高等数学习题集解答

第四册

北京广播电视大学

1979.5

目　　录

第二十一章 微分方程

基 本 概 念

21.1 试说下列各微分方程的阶数，并指出那些是线性微分方程：

a、$x(y')^2-2yy'+x=0$

b、$(y'')^3+5(y')^4-y^5+x^7=0$

c、$xy'''+2y''+x^2y=0$

d、$(x^2-y^2)dx+(x^2+y^2)dy=0$

e、$(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$

解 a、一阶非线性微分方程

b、二阶非线性微分方程

c、三阶齐次线性微分方程

d、一阶齐次微分方程

e、一阶齐次微分方程

在题21.2—31.8中，指出各函数是否已给微分方程的解：

21.2 $xy'=2y$，$y=5x^2$

解 ∵ $y'=10x$，代入得$10x^2=10x^2$，∴是解。

21.3 $(x+y)dx+xdy=0$，$y=\dfrac{c^2-x^2}{2x}$

解 ∵ $dy=\dfrac{-4x^2-(c^2-x^2)2}{(2x)^2}dx=\dfrac{-(c^2+x^2)}{2x^2}dx$

$$\therefore\ xdy=\frac{-(c^2+x^2)}{2x}dx=-\left(\frac{c^2-x^2+2x^2}{2x}\right)dx=-(y+x)dx$$

即 $(x+y)dx+xdy=0$，∴是解。

21.4 $y''=x^2+y^2$，$y=\dfrac{1}{x}$

解 ∵ $y'=\dfrac{-1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$，而 $x^2+y^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}\neq\dfrac{2}{x^3}$，

∴ 不是解。

21.5 $y''+y=0$，$y=3\sin x-4\cos x$

解 ∵ $y'=3\cos x+4\sin x$，$y'=-3\sin x+4\cos x=-y$

∴ $y''+y=0$，∴是解。

21.6 $y''-2y'+y=0$，a、$y=xe^x$，b、$y=x^2e^x$

解　a、$y'=e^x(1+x)$，$y''=e^x(2+x)$，

∴　$y''-2y'+y=e^x(2+x-2-2x+x)=0$　　∴　是解。

b、$y'=e^x(2x+x^2)$，$y''=e^x(2+4x+x^2)$

∴　$y''-2y'+y=e^x(2-4x+x^2-4x-2x^2+x^2)=2e^x\neq 0$

∴　不是解。

21.7　$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=0$，$y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$

解　∵　$y'=c_1\lambda_1e^{\lambda_1 x}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$，

$y''=c_1\lambda_1^2e^{\lambda_1 x}+c_2\lambda_2^2e^{\lambda_2 x}$

∴　$y'-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2 y=c_1e^{\lambda_1 x}(\lambda_1^2-\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)+$

$+c_2e^{\lambda_2 x}(\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2)=0$　　∴　是解。

21.8　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，$x=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$

解　$\dfrac{dx}{dt}=-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-c_1\omega^2\cos\omega t-c_2\omega^2\sin\omega t=-\omega^2x$$

∴　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$，∴　是解。

在题21.9—21.11中，对于已给微分方程，验证由函数方程所确定的函 数 为它的积分：

21.9　$(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=c$

解　∵　$2x-y-xy'+2yy'=0$，∴　$(x-2y)y'=2x-y$，∴　是。

21.10　$(x-y+1)y'=1$，$y=x+ce^y$

解　∵　$y'=1+ce^yy'$，∴　$(x-y+1)y'=(1-ce^y)\left(\dfrac{1}{1-ce^y}\right)=1$，

∴　是。

21.11　$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$，$y=\ln(xy)$

解　∵　$y'=\dfrac{1}{xy}(y+xy')$　即　$y'=\dfrac{y}{x(y-1)}$

$$y''=\frac{y'}{x(y-1)}-\frac{y[(y-1)+xy']}{x^2(y-1)^2}=\frac{x(y-1)y'-y(y-1)-xyy'}{x^2(y-1)^2}$$

$$=\frac{-y}{x^2(y-1)^3}-\frac{y}{x^2(y-1)}$$

∴　$(xy-x)y'+xy'^2+yy'-2y'$

$$=\frac{-y}{x(y-1)^2}-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x(y-1)^2}+\frac{y^2}{x(y-1)}-\frac{2y}{x(y-1)}$$

$$=\frac{y}{x(y-1)}-\frac{y}{x(y-1)}=0$$　　∴　是。

在题21.12—21.21中，对各已知曲线族（其中C，C_1，C_2，C_3都是任意常数）求出它相应的微分方程：

21.12　$(x-c)^2+y^2=1$

解　∵　$2(x-c)+2yy'=0$，∴　$x-c=-yy'$ 则得

$y^2y'^2+y^2=1$ 即 $y^2(y'^2+1)=1$

21.13　$y=ce^{\arcsin x}$

解　$y'=ce^{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　∴　$y-y'\sqrt{1-x^2}=0$

21.14　$y=cx+c^2$

解　∵　$y'=c$　　∴　$y=xy'+y'^2$

21.15　$y=c_1x+c_2x^2$

解　∵　$y'=c_1+2c_2x$，$y''=2c_2$，∴　$y=xy'-\dfrac{1}{2}x^2y''$

21.16　$y=c_1\cos(mx+c_2)$

解　∵　$y'=-mc_1\sin(mx+c_2)$，$y''=-m^2c_1\cos(mx+c_2)$

∴　$y''+m^2y=0$

21.17　$xy=c_1e^x+c_2e^{-x}$

解　∵　$y+xy'=c_1e^x-c_2e^{-x}$，$2y'+xy''=c_1e^x+c_2e^{-x}$

∴　$xy''+2y'-xy=0$

21.18　$y=c_1+c_2x+c_3x^2$

解　∵　$y'=c_2+2c_3x$，$y''=2c_3$，$y'''=0$，∴　$y'''=0$

21.19　$y=c_1\sin2x+c_2\cos2x$

解　∵　$y'=2c_1\cos2x-2c_2\sin2x$，

$y''=-4c_1\sin2x-4c_2\cos2x$，∴　$y'+4x=0$

21.20　$c_1x^2+c_2y^2-2x=0$

解　∵　$2c_1x+2c_2yy'-2=0$，$2c_1+2c_2(y'^2+yy'')=0$

∴　$2c_1x^2+2c_1xyy'=2x$　　　$c_1=-c_2(y'^2+yy'')$

∴　$-2c_2x^2(y'^2+yy'')+2c_2xyy'=2x=-c_2x^2(y'^2+yy'')+c_2y^2$

∴　$x^2(y'^2+yy'')-2xyy'+y^2=0$

21.21　$(y-c_2)^2=4c_1x$

解　∵　$2(y-c_2)y'=4c_1$，$(y-c_2)y''+y'^2=0$

∴　$(y-c_2)^2y''+(y-c_2)y'^2=0$ 即 $2xy''+y'=0$

21.22　所有轴为y轴而焦点为原点的抛物线组成一曲线族，试求此曲线族的微分方程。

解　曲线族方程为：$x^2=c\left(y+\dfrac{c}{4}\right)$

∵　$2x=cy'$，$c=\dfrac{2x}{y'}$，$x^2=\dfrac{2x}{y''}\left(y+\dfrac{x}{2y'}\right)$

∴　$2yy'+x=xy'^2$ 即 $2yy'-x(y'^2\cdot1)=0$

21.23 所有轴平行于 y 轴的抛物线组成一曲线族，试求此曲线族的微分方程。

解 曲线族方程为：$y=c_1(x-c_2)^2+c_3$

$\therefore\quad y'=2c_1(x-c_2)$，$y''=2c_1$，$y'''=0$

21.24 求三参数曲线族 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 的微分方程。

解 $y'=\dfrac{a(x+c)-(ax+b)}{(x+c)^2}=\dfrac{ac-b}{(x+c)^2}$

$y''=\dfrac{-2(ac-b)}{(x+c)^3}$，$\quad y'''=\dfrac{6(ac-b)}{(x+c)^4}$

$\therefore\quad y'\cdot y'''=\dfrac{3}{2}y''^2$ 即 $y'y'''-\dfrac{3}{2}y''^2=0$

在题21.25—21.28中，对各已知曲线族，找一曲线满足所给的初始条件：

21.25 $x^2-y^2=c$，$y|_{x=0}=5$

解 $0-25=C\qquad\therefore\quad y^2-x^2=25$

21.26 $y=(c_1+c_2x)e^{2x}$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$

解 $\because\quad 0=(c_1+0)e^0\qquad\therefore\quad c_1=0$

又 $\because\quad y'=c_2e^{2x}+2(c_1+c_2x)e^{2x}=(2c_1+c_2+2c_2x)e^{2x}$

$\therefore\quad 1=(0+c_2+0)e^0\qquad\therefore\quad c_2=1\qquad\therefore\quad y=xe^{2x}$

21.27 $\because y=c_1\sin(x-c_2)$，$y|_{x=\pi}=1$，$y'|_{x=\pi}=0$

解 $\because\quad y'=c_1\cos(x-c_2)$

$$\therefore\begin{cases}1=c_1\sin(\pi-c_2)\\0=c_1\cos(\pi-c_2)\end{cases}\qquad\therefore\quad c_2=\frac{\pi}{2},\quad c_1=1$$

$$\therefore\quad y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$$

21.28 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+c_2e^{2x}$，$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=-2$

解 $y'=-c_1e^{-x}+c_2e^{x}+2c_3e^{2x}$，$y''=c_1e^{-x}+c_2e^{x}+4c_3e^{2x}$

$$\therefore\quad 0=C_1+C_2+C_3\qquad\therefore\quad C_3=-\frac{2}{3}$$

$$1=-C_1+C_2+2C_3\qquad C_2=\frac{3}{2}$$

$$-2=C_1+C_2+4C_3\qquad C_1=-\frac{5}{6}$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{3}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$$

一 阶 微 分 方 程

（1）可分离变量的方程

在题21.29—21.41中求各微分方程的通解：

21.29 $xy'-y\ln y=0$

解 ∵ $\dfrac{dy}{y\ln y}=\dfrac{dx}{x}$ ∴ $\ln(\ln y)=\ln x+\ln c$

∴ $\ln y=cx$ 即 $y=e^{cx}$

21.30 $3x^2+5x-5y'=0$

解 $dy=\left(\dfrac{3}{5}x^2+x\right)dx$ ∴ $y=\dfrac{1}{5}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+C$

21.31 $y'=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

解 $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ∴ $\arcsin y=\arcsin x+c$

21.32 $y-xy'=a(y^2+y')$

解 $\dfrac{dy}{y(1-ay)}=\dfrac{dx}{x+a}$, $\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{a}{1-ay}\right)dy=\dfrac{dx}{x+a}$

∴ $\dfrac{y}{1-ay}=c(x+a)$

21.33 $xydx+(x^2+1)dy=0$

解 $\dfrac{-xdx}{x^2+1}=\dfrac{dy}{y}$ ∴ $y\sqrt{x^2+1}=C$

21.34 $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$

解 $\dfrac{-xdx}{1-x^2}=\dfrac{ydy}{y^2+1}$ ∴ $\dfrac{y^2+1}{1-x^2}=C$

21.35 $x\sec ydx+(x+1)dy=0$

解 $\cos ydy=\dfrac{-xdx}{x+1}$ ∴ $\sin y=\ln(x+1)-x+c$

21.36 $\sec^2x\operatorname{tg}ydx+\sec^2y\operatorname{tg}xdy=0$

解 $\dfrac{\sec^2x}{\operatorname{tg}x}dx=-\dfrac{\sec^2y}{\operatorname{tg}y}dy$ 即 $\dfrac{d(2x)}{\sin 2x}=\dfrac{-d(2y)}{\sin 2y}$

∴ $\ln\operatorname{tg}x=-\ln\operatorname{tg}y+\ln c$, ∴ $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y=0$

21.37 $(y+3)dx+\operatorname{ctg}xdy=0$

解 $\frac{-dx}{\operatorname{ctg} x}=\frac{dy}{y+3}$ $\ln(y+3)=\ln\cos x+\ln c$

$\therefore$ $y=C\cos x-3$

21.38 $\frac{dy}{dx}=10^{x+y}$

解 $\frac{dy}{10^{y}}=10^{x}dx$ $\therefore$ $10^{x}=-10^{-y}+C$ 即 $10^{x}+10^{-y}=C$

21.39 $y\ln xdx+x\ln ydy=0$

解 $\frac{\ln xdx}{x}=-\frac{\ln ydy}{y}$ $\therefore$ $\ln^2x+\ln^2y=C$

21.40 $(e^{x+y}-e^{x})dx+(e^{x+y}+e^{y})dy=0$

解 $\frac{e^{x}dx}{e^{x}+1}=\frac{-e^{y}dy}{e^{y}-1}$ $\therefore$ $\ln(e^{x}+1)=-\ln(e^{y}-1)+\ln c$

即 $(e^{x}+1)(e^{y}-1)=0$

21.41 $\cos x\sin ydx+\sin x\cos ydy=0$

解 $\operatorname{ctg} xdx=-\operatorname{ctg} yay$ $\therefore$ $\sin x\cdot\sin y=c$

在题21.42—21.46中，求已给微分方程满足初始条件的特解：

21.42 $\sin y\cos xdy=\cos y\sin xdx$, $y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$

解 $\operatorname{tg} ydy=\operatorname{tg} xdx$ $\therefore$ $\cos y=C\cos x$

代入初始条件：$\frac{\sqrt{2}}{2}=C$ $\therefore$ $\sqrt{2}\cos y-\cos x=0$

21.43 $\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$; $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$

解 $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$, $\therefore$ $\ln(\ln y)=\ln(\csc x-\operatorname{ctg} x)+\ln c$

即 $\ln y=c(\csc x-\operatorname{ctg} x)$，代入初始条件 $1=C$

$\therefore$ $\ln y=\csc x-\operatorname{ctg} x$

21.44 $(1+e^{x})yy'=e^{x}$, $y|_{x=1}=1$

解 $ydy=\frac{e^{x}dx}{1+e^{x}}$, $\therefore$ $\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^{x})+c$

代入初始条件：$C=\frac{1}{2}-\ln(1+e)$ $\therefore$ $y^2-1=2\ln(1+e^{x})-2\ln(1+e)$

21.45 $y'=e^{2x-y}$, $y|_{x=0}=0$

解 $e^{y}dy=e^{2x}dx$ $\therefore$ $e^{y}=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

代入初始条件：$c=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$　　　　$\therefore\ e^{y}=\frac{1}{2}(1+e^{2x})$

21.46　$\frac{x}{1+y}dx-\frac{ydy}{1+x}=0,\quad y|_{x=0}=1$

解　$(x+x^2)dx=(y+y^2)dy$　　　　$\therefore\ \frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+c$

代入初始条件：$c=-\frac{5}{6}$，$\therefore 2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0$

21.47　质量为1克的质点受力作用直线运动，这力和时间成正比，和质点运动的速度成反比，在 $t=10$秒时，速度等于50厘米/秒，力为4达因，问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少？

解　$F=K\frac{t}{v}$由 $4=\frac{10}{50}K$，$\therefore K=20$，

又 $F=mv'$，$m=1$，$v|_{t=0}=0$；$\therefore$得 $v'=\frac{20t}{v}$　$\therefore \frac{1}{2}v^2=10t^2+c$

代入初始条件：$C=0$　$\therefore v=\sqrt{20}\,t$，当 $t=60$时

$v=\sqrt{20}\times 60\doteq 268.3$厘米/秒。

21.48　根据水力学中的定律，水从距自由面深度为 h 厘米的孔流出，它的流速$v=\sqrt{2gh}$厘米/秒，式中 g 是重力加速度。现有盛满水而高为1米的半球形容器，水从它底端的一个面积为1平方厘米的孔流出，孔口收缩系数为0.6（孔口收缩系数是流出来的水柱截面积与孔口面积之比）。试求流尽所需时间。

解　$\pi r^2dh=-0.6vdt$

$r^2=100^2-(100-h)^2=200h-h^2$

$\therefore\quad \pi(200h-h^2)dh=-0.6\sqrt{2gh}\,dt$

即　$(200h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh=-0.6\frac{\sqrt{2g}}{\pi}dt$ 又 $h|_{t=0}=100$

$\therefore\quad \frac{400}{3}h^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}}=-0.6\frac{\sqrt{2g}}{\pi}t+c$

代入初始条件：$C=\frac{14}{15}\times 10^5$

$\because$流完时$h=0$　$\therefore\quad t=\frac{14}{15}\times 10^5\times\frac{\pi}{0.6\sqrt{2g}}\doteq 184$分

21.49　镭的衰变有如下的规律：镭的衰变速度与镭所现存的量 R 成正比，由经验材料断定，镭经过1600年后，只余原始量 R_0 的一半，试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系。

解　$\frac{dR}{dt}=-KR$，$\therefore \frac{dR}{R}=-Kdt$，$\therefore R=ce^{-kt}$

$\because \quad R|_{t=0}=R_0,\ R|_{t=1600}=\dfrac{R_0}{2}$，$\therefore C=R_0$，$-\ln 2=-K\times 1600$，

即$K\doteq 0.000433$，$\therefore R=R_0e^{-0.000433t}$

21.50　一曲线通过点（2，3），它在两座标轴间的任意切线线段均被切点所平分，求此曲线。

解　设曲线方程为：$y=f(x)$，$y|_{x=2}=3$，设切点为$(x_0,\ y_0)$，则切线方程为：$y-y_0=y'_0(x-x_0)$，它与x轴和y轴的交点分别为：$x=x_0-\dfrac{y_0}{y'_0}$，$y=y_0-y'_0x_0$，由题意得：$2x_0=x=x_0-\dfrac{y_0}{y'_0}$ 或 $2y_0=y=y_0-y'_0x_0$，$\therefore$得微分方程：$\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$ $\therefore$ $xy=C$，代入初始条件$C=6$，$\therefore$所求曲线为：$xy=6$。

21.51　求曲线方程，使得曲线上任意一点$(x,\ y)$处的切线常垂直于此点与原点的联线。

解　点$(x,\ y)$与原点联线的斜率$k=\dfrac{y}{x}$，切线的斜率$k_1=y'$，$\therefore \dfrac{y}{x}\cdot y'=-1$　$\therefore$

$ydy+xdx=0$

所求曲线：$x^2+y^2=C$

21.52　一曲线通过点（2，0），并具有一种性质，即在切点和纵座标轴间的切线段有定长2，求这曲线。

解　切线方程为：$y-y_0=y'_0(x-x_0)$，($(x_0,\ y_0)$为切点)切线与y轴交点$(0,y_0-y'_0x_0)$，由题意得：

$$4=(y_0-y'_0x_0-y_0)^2+(0-x_0)^2$$

$\therefore$　得微分方程：$y'^2=\dfrac{4}{x^2}-1$　即 $y'=\dfrac{\pm\sqrt{4-x^2}}{x}$

$$\therefore\quad y=\int\frac{\pm\sqrt{4-x^2}}{x}dx=\int\left(\frac{\pm 4}{x\sqrt{4-x^2}}\mp\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$$

$$=\pm\sqrt{4-x^2}\mp 2\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}+c$$

$\therefore$　$y|_{x=2}=0$　　$\therefore$　$C=0$，$\therefore$所求曲线为：

$$y=\pm\sqrt{4-x^2}\mp 2\ln\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$$

(ii) 齐次方程

在题21.53—21.65中，求已给微分方程的通解：

21.53　$y'=\dfrac{y}{x}+\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$

解　令$\dfrac{y}{x}=v$，则$v+xv'=y'=v+\mathrm{tg}v$，

$\therefore$　$\mathrm{ctg}v\,dv=\dfrac{dx}{x}$，$\therefore$　$\sin v=cx$ 即 $y=x\arcsin cx$

21.54 $xy'-x\sin\frac{y}{x}-y=0$

解 令 $y=xv$，则 $xv+x^2v'-x\sin v-xv=0$ 即 $xv'=\sin v$

$\therefore \quad \frac{dv}{\sin v}=\frac{dx}{x}$，$\text{tg}\frac{v}{2}=cx$ 即 $y=2x\text{arctg}cx$

21.55 $(x+y)y'+(x-y)=0$

解 令 $y=xv$，则 $v+xv'=\frac{v-1}{v+1}$ 即 $\frac{v+1}{v^2+1}dv=-\frac{dx}{x}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}\ln(v^2+1)+\text{arctg}v=-\ln x+\ln c$

$\therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}=ce^{-\text{arctg}\frac{y}{x}}$

21.56 $y'=\frac{y}{y-x}$

解 令 $y=xv$，则 $v+xv'=\frac{v}{v-1}$ 即 $\frac{v-1}{2v-v^2}dv=\frac{dx}{x}$

$\therefore \quad \sqrt{2v-v^2}\cdot x=C_1$，即 $2xy-y^2=C$

21.57 $(4y-3x)\frac{dy}{dx}+(y-2x)=0$

解 方程可化成：$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{4y-3x}$，令 $y=xv$ 则

$$v+xv'=\frac{2-v}{4v-3} \text{即} \frac{4v-3}{1+v-2v^2}dv=\frac{2dx}{x}$$

$$\frac{-2}{1+v-2v^2}dv=\frac{-4v}{1+v-2v^2}dv+\frac{2dx}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{-1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\frac{v+\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{v+\frac{1+\sqrt{3}}{2}}\right)=\ln(1+v-2v^2)\cdot x^2\cdot c_1$$

$$\therefore \quad (x^2+xy-2y^2)^2=C\left(\frac{y+\frac{1-\sqrt{3}}{2}x}{y+\frac{1+\sqrt{3}}{2}x}\right)^{\frac{-1}{\sqrt{3}}}$$

21.58 $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$

解： 此题有简便解法，因方程可化为：$d(xy)=2\sqrt{xy}\,dx$

即 $\frac{d(xy)}{2\sqrt{xy}}=dx \quad \therefore \sqrt{xy}=x+c$

21.59 $x\frac{dy}{dx}-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$

解 令 $y=xv$，则 $\frac{dv}{\sqrt{v^2-1}}=\frac{dx}{x}$，$\therefore \quad v+\sqrt{v^2-1}=cx$

即 $y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2$

21.64 $y(x^2-xy+y^2)+x(x^2+xy+y^2)\frac{dy}{dx}=0$

解 令 $y=xv$ 则 $v(1-v+v^2)+(1+v+v^2)(v+xv')=0$

即 $\frac{1+v+v^2}{v+v^3}dv=\frac{-2dx}{x}$ $\therefore \ln v+\ln x^2=\ln c-\operatorname{arctg}v$

$\therefore \quad xy=ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

21.61 $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$

解 令 $y=xv$，$v+xv'=v\ln v$ 即 $\frac{dv}{v(\ln v-1)}=\frac{dx}{x}$

$\therefore \quad \ln v-1=cx \quad \therefore \quad y=xe^{Cx+1}$

21.62 $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$

解 令 $y=xv$ 则 $v+xv'=e^v+v$ 即 $\frac{dv}{e^v}=\frac{dx}{x}$

$\therefore \quad -e^{-v}=\ln cx$ 即 $\ln cx=-e^{-\frac{y}{x}}$

21.63 $(x^2+y^2)dx-xydy=0$

解 方程可化成：$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$，令$y=x$，则

$v+xv'=\frac{1}{v}+v \quad \therefore \quad vdv=\frac{dx}{x}$，$\therefore \frac{1}{2}v^2=\ln x+\frac{c}{2}$

$\therefore \quad y^2=x^2(c+\ln x^2)$

21.64 $\left(x+y\cos\frac{y}{x}\right)dx-x\cos\frac{y}{x}dy=0$

解 方程即$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$，令$y=xv$，则

$$\cos v dv = \frac{dx}{x} \quad \therefore \quad cx = e^{\sin\frac{y}{x}}$$

21.65 $x^2 y dx - (x^3 + y^3) dy = 0$

解 方程即 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3}$，令 $y = xv$，则

$$v + xv' = \frac{v}{1+v^3} \text{即} \frac{-(1+v^3)}{v^4} dv = \frac{dx}{x}$$

$\therefore \quad \frac{1}{3} v^{-3} - \ln v = \ln x - \ln c \quad \therefore \quad y = ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$

21.66 求微分方程 $(y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解。

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = 3 - \frac{2\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2}}$ 令 $y = xv$，则

$$v + xv' = \frac{2v}{3 - v^2} \text{即} \frac{-v^2 + 3}{v^3 - v} \quad dv = \frac{dx}{x} = \left(-\frac{3}{v} + \frac{2v}{v^2 - 1}\right) dv$$

$\therefore \quad \frac{v^2 - 1}{v^3} = cx$ 即 $y^2 - x^2 = cy^3$ 代入初始条件 $C = 1$

$\therefore$ 所求特解：$y^3 = y^2 - x^2$

21.67 求微分方程 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 2$ 的特解。

解 由21.63知通解为：$y^2 = x^2(c + \ln x^2)$，代入初始条件：$4 = c$ $\therefore$ 特解为：$y^2 = x^2(4 + \ln x^2)$

21.68 求微分方程 $(x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解。

解 方程化成：$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2 + 2xy - y^2)}{y^2 + 2xy - x^2}$，令 $y = xv$，

则 $v + xv' = \frac{-(1 + 2v - v^2)}{v^2 + 2v - 1} \therefore \frac{v^2 + 2v - 1}{v^3 + v^2 + v + 1} dv = -\frac{dx}{x}$

即 $\left(\frac{2v}{v^2 + 1} - \frac{1}{v + 1}\right) dv = -\frac{dx}{x} \therefore \frac{v^2 + 1}{v + 1} = \frac{C}{x}$

即 $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = C$，代入初始条件 $C = 1$

$\therefore$ 所求特解为：$x^2 + y^2 = x + y$

在题21.69—21.74中，求 x 与 y 之一次非齐次方程的通解：

21.69 $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{-3y+7x-7}{7y-3x+3}$ 令$x=x-1$，$y=y$，则

$\frac{dY}{dx}=\frac{-3Y+7x}{7Y-3x}$ 再令 $y=xv$，则

$v+xv'=\frac{-3v+7}{7v-3}$ 即 $\frac{7v-3}{7-7v^2}dv=\frac{dx}{x}$

∴ $\frac{2}{7}\ln(1-v)+\frac{5}{7}\ln(1+v)=\ln x+\ln C$

∴ $(1-v)^2(1+v)^5x^7=C$ 即 $(y+x-1)^5(y-x+1)^2=C$

21.70 $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1}{y+x+5}$

解 令$x=x+2$，$Y=y+3$，$\frac{dY}{dx}=\frac{Y-x}{Y+x}$，再令 $Y=Xv$

则 $v+xv'=\frac{v-1}{v+1}$ 即 $\frac{v+1}{v^2+1}dv=-\frac{dx}{x}$

∴ $\frac{1}{2}\ln(v^2+1)+\text{arctg}v=-\ln x+\frac{1}{2}C$

即 $\ln[(y+3)^2+(x+2)^2]+2\text{arctg}\frac{y+3}{x+2}=C$

21.71 $(x+2y+1)dx+(2x+3y)dy=0$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{-(x+2y+1)}{2x+3y}$ 令$x=x-3$，$Y=y+2$，则

$\frac{dY}{dX}=\frac{-(X+2Y)}{2X+3Y}$，再令$Y=Xv$，则

$v+Xv'=\frac{-(1+2v)}{2+3v}$ 即 $\frac{(2+3v)}{(3v+1)(v+1)}dv=-\frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{2}\ln(3v+1)(v+1)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln C$$

∴ $(3Y+X)(Y+X)=C$ 即 $(x+y-1)(x+3y+3)=C$

21.72 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{-(2x+y-4)}{x+y-1}$ 令$x=x-3$，$Y=y+2$，则

$\therefore \quad \frac{1}{2}v^2 - \ln v = \ln u + \ln C$ 即 $\frac{y^2}{u^2} = \ln(cy^2)$

$\therefore \quad y^2 = x\ln(cy^2)$

(iii) 线性方程及柏努里方程

在题21.77—21.92中，求已给线性微分方程的通解：

21.77 $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

解 $y = e^{-\int dx}\{\int e^{-x} \cdot e^{\int dx}dx + C\} = (x+c)e^{-x}$

21.78 $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \text{tg}x$

解 $\because \frac{dy}{dx} + \sec^2 x \cdot y = \sec^2 x\text{tg}x$

$y = e^{-\int \sec^2 x dx}\{\int \sec^2 x\text{tg}x e^{\int \sec^2 x dx}dx + C\}$

$\int\{= e^{-\text{tg}x}e^{\text{tg}x} \cdot \text{tg}x d(\text{tg}x) + C\} = (\text{tg}x - 1) + ce^{-\text{tg}x}$

21.79 $(x+1)\frac{dy}{dx} - ny = e^x(x+1)^{n+1}$

解 $\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x+1}y = e^x(x+1)^n$

$$y = e^{\int \frac{n}{x+1}dx}\left\{\int e^x(x+1)^n e^{\int \frac{-n}{x+1}dx}dx + c\right\}$$

$$= (x+1)^n(e^x + c)$$

21.80 $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$

解 $$y = e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}dx}\left\{\int \frac{4x^2}{x^2+1} e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx}dx + c\right\}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{4}{3}x^3 + c\right)$$

21.81 $\frac{dy}{dx} + 2y = 4x$

解 $$y = e^{-\int 2dx}\left\{\int 4xe^{\int 2dx}cx + c\right\}$$

$$= e^{-2x}\left\{\int 4xe^{2x}dx + c\right\} = (2x-1) + ce^{-2x}$$

21.82 $\frac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$

解 $$y=e^{-\int 2xdx}\left\{\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx+c\right\}=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

21.83 $xy'+y=x^2+3x+2$

解 $$y=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left\{\int\left(x+3+\frac{2}{x}\right)e^{\int\frac{dx}{x}}+c\right\}=\frac{1}{x}\left\{\int(x^2+3x+2)dx+c\right\}$$

$$=\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}x+2+\frac{c}{x}$$

21.84 $y'+2y=e^{3x}$

解 $$y=e^{-\int 2dx}\left\{\int e^{3x}e^{\int 2dx}dx+c\right\}=e^{-2x}\left\{\int e^{5x}dx+c\right\}$$

$$=e^{-2x}\cdot\left\{\frac{1}{5}e^{5x}+c\right\}=\frac{1}{5}e^{3x}+ce^{-2x}$$

21.85 $y'+\frac{y}{x}=\sin x$

解 $$y=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left\{\int\sin x\, e^{\int\frac{dx}{x}}dx+c\right\}=\frac{1}{x}\left\{\int x\sin xdx+c\right\}$$

$$=\frac{1}{x}(-x\cos x+\sin x+c)=-\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{c}{x}$$

21.86 $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$

解 $$y=e^{-\int\cos xdx}\left\{\int e^{-\sin x}\cdot\int e^{\int\cos xdx}dx+c\right\}$$

$$=e^{-\sin x}(x+c)$$

21.87 $y'+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$

解 $$y=e^{-\int\operatorname{tg}xdx}\left\{\int\sin 2xe^{\int\operatorname{tg}xdx}dx+c\right\}$$

$$=\cos x\left\{\int 2\sin xdx+c\right\}=-2\cos^2 x+c\cos x$$

21.88 $xy'-y=\frac{x}{\ln x}$

解 $y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left\{\int\frac{1}{\ln x}e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+c\right\}=x\left\{\int\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x}+c\right\}$

$=x\ln\ln x+cx$

21.89 $(x^2-1)y'+2xy-\cos x=0$

解 $$y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left\{\int\frac{\cos x}{x^2-1}e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+c\right\}$$

$$=\frac{1}{x^2-1}\left\{\int\cos x dx+c\right\}\frac{1}{x^2-1}(\sin x+c)$$

21.90 $x^2y'-y=x^2e^{x-\frac{1}{x}}$

解 $$y=e^{\int\frac{dx}{x^2}}\left\{\int e^{x-\frac{1}{x}}\cdot e^{-\int\frac{dx}{x^2}}dx+c\right\}$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\left\{\int e^x dx+c\right\}=e^{-\frac{1}{x}}(e^x+c)$$

21.91 $y'+\frac{2}{x}y+\frac{x}{a}=0$

解 $$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left\{\int\frac{x}{a}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c\right\}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\int-\frac{x^3}{a}dx+c\right)=\frac{c}{x^2}-\frac{x^2}{4a}$$

21.92 $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

解 $$y=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left\{\int(1+x^2)e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+c\right\}$$

$$=(1+x^2)(x+c)$$

在题21.93—21.97中，求已给线性微分方程满足初始条件的特解：

21.93 $\frac{dy}{dx}-y\,\mathrm{tg}\,x=\sec x$，$y|_{x=0}=0$

解 $$y=e^{\int\mathrm{tg}\,xdx}\left\{\int\sec x e^{-\int\mathrm{tg}\,xdx}dx+c\right\}$$