高 等 数 学

中国人民大学数学教研室编

北 京 1963年

目　录

第一篇　平面解析幾何初步

第二篇　数学分析

第一篇　平面解析幾何初步

第一章　坐 标 法

解析几何是几何学的一个重要分支。在高等数学里，它是一个不可缺少的組成部分。是进入高等数学之宫的大門。本篇只作簡要介紹。

运用代数計算的方法，进行几何图形的研究，就是解析几何。而这种研究方法又以坐标法的采用为基础。因为，只有通过坐标法做媒介，才能使代数的“数”和几何的“形”密切結合起来。

由上述可見，坐标的概念是解析几何的第一个基本概念。**所謂点的坐标，就是确定一点位置的数。这种用数来确定点的位置的方法就叫坐标法。**

§1.1.　直线上点的坐标

(一)有向线段　在一条直綫上存在着兩个相反的方向，任指其一为正向，用箭头表示；另一个便是負向。这条規定了正負方向的**直线叫做軸**。习惯上，常以从左到右的方向算做正向(图1.1)。

图　1.1

在軸上任意給定兩点A和B，得到一个以 A、B 为端点的綫段 (图1.2)。这个綫段的长度也随之而定。但是，在解析几何里，仅知道綫段的长度是不够的，还必須知道綫段的方向，也就是要在兩个

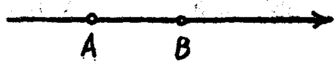

图　1.2

端点中指出那个是起点，那个是終点。由起点到終点的方向是綫段的方向。**带着方向的线段叫做有向线段。**在本讲义里，今后提到“綫段”，如不作特別声明，都是指有向綫段。以 A 为起点以 B 为終点的有向綫段用記号 $\overline{AB}$ 表示。因此，$\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 表示两个长度相同方向相反的有向綫段。

为了用“数”来表示有向綫段的大小，首先选定单位长度，**作有向线段与單位長度之比，規定其比值是这样一个数，它的絕对値是有向线段的長度，符号的选擇觀有向线段是否与軸的方向一致，如果一致，取正号；相反，取負号。这个数叫做有向线段的値。**用記号 AB 表示綫段 $\overline{AB}$ 的值，用 $|AB|$ 表示它的长度。显然$AB=-BA$，但 $|AB|=|BA|$。

如果 A、B、C 是軸上任意三点，则线段 $\overline{AB}$ $\overline{BC}$ 与 $\overline{AC}$ 的値 AB，BC 与 AC 之間必有下面的恒等关系

$$AB+BC=AC。\qquad (1.1)$$

按照点 A、B、C 在軸上的位置可能有的順序，恒等式 (1.1) 的証明須分两种情况进行：

（i）若 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 方向相同（图1.3），則 $|AC|=|AB|+|BC|$，且 AC 和 AB，BC 的符号相同，因此恒等式(1.1)成立。

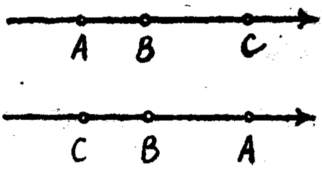

图 1.3

（ii）若 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 方向相反（图1.4），則 $|AC|$ 为 $|AB|$ 与 $|BC|$ 之差，而 AC 的符号和 AB，BC 之中絕对值較大的一个的符号相同，因此，根据正負数加法法則，可知恒等式(1.1)仍成立。

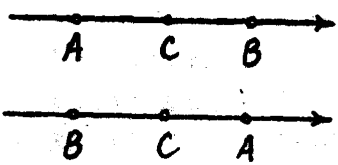

图 1.4

由此可見，不論点 A、B、C 在軸上的位置如何，恒等式(1.1)总是成立的。

（二）直线上点的坐标·数軸 要想用数来确定直綫上点的位

置，首先需要指定直綫的那一个方向是正向，例如水平直綫习惯上常指定从左到右的方向为正向(图1.5)，使之成为軸；再在軸上任选一点O，作为度量軸上其他一切点的起点，叫做原点；最后，还要取定一个长度作为度量单位。这样一来，軸上任何一个点P都被唯一的实数确定。这个数就是以O为起点，以P为終点的有向线段$\overline{OP}$的值OP。設

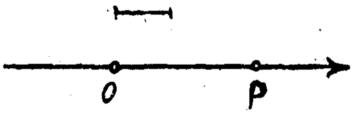

图 1.5

$$OP=x,$$

数x叫做点P的坐标，以P(x)記之。显然，原点的坐标为O，即O(o)。凡在原点O右側的点，它們的坐标都是正的；左側的点，坐标都是負的。反之，对于任何一个实数x，在軸上只能确定一个点P的位置，这个点P就是以点O为起点，值等于x的有向綫段$\overline{OP}$的終点。这就是說，直线（軸）上所有的点与全体实数之間建立了一一对应的关系。

若在一直线上建立了点与实数之間的一一对应关系，此直线叫数軸，或坐标軸。

（三）直线上兩点間的距离　設M_1，M_2是数軸上任意兩点，它們的坐标分别为x_1，x_2，則线段$\overline{M_1M_2}$的值M_1M_2等于終点M_2的坐标x_2减去起点M_1的坐标x_1，即

$$M_1M_2=x_2-x_1。\tag{1.2}$$

証：根据公式（1.1）有

$$OM_1+M_1M_2=OM_2,$$

从而　$$M_1M_2=OM_2-OM_1。$$

但　$$OM_1=x_1,OM_2=x_2,$$

因此　$$M_1M_2=x_2-x_1。$$

由于点M_1，M_2間的距离就是綫段$\overline{M_1M_2}$的长度，故

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|。\tag{1.2'}$$

例　設数軸上的点A，B，C的坐标分别为2，−1，3，求$\overline{AB}$，

$\overline{BC}$ 和 $\overline{CA}$ 的值及长度。

解　根据公式（1.2）及（1.2′）得

$$AB=-1-2=-3,\qquad |AB|=3。$$
$$BC=3-(-1)=4,\qquad |BC|=4。$$
$$CA=2-3=-1,\qquad |CA|=1。$$

§1.2.　平面上的直角坐标系

現在我們来建立确定平面上点的坐标的方法。

在平面上任意选定两条互相垂直的直綫，通常一条取水平位置，一条取鉛垂位置，規定每条的正向，并附一箭头表示之，这两条直綫就成了两个互相垂直的軸。一般地，水平位置的直綫，自左至右的方向取为正向，并叫做**横軸**或 **x 軸**；鉛垂位置的，从下向上的方向取为正向，并叫做**縱軸**或 **y 軸**。同时，以兩軸的交点 O 作为它們共同的原点，叫做**坐标原点**。最后，再选一个适当的长度做**單位長度**。这样选定以后，**这兩条互相垂直的坐标軸就組成了平面上的直角坐标系**（图1.6）。

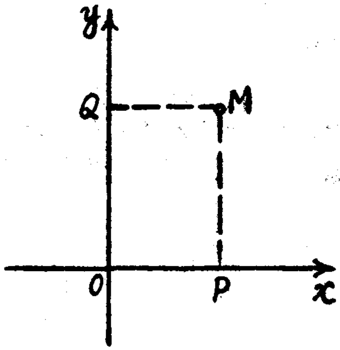

图　1.6

坐标系选定之后，平面上任意一点 M 的位置就可以用一对有序的数来确定。过点 M 分别向 x 軸和 y 軸作垂綫，垂足依次用P、Q表示，则这两个垂足各对应着唯一的数 OP=x，OQ=y。数 x 称为点 M 的**横坐标**，数 y 称为点 M 的**縱坐标**，有序数对（x,y）称为点 M的**坐标**，并用記号M（x,y）表示。

平面上任何一个点 M 的位置可以用一对有序的实数（x,y）确定，已如上述。反之，任何一对有序的实数（x,y）也只能确定唯一的点 M 的位置。为此，在 x 軸上取一点 P，使綫段 $\overline{OP}$ 的值 OP

$=x$；在 y 軸上取一点 Q，使綫段 $\overline{OQ}$ 的値 $OQ=y$。过点P作 x 軸的垂綫，过点 Q 作 y 軸的垂綫，此二直綫必有唯一的交点，这个交点就是点 M 的位置。

总上所述，可得一重要結論：在平面上給定了直角坐标系以后，平面上每一个点与一对有序的实数 (x,y) 之間就建立了一一对应的关系。

这个平面叫坐标平面。

坐标平面被两个軸分成四个部分，每个部分叫做一个**象限**。从右上角起，按逆时針方向为序，依次叫做第Ⅰ象限，第Ⅱ象限，第Ⅲ象限，第Ⅳ象限（图1.7）。如果点M (x,y) 在第Ⅰ象限内，則 $x>0, y>0$；如果点 $M(x,y)$ 在第Ⅱ象限内，則 $x<0$，$y>0$；如果点 $M(x,y)$ 在第Ⅲ象限内，則 $x<0$，$y<0$；如果点 $M(x,y)$ 在第Ⅳ象限内，則 $x>0, y<0$。

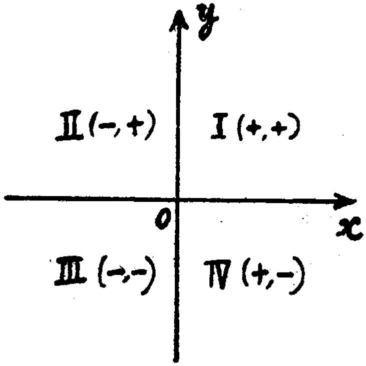

图 1.7

显然，原点的坐标为 $(0,0)$。在 x 軸上的点，它的纵坐标为零。在 y 軸上的点，它的横坐标为零。

例如，在直角坐标系中，点 M_1 $(2,3)$，M_2 $(-3,3)$，M_3 $(-\frac{7}{2},0)$，$M_4(-4,-2)$，$M_5(0,-\sqrt{2})$，M_6 $(6,-1)$ 在坐标平面上的位置如（图1.8）所示。

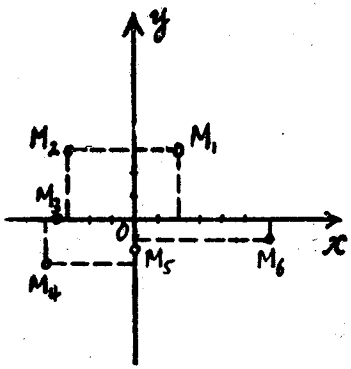

图 1.8

根据初等几何上关于点的“軸对称”和“点对称”的定义，

易知点(x,y)和点$(x,-y)$对于x轴对称；点(x,y)和点$(-x,y)$对于y軸对称；点(x,y)和点$(-x,-y)$对于原点对称。

§1.3. 几个基本問題的研究

(一)兩点間的距离 現在的問題是已知坐标平面上兩点M_1，M_2，如何計算它們之間的距离？

首先須要說明：在解析几何里，所謂“已知一点”，就是已知該点的坐标。所謂“求一点”，就是求这个点的坐标。

設已知兩点$M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，我們来計算这兩个点之間的距离$d=|M_1M_2|$（图1.9）。

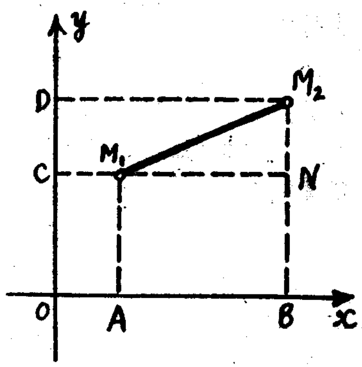

图 1.9

过点M_1和M_2分别向x軸作垂綫M_1A，M_2B，和向y軸作垂綫M_1C，M_2D。它們在軸上的垂足依次是A,B,C,D。并延长直綫M_1C，使它和直綫M_2B交于点N。可得一直角三角形M_1NM_2。如（图1.9）所示。根据勾股弦定理，有

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2。\qquad (1)$$

而

$$\begin{aligned}|M_1N|&=|AB|=|x_2-x_1|；\\ |NM_2|&=|CD|=|y_2-y_1|。\end{aligned}\qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式，可得

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2。$$

因此

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。\qquad (1.3)$$

由这个公式易于推出平面上任何一点$M(x,y)$到原点的距离

为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2}。\qquad (1.3')$$

例1.求点 $M_1(-2,3)$ 与点 $M_2(1,-1)$ 間的距离。

解：令$x_1=-2, y_1=3; x_2=1, y_2=-1$，代入公式(1.3)

得
$$d=\sqrt{(-2-1)^2+(3+1)^2}=5。$$

例2. 求一点，使这个点与三个已知点 $O(0,0)$ $A(7,-7)$，$B(8,0)$等距离。

解：設要求的点为 $M(x,y)$，按照題給的条件有 $|AM|=|BM|=|OM|$。而由公式(1.3)及(1.3′)可知

$$|AM|=\sqrt{(x-7)^2+(x+7)^2},$$
$$|BM|=\sqrt{(x-8)^2+y^2},$$
$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2},$$

因此，可得联立方程組

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-7)^2+(x+7)^2}\\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2},\end{cases}$$

解之，得到 $x=4, y=-3$。故所求的点是 $M(4,-3)$。

(二)线段的定比分点 已知兩点$M_1(x_1,y_1)$和$M_2(x_2,y_2)$，求一点 M，它分綫段 $\overline{M_1M_2}$ 为兩个綫段$\overline{M_1M}$，$\overline{MM_2}$，幷使这兩个綫段值的比$\frac{M_1M}{MM_2}$等于預先給定的数λ，即

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda。$$

設点M的坐标为 (x,y)。由点M_1，M 和 M_2分别向 x 軸作垂綫 M_1P_1，MP 和 M_2P_2，它們在 x 軸上的垂足依序是P_1，P 和 P_2；同样向 y 軸作垂綫 M_1Q_1，MQ和

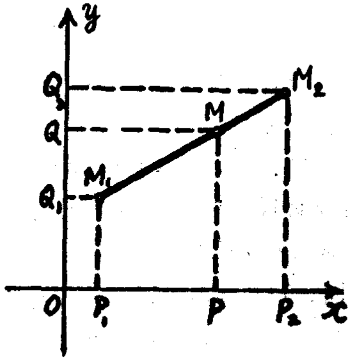

图 1.10

M_2Q_2，垂足依序是 Q_1, Q 和 Q_2（图1.10）。由于垂綫 $M_1P_1 // MP // M_2P_2$ 及垂綫 $M_1Q_1 // MQ // M_2Q_2$，根据平行綫間所截綫段比值相等这一性质，可知

$$\frac{P_1P}{P\ P_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda;$$

$$\frac{Q_1Q}{Q\ Q_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda。$$

又因

$$P_1P=x-x_1,\quad PP_2=x_2-x;$$
$$Q_1Q=y-y_1,\quad QQ_2=y_2-y,$$

从而有

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda;\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda。$$

按 x 和 y 分别解上边兩个等式，就得到分点 M 的坐标公式：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}。\qquad(1.4)$$

若点 M 是綫段 $\overline{M_1M_2}$ 的中点，即 $\lambda=1$，推出中点坐标公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}。\qquad(1.4')$$

例1.求以点 A(4，−3) 与 B (−5,0) 为端点的綫段 $\overline{AB}$ 的三等分点。

解：从点 A 到点 B，按順序把綫段 $\overline{AB}$ 的三等分点用 $C(x_C,y_C)$ 和 $D(x_D,y_D)$ 标出（图1.11）。于是

$$\frac{AD}{DB}=2,$$

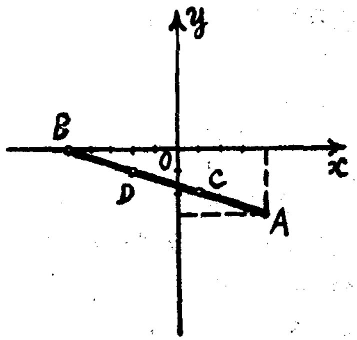

图 1.11

又点 C是綫段 $\overline{AD}$ 的中点，因此，首先根据公式 (1.4) 得出点 D的坐标：

$$x_D=\frac{4+2\times(-5)}{1+2}=-2,\quad y_D=\frac{-3+2\cdot 0}{1+2}=-1。$$

再利用公式(1.4′)求出点 C 的坐标：

$$x_C=\frac{4+(-2)}{2}=1,\quad y_C=\frac{-3+(-1)}{2}=-2。$$

故点 C(1，−2) 和 D(−2，−1)就是要求的三等分点。

例2.已知三个质点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，$M_3(x_3,y_3)$ 的质量分别为 m_1，m_2，m_3，求它們的质量重心。

解：由力学知，两个质点的质量重心位于两个质点的联綫上，它到这两个质点的距离与这两个质点的质量成反比。設 $M'(x',y')$ 是质点 M_1，M_2的质量重心(图1.12)，就有

$$\frac{M_1M'}{M'M_2}=\frac{m_2}{m_1}=\lambda。$$

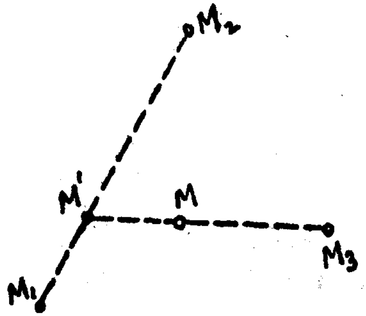

图 1.12

所以点M'的坐标是

$$x'=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y'=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}。\qquad (1)$$

然后再求质点 M' 与 M_3 的质量重心M的坐标(x，y)，这时質点 M' 的质量是 m_1+m_2。因此