高等院校文科试用教材

数理逻辑讲义

刘治旺　邵春林
毕富生　赵哈黎
编　写

郑州大学哲学系印

高等院校文科试用教材

数理逻辑讲义

[illegible] 邵[illegible]林
[illegible]生 赵[illegible]黎 [illegible]

1982年6月

说　　明

随着科学和教育事业的发展，我国高等院校文科正在逐步开设数理逻辑基础课。为了适应教学需要，我们根据文科的特点，编写了这本讲义。

本书主要介绍数理逻辑的基础知识。阐述力求通俗易懂，便于读者接受。它可以作为哲学、社会科学工作者，特别是逻辑工作者和高校文科学生以及其他同志学习数理逻辑的入门书。

本书是在河南省教育厅和郑州大学的热情支持和关怀下完成的。参加本书编写和修改的单位（依笔划为序）有：山西大学、山西师范学院、云南大学、四川大学、兰州大学、辽宁大学、西北大学、华东师范大学、河北大学、郑州大学、河南师范大学、南开大学、南京大学、哈尔滨市委党校、厦门大学等单位。

本书承蒙莫绍揆教授和沈百英老师的直接指导和具体帮助。莫绍揆教授审阅了全书，并提出了许多指导性的意见。沈百英老师对本书作了全面的修改和订正。在此，谨向他们表示衷心的感谢。

本书修改过程中，张文洮先生以及马佩、何应灿、张宝文、周洪仁、陶景侃、姜斗星、晁增寿、张军、王宗烘、谷雅琴、聂世果、张振华、刘卫、陈模、潘道江、张岚、何向东等同志参加了讨论草稿并提出了宝贵意见。此外，徐孝

通、章沛、且大有、苏天辅、孙煜、李廉、周尚荣、郁慕镛、彭树森、鲁忠霖、刘性凤等逻辑界的专家、学者和同志也曾提出了衷恳的意见并给予大力支持。在此，特向上述同志致以诚挚地谢意。

本书如果文科使用作教材，讲授时间在八十学时左右，可全部授完；在不足六十学时，可以删掉带“※”部分，删掉后不影响全书的系统性。如果理工科专业（不包括数学专业）使用本书作教材，讲授时间在七十学时左右，即可全部授完。

由于水平有限，教学经验不足，特别是时间仓促，书中难免有不当之处，敬请诸位专家和广大读者批评指导。

编　者

1982年6月1日

目　　录

附　录：

绪　论

数理逻辑发展到今天，尽管只有短短的三百年历史，但已经是一门门类众多、系统完整的学科。随着现代科学技术的突飞猛进，它同其他许多学科有着密切的联系。数理逻辑研究的可计算性问题，是计算机运算的理论基础，它所揭示的推理的逻辑关系，在计算机的线路设计中得到应用。到了本世纪四十年代，数理逻辑在开关线路、电子计算机、自动控制、各种讯息处理系统等方面获得显著成果。六十年代以后，电子计算机不仅广泛应用在自然科学各领域里，而且应用于企业管理、考古等方面，这些应用不可避免地要进行各种程序设计，而程序设计方面有许多逻辑问题，数理逻辑在这方面的作用是不可忽视的。数理逻辑的发展和应用，进一步促进了哲学、语言学、法学和心理学等学科的发展，使这些学科产生了许多新的研究方法和值得探讨的问题。随着人们科学知识水平的不断提高，数理逻辑的理论及其应用必将进一步得到发展。

长期以来，唯心主义者歪曲数理逻辑的某些成果，他们割裂了思维和客观世界的联系，把数理逻辑神密化，把数理逻辑的理论说成是不依赖任何经验的先验的理论。现代资产阶级哲学中影响较大的分析学派、逻辑实证主义、语义哲学等都曾片面地利用数理逻辑的某些方面的方法和观点来“论证”其唯心主义理论。所以，我们今天学习和研究这门科

学，要把数理逻辑本身同唯心主义哲学对它的歪曲和利用严格区别开来。我们之所以关心和重视这门科学，一方面因为它本身是经过实践检验的科学理论，另一方面要发挥它的真正作用，使它为提高人们的理论思维能力服务。

一、数理逻辑研究的对象和主要内容

逻辑学是研究思维形式及其规律的科学，它是一门比较抽象的科学，是人们认识真理和证明真 理的 一种 工具。所以，逻辑学研究的对象和成果对任何科学都是必要的。

形式逻辑认为，思维形式就是思维的共有因素的联系形式，如概念、判断和推理。这些思维形式的具体结构就是思维的逻辑结构。让我们来看推理的逻辑结构：

例1．造福于人类的知识都是有价值的，
　　科学是造福于人类的知识，
　　所以，科学是有价值的。

例2．所有哲学上的唯物主义者都是无神论者，
　　所有马克思主义者都是哲学上的唯物主义者，
　　所以，所有马克思主义者都是无神论者。

例1和例2这两个推理的具体内容，即推理涉及的具体对象是不同的，但它们具有相同的逻辑结构。在逻辑学中，这一结构可用符号表示为下列形式：

所有M都是P；
所有S都是M；
所以，所有S都是P。

我们知道，这种共同的逻辑推理形式是由三个命题构成的。

其中，前两个命题是前提，最后一个是结论。这种形式的推理就是传统逻辑中所谓的直言三段论推理。仅根据这一推理形式本身，我们无法辨别其正确与否。为此，传统逻辑制定了一整套复杂的推理规则，来保证三段论推理的正确性。然而这些推理规则中的某些规则，如只准有三个名词的规则，又和自然语言的意义有着十分密切的关系。因此，在传统逻辑中，要对思维的逻辑结构及其规律作精确的、纯形式的研究，实际上是不可能的。

另外，传统逻辑对假言、选言等混合而成的复杂推理及其形式，很难断定它们是否正确。比如，

例3．如果张三课堂认真听讲而且课后认真复习，那么他就会取得良好成绩。张三课后认真复习，但他并非取得良好成绩。所以，他课堂不是认真听讲。

如果按传统逻辑的方法来处理，那么可以把这个推理形式化如下：

如果p而且q，则r；
　　q而且非r，
―――――――――――
所以，非p。

其中，p表示张三课堂认真听讲；q表示他课后认真复习；r表示他取得良好成绩。但是从上边的形式化中，我们很难断定此答案是否正确。如果我们采取数理逻辑的方法，那么就可以弥补这些缺陷。在数理逻辑中，我们可以用一系列的符号把上述的三段论的推理形式和假言、选言混合而成的复杂推理形式，表示为纯形式的符号公式。在不受自然语言的含混性干扰的情况下，通过对符号公式本身的研究，我们就能确定其相应的推理形式是否正确。

一般地说，传统逻辑推理理论的主要缺陷有：

第一，传统逻辑所讨论的主要限于主宾式语句和三段论，以致在很多方面都显得不适于使用。所谓主宾式语句是指“S是P”式的语句。它所讨论的限于四种：

全称肯定（A）：凡S是P，即SAP

全称否定（E）：凡S非P，即SEP

特称肯定（I）：有S是P，即SIP

特称否定（O）：有S非P，即SOP

然后，在这四种语句之上发展了三段论。

但是，在人们日常思维的领域里，常见的一些关系命题和关系推理是不能简单地被归结为主宾式的。比如，“甲大于乙，乙大于丙，所以，甲大于丙。”和“帝国主义是战争的根源，所以，消灭帝国主义即消灭战争的根源。”这两种推理都是牵涉到关系的推理，不能归结为主宾式。也许有人会说，前一个推理可以变成三段论：

凡大于乙的是大于丙，

甲是大于乙的，

所以，甲是大于丙的。

这种说法把“大于”关系当作性质，从而把四项变成三项。这是一种混淆。“大于”根本不是性质。在“甲大于乙”这个命题中，甲和乙处于同等地位，都是关系主项，“大于”并不是属于甲的一种性质，而是甲和乙两者之间的关系。这个推理中有四项，即“甲”、“大于乙”、“乙”、“大于丙”，违反了三段论规则。因此这个推理既不属于主宾式，也不属于三段论。至于后一个关系推理更沾不上三段论的边。再如这样两个关系命题：

（1）有的液体可以溶解一切固体。

（2）一切固体都可以被有些液体溶解。

这两个关系命题从（1）可以推出（2），却不能从（2）推出（1）。（1）意指：有一个 y，使得 y 是液体并且对所有 x 而言，如果 x 是固体，那么 y 溶解 x。（2）意指：对所有 x 而言，如果 x 是固体，那么就有一个 y 使得 y 是液体并且 y 溶解 x。这两个关系命题在传统逻辑中是无法表示的。

第二，传统逻辑的研究限于主宾式语句，这样对量词的研究非常有限，没有抓住量词的实质，而只能得出量词的一些次要性质。请看下边两个命题

（3）有一个自然数大于其余一切自然数。

这个命题等于说：有一个 y，使得 y 是自然数并且对所有 x 而言，如果 x 是自然数而 $x \neq y$，那么 y 大于 x。

（4）对于任何自然数 n 都有自然数 x 和 y，使得 $2(n+1) = x + y$ 而且 x，y 都是质数。

（3）和（4）中量词的使用，无论在日常语言中或者数学中都是不可缺少的，用传统逻辑的全称判断，特称判断显然是很难陈述出来的。

第三、传统逻辑研究一些逻辑结构并使用一些符号来表达逻辑形式，但由于它停留在自然语言上，没有专门的逻辑符号来处理各类思维形式；并由于它没有完全脱离自然语言，所以就不够精确．因之也就不具有演算的性质，不能把推理转化为演算，对于复杂的命题形式及推理，它更是无法解决了。

由于上述原因，人们觉得传统逻辑很不够用，需要加以改革和发展。同时，由于理论科学的发展，特别是数学等科学的发展，有力地促进了演绎理论的研究。正是由于上面两

方面的原因，从法国数学家兼哲学家莱布尼茨（G·W·Leibnitz，1646年——1716年）开始逐渐创建了数理逻辑。

什么是数理逻辑？它就是采用数学的方法来研究思维形式的逻辑结构及其规律的学问。所谓数学的方法，就是用一套符号（即人工符号语言）表达思维的逻辑结构和规律，从而把对思维的研究转变为符号的研究。

数理逻辑对推理形式结构的研究，采用了符号系统、形式化、公理化等数学方法。因而克服了传统逻辑的种种缺陷。它建立了各种演绎的符号系统，这些系统通常称之为“逻辑演算”或“逻辑推理”的系统。所谓逻辑演算，一般是指演绎逻辑的符号化的形式系统。系统中的公理和定理都是逻辑定律，如同一律、矛盾律、排中律以及演绎推理所依据的各种定律。因为它本身就是关于逻辑的理论，所以它不假定各种推理形式，而只假定几个最基本的推演规则，根据这些推演规则可以从少数几个公理推出全部逻辑定律。

数理逻辑的逻辑演算同传统逻辑对推理的研究相比，有许多不同之点，主要是：

1．使用符号语言，简化了推理形式。数理逻辑使用一套专门的符号来处理各种思维形式，完全消除了自然语言的含混性，摆脱了自然语言的限制。数理逻辑的一系列定理是根据已知前提、推理规则、已证的定理推演出来的。这种演算过程是通过符号公式来进行的，而这种演算系统也就呈现为符号系统。数理逻辑借助人工符号语言来表示推理的形式结构，从而把推理关系表现为公式与公式之间的关系，使推理转化为公式的推演。这样的逻辑运算显然能象算术或代数那样严格、精确，自然要比传统逻辑推理简单得多。

2．数理逻辑借助人工符号语言，使整个推理形式化．它抽出自 然语言 的关联 词，如“非”、“且”、“如果……则……”等．用人工符号语言表示思维形式的结构，把思维形式完全形式化，这样不仅能显示思维形式的结构，使推理换成演算，而且还有利于获得一系列逻辑定理．在数理逻辑中，逻辑联结词、命题、量词和推理的形式等，都反映着思维的逻辑结构是完全符号化、形式化．当然，传统逻辑也具有形式的特点，但它并不是完全形式化的．

3．数理逻辑同逻辑学的其它分支相比较，它的主要特征是系统性．它通过符号把思维的各种逻辑形式联系起来，组成一个完整的系统．它研究各种系统(比如推理系统、控制系统等等)的逻辑发展过程，也研究系统之间的相互关联．

从以上分析可知，数理逻辑对思维的逻辑结构及其规律比传统逻辑精确、丰富、系统、深刻．正如哥德尔说的，数理逻辑不外是形式逻辑的精确的和完全的表达．

顺便指出，对数理逻辑的研究，并不意味着抛弃传统逻辑，完全代替传统逻辑的研究．首先，传统逻辑本身不是从纯形式角度来研究思维形式及其规律的，而是从我们日常语言及其表达方式的角度来阐明思维形式正确性的．它的主要作用是帮助人们正确表达思想，正确进行论辩．所以，传统逻辑不能而且也不应该离开人们的日常语言和日常的具体思维．传统逻辑的这一作用是数理逻辑不能胜任的，人们在日常生活中决不会用数理逻辑的语言来表达和论辩．其次，传统逻辑讨论的一些和认识论有关的问题，数理逻辑也是处理不了的．因为这些问题不能用数学方法来处理．

总之，数理逻辑和传统逻辑是既有联系又有差别的，是

两门不同的逻辑科学。从根本上讲，数理逻辑是传统逻辑的发展。因此逻辑学的学习不能停留在传统逻辑的阶段，要进一步研究数理逻辑，这样才能达到对思维的逻辑结构及其规律有比较深刻的认识。

迄今为止，数理逻辑已经形成了自己的研究方法和理论体系。一般说来，数理逻辑分五大部分：

（1）逻辑演算；（2）证明论；（3）集合论；（4）模型论；（5）递归论，又叫做能行性理论。

需要向读者说明，这五大部分内容中，逻辑演算（命题演算和谓词演算）是数理逻辑的基础部分，这部分讨论的内容都是纯逻辑的内容，而另外四部分则和数学是密切相关的，它们或者本身便是数学，从中抽出一部分作为数理逻辑的内容（如集合论、递归论）；或者是由数学问题直接引出的（如证明论、模型论），讨论数学时不能不考虑它们，只是因为它们和逻辑有关，才归于逻辑，其实把它们算作数学，作为数学的一个新兴部门是完全可以的。这四部分内容不是哲学、社会科学工作者和高等院校文科学生必须掌握的学问，因此我们就不再一一介绍了。

二、数理逻辑的发展概况

同任何一门科学一样，数理逻辑也经历了一个发生和发展的过程。它最初是作为“运用数学方法的逻辑”产生的，主要是在数学等演绎科学发展的基础上并适应它们的表述和论证的需要而兴起的。随后，数学的发展逐渐正式提出并要求认真解决数学的逻辑和哲学基础问题，于是数理逻辑又进

一步发展成主要是"关于数学的逻辑"，并且与数学基础理论相结合，成了一门数学科学。前一种意义下的数理逻辑，又常称为逻辑演算，它通常作为基础部分包括在后一意义下的数理逻辑之中。后者是逻辑与整个数学相结合的产物，它研究数学中的逻辑问题。大家知道，数学的一个特点是它的抽象性和逻辑上的严格性。每一条数学定理都要求有严格的逻辑证明。对数学中特有的逻辑问题的研究，既丰富了逻辑学的内容，也促进了数学的发展。由此可见，数理逻辑和数学的关系是相当密切的。

我们知道，数学研究的对象是现实世界的数量关系和空间形式，即数与形。数学的特点是它的高度抽象性、精确性和普遍性（应用的广泛性），十七世纪时，数学的发展日臻完善。通过用字母表示已知数量和未知数量以及用符号表示运算，代数已经完全符号化，即完全用人工符号语言表达数学的运算和定律，解析几何的创立，变量和函数概念的出现，使人们可以用代数方法来描述和研究几何图形。微积分学的产生，又使人们可以用几何和代数方法来研究物质运动的形式。以上这些成就，为用代数方法研究思维形式及其规律提供了前提。人们设想，是否可以用代数的方法，把命题的形式结构用符号和公式来表达，把推理中前提与结论之间的关系转换为公式与公式之间的运算。正因为如此，在西方逻辑发展史上，从古希腊的哲学家亚里士多德创立古典逻辑以来，有许多逻辑学家、哲学家都曾设想并探索，把逻辑进一步形式化，把思维形式之间的关系和逻辑推理变成象代数、算术的运算一样，把符号语言运用到逻辑上，以推动逻辑的发展。经过一个不太长的时期，这一设想终于变为现

实．具体地讲，从数理逻辑的产生和发展大致可分为三个阶段：

第一阶段——从十七世纪六十年代至十九世纪八十年代。

这个阶段数理逻辑研究的特点是，用一些初级的数学方法来处理古典逻辑中演绎推理的形式和规律，获得了初步的成功，逻辑代数就是这个阶段的重大成果。

早在古希腊毕达哥拉斯（约公元前580年——500年）学派的哲学中，就有了把思维归为计算的思想．他们认为数是万物的本原，事物之间的关系就是数之间的关系．因此，观念（逻各斯）与数，思维与数的运算是一回事．其后，伊壁鸠鲁派的斐珞德谟（公元前一世纪）曾在他的《哲学的语法》中明确谈到逻辑与计算的同一性．欧洲中世纪时，西班牙逻辑学家瑞蒙·卢尔（R·Lullus，1235年——1315年）开始用字母即数学符号来表达概念，用＋（加）、－（减）、×（乘）等来表达对概念的运算，试图得到一种逻辑演算．他是第一个提出和设计"逻辑机"的人。十七世纪资本主义还处于上升阶段，随着生产力的发展，自然科学也日益繁荣，在当时的自然科学中，力学占着主导的地位．力学的发展与数学是密不可分的．数学的成就提供了表达运动的形式和计算方法，同时力学的研究又推动了数学的进一步发展．数学的方法在认识自然，发展技术方面，起到了重要作用．所以，人们的头脑里就产生了把数学的方法推广到其它科学领域的思想．人们希望能够用数学方法来研究思维，希望能够把思维过程转换为数学的计算．此时一些哲学家、科学家感到数学方法的精确、可靠，提出了把数学方法应用到其它