綫，垂足依次用 P 、 Q 表示，則这两个垂足各对应着唯一的数 $OP = x$ ， $OQ = y$ 。数 x 称为点 M 的橫坐标，数 y 称为点 M 的縱坐标，有序数对 (x, y) 称为点 M 的坐标，并用記号 $M(x, y)$ 表示。

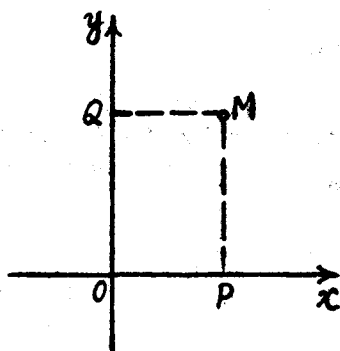


图 1.6

平面上任何一个点 M 的位置可以用一对有序的实数 (x, y) 确定，已如上述。反之，任何一对有序的实数 (x, y) 也只能确定唯一的点 M 的位置。为此，在 x 軸上取一点 P ，使綫段 $\overline{OP}$ 的值 OP

$=x$; 在 y 轴上取一点 Q , 使线段 OQ 的值 $OQ=y$ 。过点 P 作 x 轴的垂线, 过点 Q 作 y 轴的垂线, 此二直线必有唯一的交点, 这个交点就是点 M 的位置。

综上所述, 可得一重要结论: 在平面上确定了直角坐标系以后, 平面上每一个点与一对有序的实数 (x, y) 之间就建立了一一对应的关系。

这个平面叫坐标平面。

坐标平面被两个轴分成四个部分, 每个部分叫做一个象限。从右上角起, 按逆时针方向为序, 依次叫做第 I 象限, 第 II 象限, 第 III 象限, 第 IV 象限 (图 1.7)。如果点 $M(x, y)$ 在第 I 象限内, 则 $x > 0, y > 0$; 如果点 $M(x, y)$ 在第 II 象限内, 则 $x < 0, y > 0$; 如果点 $M(x, y)$ 在第 III 象限内, 则 $x < 0, y < 0$; 如果点 $M(x, y)$ 在第 IV 象限内, 则 $x > 0, y < 0$ 。

显然, 原点的坐标为 $(0, 0)$ 。在 x 轴上的点, 它的纵坐标为零。在 y 轴上的点, 它的横坐标为零。

例如, 在直角坐标系中, 点 $M_1(2, 3)$, $M_2(-3, 3)$, $M_3(-\frac{7}{2}, 0)$, $M_4(-4, -2)$, $M_5(0, -1\frac{1}{2})$, $M_6(6, -1)$ 在坐标平面上的位置如 (图 1.8) 所示。

根据初等几何上关于点的“轴对称”和“点对称”的定义,

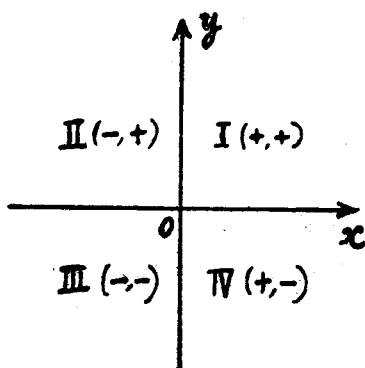


图 1.7

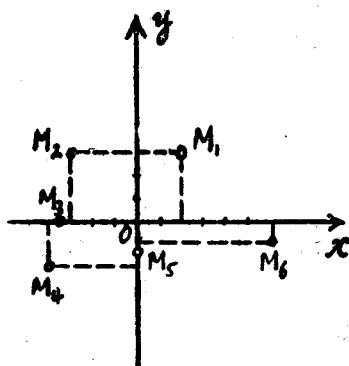


图 1.8

易知点 (x, y) 和点 $(x, -y)$ 对于 x 轴对称; 点 (x, y) 和点 $(-x, y)$ 对于 y 轴对称; 点 (x, y) 和点 $(-x, -y)$ 对于原点对称。

§1.3. 几个基本问题的研究

(一) 兩点間的距离 現在的问题是已知坐标平面上兩点 M_1 , M_2 , 如何計算它們之間的距离?

首先須要說明: 在解析几何里, 所謂“已知一点”, 就是已知該点的坐标。所謂“求一点”, 就是求这个点的坐标。

設已知兩点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, 我們來計算这两个点之間的距离 $d = |M_1M_2|$ (图 1.9)。

过点 M_1 和 M_2 分別向 x 轴作垂綫 M_1A, M_2B , 和向 y 轴作垂綫 M_1C, M_2D 。它們在轴上的垂足依次是 A, B, C, D 。并延長直綫 M_1C , 使它和直綫 M_2B 交于点 N 。可得一直角三角形 M_1NM_2 。如(图1.9)所示。根据勾股弦定理, 有

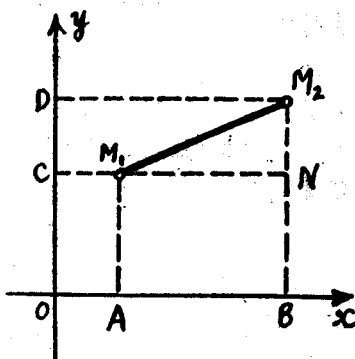


图 1.9

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2. \quad (1)$$

而

$$\begin{aligned} |M_1N| &= |AB| = |x_2 - x_1|; \\ |NM_2| &= |CD| = |y_2 - y_1|. \end{aligned} \quad (2)$$

將(2)式代入(1)式, 可得

$$|M_1M_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

因此

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.3)$$

由这个公式易于推出平面上任何一点 $M(x, y)$ 到原点的距离

为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.3')$$

例1. 求点 $M_1(-2, 3)$ 与点 $M_2(1, -1)$ 间的距离。

解: 令 $x_1 = -2, y_1 = 3; x_2 = 1, y_2 = -1$, 代入公式(1.3)

得
$$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (3+1)^2} = 5.$$

例2. 求一点, 使这个点与三个已知点 $O(0, 0)$ $A(7, -7)$, $B(8, 0)$ 等距离。

解: 設要求的点为 $M(x, y)$, 按照題給的条件有 $|AM| = |BM| = |OM|$ 。而由公式(1.3)及(1.3')可知

$$|AM| = \sqrt{(x-7)^2 + (x+7)^2},$$

$$|BM| = \sqrt{(x-8)^2 + y^2},$$

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

因此, 可得联立方程組

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (x+7)^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2} \end{cases}$$

解之, 得到 $x=4, y=-3$ 。故所求的点是 $M(4, -3)$ 。

(二) 线段的定比分点 已知兩点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$, 求一点 M , 它分綫段 $\overline{M_1M_2}$ 为两个綫段 $\overline{M_1M}$, $\overline{MM_2}$, 并使这两个綫段值的比 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 等于預先給定的数 λ , 即

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda.$$

設点 M 的坐标为 (x, y) 。由点 M_1, M 和 M_2 分别向 x 軸作垂綫 M_1P_1, MP 和 M_2P_2 , 它們在 x 軸上的垂足依序是 P_1, P 和 P_2 ; 同样向 y 軸作垂綫 M_1Q_1, MQ 和

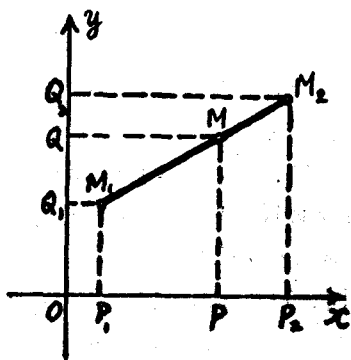


图 1.10

M_2Q_2 , 垂足依序是 Q_1, Q 和 Q_2 (图1.10)。由于垂线 $M_1P_1 // MP // M_2P_2$ 及垂线 $M_1Q_1 // MQ // M_2Q_2$, 根据平行线间所截线段比值相等这一性质, 可知

$$\frac{P_1P}{P P_2} = \frac{M_1M}{M M_2} = \lambda;$$

$$\frac{Q_1Q}{Q Q_2} = \frac{M_1M}{M M_2} = \lambda。$$

又因

$$P_1P = x - x_1, \quad PP_2 = x_2 - x;$$

$$Q_1Q = y - y_1, \quad QQ_2 = y_2 - y,$$

从而有

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda。$$

按 x 和 y 分别解上边两个等式, 就得到分点 M 的坐标公式:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}。 \quad (1.4)$$

若点 M 是线段 $\overline{M_1M_2}$ 的中点, 即 $\lambda = 1$, 推出中点坐标公式:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}。 \quad (1.4')$$

例1. 求以点 $A(4, -3)$ 与 $B(-5, 0)$ 为端点的线段 $\overline{AB}$ 的三等分点。

解: 从点 A 到点 B , 按顺序把线段 $\overline{AB}$ 的三等分点用 $C(x_C, y_C)$ 和 $D(x_D, y_D)$ 标出 (图1.11)。于是

$$\frac{AD}{DB} = 2,$$

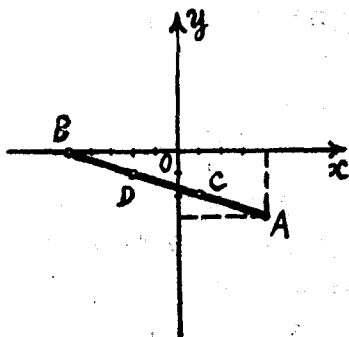


图 1.11

又点 C 是线段 $\overline{AD}$ 的中点, 因此, 首先根据公式 (1.4) 得出点 D 的坐标,

$$x_D = \frac{4+2 \times (-5)}{1+2} = -2, \quad y_D = \frac{-3+2 \cdot 0}{1+2} = -1.$$

再利用公式 (1.4') 求出点 C 的坐标,

$$x_C = \frac{4+(-2)}{2} = 1, \quad y_C = \frac{-3+(-1)}{2} = -2.$$

故点 C(1, -2) 和 D(-2, -1) 就是要求的三等分点。

例2. 已知三个质点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ 的质量分别为 m_1, m_2, m_3 , 求它们的质量重心。

解: 由力学知, 两个质点的质量重心位于两个质点的联线上, 它到这两个质点的距离与这两个质点的质量成反比。设 $M'(x', y')$ 是质点 M_1, M_2 的质量重心(图1.12), 就有

$$\frac{M_1 M'}{M' M_2} = \frac{m_2}{m_1} = \lambda.$$

所以点 M' 的坐标是

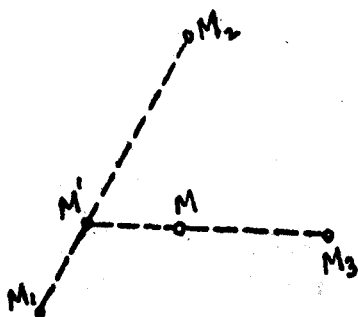


图 1.12

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

$$y' = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

然后再求质点 M' 与 M_3 的质量重心 M 的坐标 (x, y) , 这时质点 M' 的质量是 $m_1 + m_2$. 因此