目 录

离散数学导论

北京经济学院
经济数学系

一九八二年　八月

符号一览表

一、逻辑

$\neg P$	非P
$P \vee Q$	P或Q
$P \wedge Q$	P且Q
$P \rightarrow Q$	P蕴涵Q
$P \leftrightarrow Q$	P和Q等值；P等值于Q。（P、Q为命题或命题变元）
$\forall$	全称量词"所有　　每一个　"任一个……"
$\exists$	存在量词"有一个　　存在　"至少一个……"
$A \Leftrightarrow B$	A和B逻辑等价（A、B为命题形式）
$A \Rightarrow B$	A逻辑蕴涵B
T	永真式
F	永假式
U	论域
$:=$	……定义为……
$\dashv$	证毕

二、数

$\lceil x \rceil$	整数n使 $x \leq n < x+1$
$\lfloor x \rfloor$	整数n使 $x-1 < n \leq x$
N	自然数集 $N=\{0,1,2,\cdots\}$
S_K	前K个自然数集合 $S_K=\{0,1,\cdots\cdots K-1\}$
I_+	正整数集 $I_+=\{1,2\cdots\cdots\}$

I	整数集	$I=\{\cdots\cdots -2,-1,0,1,2\cdots\cdots\}$
Q	有理数集	
Q_+	正有理数集	
R	实数集	
R_+	正实数集	
(a,b)	实数开区间	$(a,b)=\{x\mid x\in R\wedge a<x<b\}$
$[a,b]$	实数闭区间	$[a,b]=\{x\mid x\in R\wedge a\leq x\leq b\}$
$(a,b]$	实数半开区间	
$[a,b)$	$\{x\mid x\in R\wedge a\leq x<b\}$	
$[a,\infty)$	$\{x\mid x\in R\wedge x\geq a\}$	

$U=N(I,S_K\cdots\cdots)$　　论域为自然数集（整数集，前K个自然数…）

三、集合

$a\in A$	a是集合A的元素；a属于A
$a\notin A$	a不是集合A的元素；a不属于A
$A\subset B$	集合A被包含于集合B；集合B包含A．
$A\not\subset B$	集合B不包含A
Φ	空集
$A\cup B$	集合A与B之并（集）
$A\cap B$	集合A与B之交（集）
$A-B$	对A的集合B的相对补（集）
$\overline{A}$	A的绝对补（集）
$P(A)$	集合A的幂集（Powerset）
$\bigcup_{i\in S}A_i$	广义并　$\{x\mid\exists i[i\in S\wedge x\in A_i]\}$
$\bigcap_{i\in S}A_i$	广义交　$\{x\mid\forall i[i\in S\longrightarrow x\in A_i]\}$

$A \times B$	A与B的直接积
$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} A_i$	集合A_i ($1 \le i \le n$)的直接积

四、字符串集合

Σ	有限字母表
Λ	空(字符)串
$\lVert x \rVert$	字符串x的长度
Σ^{+}	字母表Σ上的所有有限非零长度的字符串集合
Σ^{*}	字母表Σ上的所有有限长字符串集合(包含Λ)
AB	$\{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$
A^n	$\{x_1 x_2 \cdots\cdots x_n \mid x_i \in A\}$
A^{+}	$\bigcup_{i \in I_+} A^i$
A^{*}	$\bigcup_{i \in N} A^i$

五、关系与划分

$\langle a_1, a_2, \cdots a_n \rangle$	n元序组
aRb; $\langle ab \rangle \in R$	在关系R中a与b有关,序偶$\langle ab \rangle$属于关系R
$a \not R b$; $\langle ab \rangle \notin R$	序偶$\langle ab \rangle$不属于关系R
$D = \langle A, R \rangle$	结点集A与关系R的有向图
$R_1 \circ R_2$ 或 $R_1 R_2$	R_1与R_2的复合关系
R^n	R与自身复合n次;R的n次幂
$r(R)$	R的自反闭包
$s(R)$	R的对称闭包

$t(R)$	R的传递闭包
R^c	R的逆：$=\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle \in R\}$
R^+	$t(R)$
R^*	$tr(R)$　R的自反传递闭包
$\leq$	偏序
$a \equiv b \pmod{K}$	a和b对模K等价.
$[a]_R$	关于R的a的等价类
π	划分
A/R	由等价关系R生成的A的划分.
$\pi_1+\pi_2$	划分π_1与π_2之和
$\pi_1\cdot\pi_2$	划分π_1与π_2之积

函数

$f(a)$	函数f对自变量a之值
$f: A\rightarrow B$	f是以A为定义域、B为值域的函数.
$f(A)$	在函数f下集合A的象
$f\circ g$ 或 fg	函数f与g的复合函数.
A^B	从B到A的所有函数的集合
I_A	集合A上的恒等函数
f^{-1}	f的反函数
$f^{-1}(A)$	在函数f下集合A的象源
ψ_A	集合A的特征函数

七、基数（势）

$\lvert A\rvert$	集合A的基数.（势）
$\aleph_0$	阿勒弗零，　N的势.
c	$(0,1)$的势.

八．代数

$\langle S, O, K \rangle$	集合S是承载子，运算为O常数为K的代数（结构）
$+_K$	模K加法
$\cdot_K$ 或 $\times_K$	模K乘法
$A \times A'$	A与A'的积代数
$A/_\sim$	关于同余关系～的A的商代数．

第一章 数学推理

数学研究数学结构的性质，验证这些性质的过程叫数学推理。

数学结构由一组公理定义。一个公理是关于这个结构的性质的一个真的语句。由公理推出的真的断言叫定理，在特定的数学结构中确定定理为真的论证叫证明。证明常常是一串断言每一断言，或者是公理，或者是已证明过的定理，或者是前面几步证明的逻辑推论。为了证明定理须能作出关于数学结构的断言，并决定一个断言什么时候从另一断言推导出来。为此要用到有效的推理原则，即推理规则。

在本章中将研究如何对一个数学结构作出判断，如何组合这些判断以引出结论。这一章所提出的概念和方法与计算机科学的一些重要领域（如程序正确性的证明）有直接的关系，但

是我们主要关心的还是更一般的数学推理的问题，因为主要目的是培养同学们的识别和构造正确的数学论证的能力。数学内容是推理过程的数学模型，也是对数理逻辑的概念和符号的简要介绍。

§1.1 命题

一个可判断其为真或假的陈述句叫命题。如命题为真，叫它的真假值为真，或叫取值为 1。如命题为假，叫它的真假值为假或叫取值为 0。任何命题必取两种真假值之一，且仅取其一。

例：下列各语句都是命题

(1) 月亮是方的

(2) 4 是质数（素数）

(3) 3 + 3 = 6

(4) 2 是偶数，3 不是偶数。

(5) 如果允许我编的计算机程序运行充分长的时间，总是可以停止的。

(6) 任何大于 2 的偶数都可表为两个质数之和。

这些命题中 1、2 是假的，3、4 是真的，5 的真假值不容易判断，6 是哥德巴赫猜想，数学家从研究中估计它是真的，但至今尚未证明，因此还不能判断它的真假。

下列句子不是命题

(7) $x + y > 4$

(8) $x = 3$

(9) 你去吗？

(10) 买四个！

(11) "我说的全是谎话"

各句中 7、8 是陈述句，但真假值要由 x、y 决定（参见 2 中再讨论），9，10 非陈述句，11 是悖论（参见 §2.2）

命题变元，记为 P、Q、S …… 指可用具有真假值的命题代入的变元。命题，命题变元都可用"与"（并且）"或""非"连接而成为复合命题。

例 "老张身高一米八"，"牛棚里有四头牛"可以组成：

老张身高一米八并且牛棚里有四条牛

老张身高一米八或牛棚里有四条牛。

老张身高一米八是假的

如果用符号写出式子

P 且 Q

P 或 Q

非 P

上式中 P、Q 为命题变元，可用任何命题代入。它们至少含有一个命题变元，叫命题形式。（在不会引起混乱时，也可简称为命题。）命题形式和命题的主要区别在于每个命题都具有真值，而命题形式是一个表达式，当没有用命题代换命题变元时，它的真值一般不能确定。

"与"（且）"或""非"记号为 ∧、∨、┐ 它们叫逻辑连接词，用它们可组成复合命题。另一方面，它们如数学的运算中的"加"和"乘"一样，表示了命题的运算，所以也叫逻辑运算符号。逻辑连接词属于人工语言，它们的意义用真值表给出，有时和自然语言不是吻合的。

一、逻辑连接词

常用的五个逻辑连接词如下：（P、Q 为命题）

否定词 ┐、┐P 读为"非 P""并非 P""P 不真"

排中律，P真则┐P假，P假则┐P真，其真值表为

P	┐P
0	1
1	0

否定词是一元运算符

合取词∧，P∧Q，读为“P与Q的合取”，“P并且Q”，是二元连续词，真值表为

PQ	P∧Q
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

即P∧Q真的充要条件是P真且Q真。

析取词∨，P∨Q读作“P与Q的析取”，“P或Q”，是二元连接词，真值表如右

PQ	P∨Q
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

析取相当于自然语言中的“可兼或”例如P代表“张爱国很聪明”，Q代表“张爱国很用功”P∨Q为“张爱国很聪明或张爱国很用功”。P∨Q只有P和Q同时是假时才取0值。自然语言中还有“不可兼或”，如说“这次高校足球赛，经院队得冠军或清华队得冠军”这命题只在两队之一得冠军时才是真的。这种逻辑连接词叫异或 ⊕，真值表为：

PQ	P⊕Q
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

异或与计算机原理中按位加相应。在数理逻辑中用 P ⊕ Q 或用 ┐(P ⟷ Q) 表示，很少用符号 ⊕

蕴涵词 ⟶，P ⟶ Q，读作"P 蕴涵 Q，如果 P 则 Q，P 是 Q 的充分条件，Q 是 P 的必要条件"在 P ⟶ Q 中 P 叫前件，Q 叫后件。

真值表为

P	Q	P ⟶ Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在 P 真 Q 真 P ⟶ Q 真的情况下 P 是比 Q 更强的断言，如 P 表示"X 是正整数"Q 表示"X 是整数"，把 Q 换成弱的断言 Q_1"X 是有理数"P ⟶ Q_1 还是真的，同理 P 可换更强的断言。P ⟶ Q 中只有 P 真 Q 假 P ⟶ Q 才是假的，这是自然语言"如果……则……"在真值形式上的抽象，这一规定，与命题必取且仅取一真假值是吻合的，在理论体系中是相容的，已由数理逻辑的科学实践所证实。正如几何中的线只有长短没有粗细的规定，在理论上是必需的，在科学实践中也是合适的。

考虑下面两个例子

例1 假若给我一根合适的杠杆，我可以把地球撬起来。

例2 如果语言是生产工具的话，那末夸夸其谈的人就是百万富翁了。

这两例都是 P 假而 P ⟶ Q 真，这种确定 P 假来证 P ⟶ Q 真的方法在逻辑上是有用的。

自然语言中如 P 则 Q 必须具有因果关系，或 P 与 Q 有形式上内容上的联系，在逻辑语言中 P 和 Q 可以没有任何联系或关系。

等值词 ⟷（有的书称为等价词） P ⟷ Q 读作，

"P和Q等值" "P当且仅当Q","P和Q互为充分必要条件"。真值表如右

P Q	$P \longleftrightarrow Q$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

象算术运算符号有优先次序一样，逻辑运算符号的优先次序为

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \longrightarrow,\ \longleftrightarrow$$

命题形式中有两个以上的逻辑运算符号，而运算次序与上面的优先次序不一致时，可以加括号。比如 $\neg(P \vee Q)$ 是先作析取，$\neg P \vee Q$ 是先取P的否定

二、真值表

上面介绍的逻辑连接词都是用真值表规定它们的意义，真值表也可用于更复杂的命题形式。比如"如果张爱国很聪明或张爱国很用功，则张爱国的成绩优秀"就可用命题形式 $P \vee Q \longrightarrow R$ 来列出真值表。由于P、Q、R是命题，在真值表中有些行是无意义的，比如P假Q假R真。如果P、Q、R是命题变元，可将命题变元的可能值在左边列出（叫对命题变元真值的指派）。有K个变元就有 2^K 个可能值，按二进制记数法依次排列，右边再按复合命题的层次，按逻辑连接词定义写出其相应的真值。最后一行的罗马数字是标明取真值的层次。这样就可得命题形式在各种情况下的真值。

例1. 列 $(Q \wedge \neg P) \longrightarrow P$ 的真值表

解：

P	Q	$(Q \wedge$	$\neg P)$	$\longrightarrow P$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1
		Ⅱ	Ⅰ	Ⅲ

例2. 列 $\{(P\wedge Q)\vee \neg Q\}\longleftrightarrow P$ 的真值表

解

$P\ Q\ R$	$\{(P\wedge Q)$	$\vee$	$\neg R\}$	$\longleftrightarrow P$
0 0 0	0	1	1	0
0 0 1	0	0	0	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	0	0	0	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	0	1
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅲ

例3. 列 $(P\longrightarrow Q)\longleftrightarrow(\neg P\cup Q)$ 真值表.

解

$P\ Q$	$(P\longrightarrow Q)$	$\longleftrightarrow$	$(\neg P\cup Q)$
0 0	1	1	1
0 1	1	1	1
1 0	0	1	0
1 1	1	1	1
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ

例4 列 $\neg(P\longrightarrow(P\cup Q)]$ 的真值表

P	Q	$\neg$	$(P\rightarrow$	$(P\vee Q))]$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1
		Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ

注意，例三不论命题变元怎样取值，即不论对命题变元的值作任何指派，复合命题总是真的。例四则任一指派，复合命题总是假的。例1，2有些指派，复合命题为真，有些为假。

给定一组前提和一个结论，以列真值表方法，确定其结论是否是前提的有效结论，这种方法叫真值表技术。

例5 前提为 $P \to Q$ 和 P，问：Q 是不是有效结论？

解：列真值表如下

P	Q	$(P \to Q)$	$\wedge P$	$\to Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ

在 P 和 Q 的各种可能指派下蕴涵式 $(P \to Q) \wedge P \to Q$ 都真，故 Q 是前提 $P \to Q$ 和 P 的有效结论。

三、永真式、永假式、可满足式（偶真式）

永真式 又叫重言式，记为 T，指派给各命题变元各种可能的真值情况下完都是真的命题形式叫永真式，如 $P \vee \neg P$ 及上面例三、例5。

永假式 又叫矛盾，记为 F，在各命题变元取所有可能值时完都是假的命题形式叫永假式如 $P \wedge \neg P$ 及上面例4。

可满足式 至少对命题变元作一种真值指派时可取真值为真的命题形式（但非永真式），叫可满足式（偶真式）。

用真值表总是可以判定一个命题形式是永真式、永假式或可满足式。但当命题变元的个数很多时，列真值表是比较繁的，对有些命题形式，可只列必要的行，如例5列第四行就够了（为什么？）

四、逻辑恒等式

A、B为命题形式，如 $A \longleftrightarrow B$ 为永真式，则A、B是逻辑等价的，记为 $A \Longleftrightarrow B$ 当两个命题形式逻辑等价，则它们可以互相代换，如 $P \vee P \Longleftrightarrow P$，
$P \rightarrow Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$ 因此 $A \Longleftrightarrow B$ 叫逻辑恒等式。

下面是常用的逻辑恒等式，其中T代表永真式，F代表永假式，表右是注明性质或名称。

表 1.1.1 逻辑恒等式

E_1	$P \vee P \Longleftrightarrow P$	析等律
E_2	$P \wedge P \Longleftrightarrow P$	合等律
E_3	$P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$	交换律
E_4	$P \wedge Q \Longleftrightarrow Q \wedge P$	
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Longleftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	结合律
E_6	$(P \wedge Q) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	
E_7	$\neg (P \vee Q) \Longleftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	德·摩根律
E_8	$\neg (P \wedge Q) \Longleftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	
E_9	$P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
E_{10}	$P \vee (Q \wedge R) \Longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
E_{11}	$P \vee T \Longleftrightarrow T$	零律
E_{12}	$P \wedge T \Longleftrightarrow P$	同一律
E_{13}	$P \vee F \Longleftrightarrow P$	
E_{14}	$P \wedge F \Longleftrightarrow F$	零律
E_{15}	$P \vee \neg P \Longleftrightarrow T$	排中律
E_{16}	$P \wedge \neg P \Longleftrightarrow F$	矛盾律
E_{17}	$\neg\neg P \Longleftrightarrow P$	双重否定律
E_{18}	$P \rightarrow Q \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$	
E_{19}	$P \leftrightarrow Q \Longleftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	