

哈尔滨工业大学讲义

自动调节原理

下 册

1956

前 言

自动調節原理所研究的問題如下：

1. 属于分析的問題；
2. 参数的選擇問題；
3. 校正裝置的綜合問題；
4. 調節系統綜合的一般問題。

应当強調指出，在研究自动調節系統時，只研究它的自由振盪是不夠的，還必須研究它在受外來作用函数的影響時的性能；因為某些相當的外來作用函数會引起自动調節系統的反应。

作用函数可分为：

1. 控制作用函数；
2. 擾動作用函数。

而自动調節系統的任务不僅是消除擾動作用，同時能極其確切地反应控制作用。所以，在一般情況下，不論擾動作用函数或者控制作用函数，都是時間的随机函数。因此，在研究自动調節原理時，探討随机過程的理論是非常重要的。

嚴格地說，随机作用經常影響着自动調節系統，但是它們有時可化為典型的，即給定的時間函数，也可化為所謂典型函数或最不利的函数。

例如，圖 228 所示為一汽輪發電机的近似負載圖。



圖 228

根據圖 228，如果 $T \gg T_p$ (T_p 為調節時間，即由前一負載的變化到後一負載的變化之間的時間)，則系統可進入新的穩定狀態，在這種情況下，外來作用函数可看作一單值函数。

然而常有這種情況，就是作用於自动調節系統的函数是一個很紊亂的時間函数（圖 229）。

在這種情況下，欲很準確地研究自动調節系統，則必須應用随机作用的理論。

近代，在調節理論中關於作用函数問題，有着如下的假設（假說）：

1. 作用函数為一典型的時間函数；
2. 作用函数為一時間的随机函数，但是具有已知的統計特性（或然率的分佈函数，譜頻密度）；

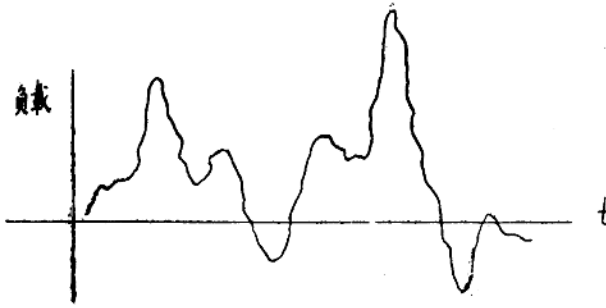


圖 229

3. 作用函数为一連續時間函数；关于这一函数除幅值外，其余都无法討論。

在解决前面所談到的自动調節原理的四大問題时，必須解决下面两个属于自动調節理論的基本問題：

1. 自动調節系統的質量問題；
2. 动态准確度問題。

在確定自动調節系統的質量問題时，要求解答下述几个問題：

1. 如何選擇控制作用函数 $g(t)$ ，以使該作用函数对該系統說來为一典型的作用函数；
2. 如何選擇質量的間接特性，以便即使不解出微分方程亦能判断系統的質量（如所週知，在应用頻率法时，綜合頻率特性即为間接特性）；
3. 如何確定質量的間接特性与質量指标間的关系；
4. 如何確定質量的間接特性与系統参数間的关系。

在現代，在確定質量問題方面，有三个方法，即：

1. 頻率法；
2. 傳遞函数的零点和極点的分佈法；
3. 積分評價法。

这些方法在上册中已做了深度不同的研究。应当指出，所有上述三个方法对所有線性化了的系統都适用。

在解动态准確度問題时，必須能在給定的 $T_1 \leq t \leq T_2$ 的時間範圍內找出表示誤差的絕對值 $|e(t)|$ ，而不須直接解出微分方程。但这样解时有一困难，就是我們对擾动作用方面的知識是有限的。

动态准確度的質量指标如下：

1. 当最不利的的作用函数作用于系統时的最大动态誤差；
2. 在作用函数的統計数据已知的情況下，誤差的均方值。

自动調節系統的質量問題与动态准確度問題間的區別如下。

自动調節系統的質量問題和过渡过程有关，同时作用函数为一典型的時間函数；而动态准確度問題則和过渡过程无关，且关于作用函数方面的知識知道的有限。

研究动态准确度的方法有三：

方法一、假定作用函数的幅值为有限；

方法二、假定作用函数已由统计上给出；

方法三、假定作用函数为一连续的时间函数，但已给定。

以后我们将研究的主要是第二法。

目 錄

前 言

第十一章 自動調節系統動態準確度的基本理論

1. 或然率理論中的某些概念	1
2. 或然率的分佈函數	2
3. 平均值或數学期望	3
4. 矩(勢量)	4
5. 各階矩與諸中心矩間的关系	5
6. 分布參數	5
7. 正態分佈	6
8. 相關联系	7
9. 相關系數	8
10. n 元分佈	9
11. 平穩隨機過程	11
12. 相關函數	13
13. 相關函數的性質	14
14. 相關函數的典例	16
15. 根據試驗數據以決定相關函數	17
16. 頻譜密度	19
17. 相關函數 $R(\tau)$ 與頻譜密度 $S(\omega)$ 間的关系	20
18. 根據試驗數據求頻譜密度	24
19. 隨機函數分析儀	25

第十二章 按誤差的均方值分析調節系統的動態準確度

1. 在自動調節系統輸入端及輸出端信號的相關函數與頻譜密度間的关系	29
2. 系統輸出端信號的相關函數和頻譜密度的普遍关系式	31
3. 按相關函數 $R(\tau)$ 的曲線用圖解法決定頻譜密度 $S(\omega)$	36
4. 誤差均方根值的計算	38
5. 頻譜密度关系式的變換	41
6. 誤差頻譜密度关系式的積分	42
7. 系統動態準確度分析的順序	45

第十三章 校正裝置按給定的動態準確度的綜合

1. 問題的提出	47
2. 誤差均方值的关系式	47
3. 獲得最小誤差均方值的條件	48
4. 最小誤差均方值	49
5. 最佳傳遞函數	50

6. 計及物理實現條件時最佳傳遞函數的公式	51
7. 按對動態準確度的要求而對校正裝置進行綜合的順序	51
8. 校正裝置綜合的圖解解析法	52
9. 簡短的結論	58
第十四章 非線性自動調節系統的理論基礎	
1. 非線性系統的分類	61
2. 非線性系統動態學的特點	63
3. 關於相空間的概念	67
4. 奇點和特跡的分類	69
5. 特跡的分類	70
6. 多頁相圖	74
7. 多頁(雙頁)相圖的繪制	74
8. 二階非線性自動調節系統的克雷洛夫及包郭留保夫近似分析法	78
9. 系統的方程式高於二階時對系統的近似分析法(布尔加可夫法)	84
10. 諧波平衡法(諧波線性化法)	86
第十五章 調節過程的圖解繪制法	
1. 非齊次一階線性微分方程的圖解法	93
2. 非齊次二階線性微分方程的圖解法	97
3. 非齊次 n 階線性微分方程式圖解法	99
4. 非線性方程式的圖解法	99
附 錄	
1. $\frac{\sin x}{x}$ 及 $\frac{\cos x}{x}$ 函數表	102
2. 由對數幅頻特性 L_m 求對數相頻特性 φ 表(單位斜度為20分貝/十倍頻)	116
(甲) $K=1; \omega < \omega_0$	116
(乙) $K=1; \omega > \omega_0$	119
3. 積分表	124
4. 譯名對照表	126

第十一章 自动調節系統動態準確度的基本理論

混雜于控制作用函数（有效輸入信号）中的于擾和噪音，对自动調節系統的工作質量有着極大的关系，它們嚴重地影響着系統反应的準確度。

于擾和噪音都是隨機函数，它們形成的原因是多种多样的。例如，以电子管放大器來說，即使在它的輸入端沒有任何有效信号，但其輸出端的电压仍然不是定值，而是相对于某一平均电压值而上下波动（見圖 230）。

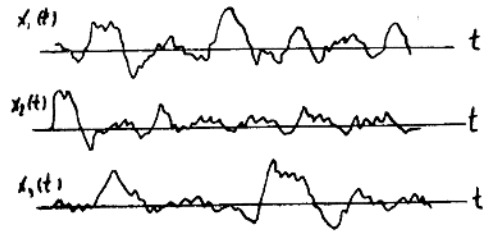


圖 230

在控制作用（或者給定）函数和擾動作用函数同时作用下的自动調節系統，不論这些函数具有什么样的特性，系統的工作情况完全可与上述的电子管放大器同时受有效信号和于擾作用时的工作情况相比拟。

因此，我們应当研究調節系統在受隨機作用影響时的性能。

为了这一目的，我們得研究一下在随机过程中自动調節系統動態準確度的分析和綜合的統計方法。为了理解動態準確度的基本理論，必須具备或然率方面的知識；为此，在探討自动調節系統動態準確度之前，必須对或然率理論中的某些概念和知識，作一簡短的介绍。

1. 或然率理論中的某些概念

有些这样的事件，这些事件在每一个别情况下所發生的过程，我們不能確切地預言，这样的事件称为隨機事件（現象）。

然而，如果我們不是单独地研究随机現象中的每个个别現象，而是研究許多这种現象的总体，則其平均結果，仍能說明特有的某种穩定（或然穩定）。

为了說明这一点，我們可以看某些随机試驗，这些試驗可在同一条件下重复多次。例如擲銅元，或者仪表的誤差測量就是这种試驗的示例。我們可將这一試驗重复多次，而每次觀察某一事件 A 是否發生。

在第一例中，事件 A 可为銅元正面的出現；而在第二例中，事件 A 可为介于某一固定范围之內的被量取的誤差。

在第一例中，如果在 N 次試驗中，事件 A 出現的次數为 γ ，則比值 $\frac{\gamma}{N}$ 称为事件 A 的出現頻率。

当試驗次數 N 增加时，所欲確定的事件 A 的出現頻率 $\frac{\gamma}{N}$ 將趨近于某定值。

上面所說的也可以用圖解法來加以說明（圖 231）。

如果取橫軸表示試驗次數 N ，而縱軸為事件的出現頻率 $\frac{Y}{N}$ （例如銅元正面的出現頻率），當 N 值很小時，事件頻率的變化很大，但當 N 增加時，則頻率趨近於 0.5。

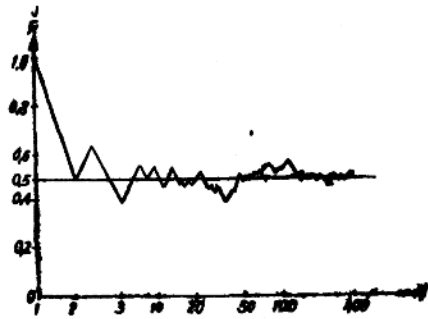


圖 231

因此，可以這樣假定：對每一種經過某些隨機試驗的事件 A 來說，可以指出一數值 P ，這一數值為多次試驗之後，事件出現頻率所趨近之值，即 $\frac{Y}{N} \cong P$ 。 P 稱為事件 A 的或然率。

由於 $0 \leq \frac{Y}{N} \leq 1$ ，因此幾乎與事件出現頻率的數值相等的或然率 P ，亦將介於該限極之間，即

$$0 < P < 1.$$

2. 或然率的分佈函數

首先讓我們看一下與隨機事件有關的某些試驗的進行。

假定我們對某隨機量 x 進行多次的測量，例如在同一條件下對儀表指示值的測量。這一試驗的結果如圖 232 所示。圖 232 的作法如下：取橫軸代表隨機量 x 之值，而縱軸為該隨機量在 $-\infty$ 與 x 間的或然率，即我們所要研究的不過 x 值的或然率。

用這樣方法所得的曲線 $F(x)$ 稱為或然率分佈的積分曲線，或者稱為隨機量的或然率分佈的積分函數。如果隨機量的或然率分佈函數為已知，則在或然率理論中，可認為隨機量已給定。

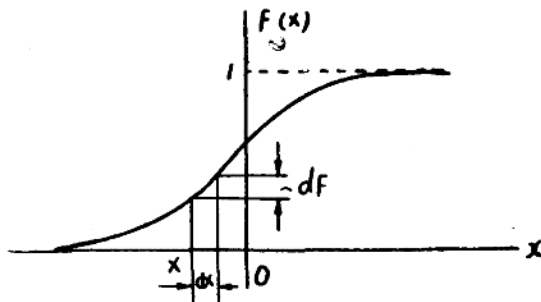


圖 232

顯然，當隨機量 x 之值為 $-\infty$ 時，其或然率為 0；當隨機量之值介於 $-\infty$ 與 $+\infty$ 之間時，其或然率為 1；當隨機量之值介於 $-\infty$ 與 x 之間時，則或然率隨着 x 的增加也只有增加，這也就是說函數 $F(x)$ 為一遞增函數。因此可以寫出：

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= 0; \\ F(-\infty \div +\infty) &= 1; \\ 0 &\leq F(x) \leq 1. \end{aligned}$$

从物理观点来看，对函数 $F(x)$ 也可以加以说明。我们可以设想一单位质量沿直线 x 的全部长度自 $-\infty$ 到 $+\infty$ 而分佈。这时沿直线自 $-\infty$ 到 x 整个长度而分佈的质量值之和（积分），等于在 x 点曲线 $F(x)$ 的纵坐标值。

圖 233 所示的曲线为函数 $F(x)$ 的導函数，即：

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

函数 $W(x)$ 称为或然率的密度，或者叫作随机量 x 的或然率的分佈函数。

將质量沿直线的分佈所作的物理说明推而广之，則函数 $W(x)$ 可解释为該单位质量在点 x 的密度。

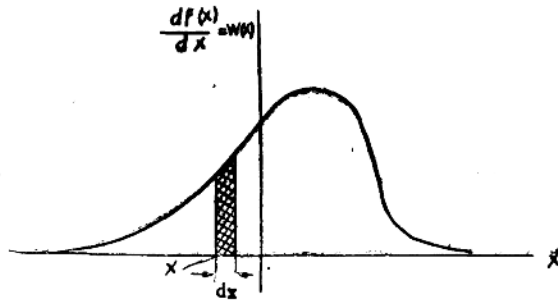


圖 233

由圖 232 和 233 可見，在 $x-x+dx$ 間， x 值的或然率为：

$$dF(x) = W(x)dx.$$

不論或然率分佈的积分函数 $F(x)$ ，或者或然率的分佈密度 $W(x)$ ，都完全能决定随机量。

然而，正如在研究过渡过程理論时一样，有时完全可以不必知道过渡过程本身的情况，而只須知道它的某些数字表征（例如质量指标，或者誤差系数），就可以研究过渡过程；在研究随机量时，也是如此，通常只要知道分佈函数的某些数字表征已經足够。

下面將要談論的矩（勢量），就可以作为分佈函数的数字表征性。

3. 平均值或數學期望

如果所欲量取的随机量 x 的值为 x_1, x_2, \dots, x_N ，同时如果 P_k 为 x 等于 x_k 时的或然率，則公式

$$E(x) = \sum_{k=1}^N P_k \cdot x_k$$

称为平均值，或者称为數學期望。

不連續分佈的随机量的平均值可据上式而决定。对具有連續分佈函数的随机量的平

均值可决定如下。

由于 x 值介于間節 $x+dx$ 間的或然率为 dF ，所以在這種情況下，平均值可由積分式

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x)$$

來决定。同时，因为

$$dF(x) = W(x)dx$$

所以最后得：

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot w(x) dx$$

4. 矩 (勢量)

函数

$$\alpha_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu \cdot w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu dF(x)$$

称为 ν 階矩。

一階矩 $\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x)$ 的形式与随机量 x 的平均值 \tilde{x} 的关系式相同。

零階矩

$$\alpha_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x)$$

經常存在，其值等于 1。

二階矩为

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot dF(x).$$

由力学我們知道，一階矩的積分式

$$m_0 = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x)$$

表示分佈函数 $F(x)$ 質量重心的座标 m_0 ，这一公式和随机量平均值的關係式相同。

同样，二階矩

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot dF(x)$$

表示分佈函数 $F(x)$ 相对于通过 $x=0$ 点的垂直軸的質量轉动慣量。

如果 x_0 为定值，則

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-x_0)^{\nu} \cdot dF(x) \quad (\nu=0, 1, 2, \dots, N)$$

称为相对于点 x_0 的 ν 階矩。

相对于分佈函数 $F(x)$ 的質量重心的矩（即相对于点 $x_0=m_0$ 的矩）称为中心矩，它可寫为：

$$\beta_{\nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_0)^{\nu} \cdot dF(x).$$

5. 各階矩與諸中心矩間的關係

將关系式 $(x-m_0)^{\nu}$ 展开，則得各階矩和中心矩間的关系如下：

$$\beta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_0)^0 \cdot dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1;$$

$$\beta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_0) \cdot dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x) - m_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = m_0 - m_0 = 0;$$

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_0)^2 \cdot dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot dF(x) - 2m_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x) +$$

$$m_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = \alpha_2 - m_0^2.$$

6. 分佈參數

某些量，它們在某種程度上表示随机量的分佈，这些量我們理解为分佈參數。

下面所給出的都是分佈參數：

1. 平均值（数学期望）。

$$\alpha_1 = m_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x).$$

2. 数学平均值。

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x).$$

3. 以符号“b”表示的、並由公式

$$\int_{-b}^{+b} dF(x) = 0.5$$

决定的平均（或然）值。

平均值“b”，为随机量 x 处于間節 $[-b < x < +b]$ 的边界时之值。这时，随机量处于間節 $[-b < x < +b]$ 內的或然率为 0.5。

4. 随机量的均方值。

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot dF(x).$$

5. 随机量的變異量。

所謂随机量的變異量，就是二階中心矩，即

$$\beta_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_0)^2 \cdot dF(x),$$

式中 $x - m_0$ 为随机量 x 对 m_0 的偏差。

變異量表示随机量的总体对其平均值的偏差。

6. 均方差（标准差）。

为了使變異量和随机量 x 具有同一方次，一般只取 β_2 开方值的正值，即

$$c = \sqrt{\beta_2}.$$

c 就是随机量的均方差（标准差）

7. 正態分佈

一積分函数如具有如圖 234 所示的分佈形式，則認為是正態分佈。正态分佈的密度則如圖 235 所示。

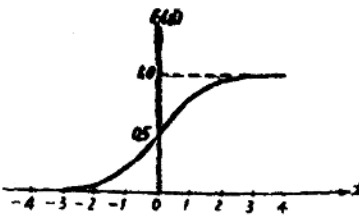


圖 234

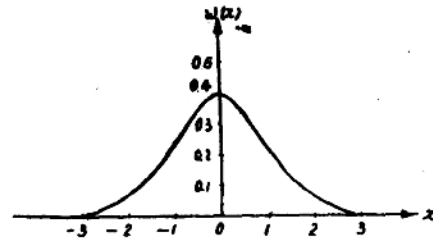


圖 235

为了獲得正态分佈，或然率的積分分佈函数 $F(x)$ 必須具有如下的形式：

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

这时分佈密度 $W(x)$ 为：

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dF(x)}{dx}.$$

正态分佈在实际中經常遇見，因此正态分佈的概念具有極大的实际意义。对正态分佈來說，有：

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = 0$$

及

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) = 1.$$

如果随机量 x 的積分分佈函数为 $F\left(\frac{x-m_0}{c}\right)$ ，同时 $F(x)$ 是由公式

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

决定，則該随机量 x 称为具有参数 m_0 和 c 的正态分佈。

这时，或然率的密度为：

$$W(x) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2c^2}}.$$

在这种情况下，將有如下的二种情况：

$$1. \alpha_1 = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2c^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (m_0 + cx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = m_0;$$

$$2. \alpha_2 = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_0)^2 e^{-\frac{(x-m_0)^2}{2c^2}} dx = \frac{c^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = c^2;$$

式中： m_0 —平均值；

c —标准差。

8. 相關聯系

如果一變量的每一值均可使之對應于另一變量的或然值，則他們彼此間的這一關係，稱為相關聯系。

如果某一變量的每一給定值均对应于另一變量的唯一的固定值，即變量之一为給定，但不是另一變量的随机函数（例如 $y = cx^2$ ），則这时二變量間的相关联系为最大。

反之，如果二變量間並無相依关系存在，則它們之間的相关联系亦不存在。

我們討論各事件、特性或过程彼此間的相关联系时，只有在这种情况下才是有意义的，即如果它們不僅彼此間相关，同时和其它許多我們可能並不知道的因素亦有关；例如，我們可討論在同一瞬間內，在任一空間中二不同点溫度間的相关联系等。

相关联系可能为線性，也可能为非線性。这一联系可存在于二个、三个或者更多變量之間。

9. 相關系數

相關系數的关系式如下：

$$\rho = \sqrt{1 - \left(\frac{C_y}{c_y}\right)^2},$$

式中： C_y 为被觀測值 Δy_i 的均方差，如以公式表之則为：

$$C_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i - \Delta y)^2}{n}}$$

而 c_y 为以平均值为准的标准差，如以公式表之則为：

$$c_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n}}$$

現在我們看二彼此互相关联的變量 x 和 y ，它們的平均值分別 m_x 以 m_y 和表示，並設它們与各自平均值的偏差量为：

$$\Delta x = x - m_x$$

及

$$\Delta y = y - m_y$$

在平面 $\Delta x, \Delta y$ 中，划出相应于各选取值 Δx 及被觀測值 Δy 之各点（圖 236）。

現在用最小二乘方來求表示 Δy 和 Δx 間平均值关系的直線，換句話說，也就是在关系式

$$\Delta y = \mathcal{K} \cdot \Delta x$$

中的常数 \mathcal{K} 应按下述的条件來選擇，即：

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i - \Delta y)^2 = \min,$$

式中： Δy_i 为 Δy 的被觀測值。

使上式为最小的条件为：

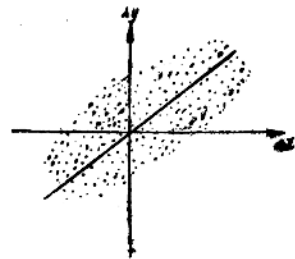


圖 236

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{K}} \left[\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \mathcal{K} \cdot \Delta x_i)^2 \right] = 0,$$

亦即

$$\sum_{i=1}^n \left[-2\Delta y_i \cdot \Delta x_i + 2\mathcal{K}(\Delta x_i)^2 \right] = 0,$$

和

$$\mathcal{K} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

由 ρ 的关系式显而易见当 $C_y = 0$ 时, 相关系数的最大值为 1。这时, 所有各被观测点均处于由方程式

$$\Delta y = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2} \cdot \Delta x$$

所表示的直线上, 该直线就是用最小二乘法所求得的直线(圖 236)。 ρ 的最小值为零, 这相当于当 $\left(\frac{C_y}{c_y}\right)^2 = 1$ 时, 也就是当 $C_y = c_y$ 时。

將决定 C_y 和 c_y 的关系或進行比較, 顯然可見, 当 $\Delta y = 0$ 时, $C_y = c_y$ 这一关系才存在。这时, 以

$$\Delta y = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2} \cdot \Delta x$$

所表示的直线与横轴 Δx 相重合, 並且

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i \cdot \Delta x_i = 0.$$

因此, $\rho = 0$ 时, 相当于相关联系的不存在。

由是, 相关系数之值介于 0 到 1 之間, 即

$$0 \leq \rho \leq 1.$$

10. n 元分佈

n 元^①分佈这一概念可以解釋如下。

正象前面所談过的, 圖 230 中所給出的, 为某些随机函数 $x_1(t), x_2(t)$ ……的示

① 「元」通常也稱為「維」或「度」(譯者註)

波圖。現在試取某一固定時刻 t ，並決定在該時刻時函數總數 $x_i(t)$ 中有多少個函數的值是介於 x 和 $x+dx$ 之間。適合於這一情況的函數的個數與所取的時刻 t 有關，並與 dx 成比例。對於這一函數，我們將以 $w(x, t)dx$ 來表示，並稱之為一元或然率分佈密度。

現在再看在不同時刻 t_1 和 t_2 所觀察到的所有各成對 x 之值。在這種情況下， x 值介於 x_1, x_1+dx_1 之間（當 $t=t_1$ 時）及介於 x_2, x_2+dx_2 之間（當 $t=t_2$ 時）的成對值，與總的所觀察的成對值之比，我們以 $w_2(x_1, x_2)dx_1dx_2$ 表示之，並稱之為二元或然率分佈密度。

現在舉例來加以說明，假定我們有 N 個同一類型的系統（圖 237），並假定它們都處在同一工作條件下。

這時，工作在同一條件下而在同一時刻所攝取的各同一類型系統的被調量變化的示波圖，如圖 237 所示。

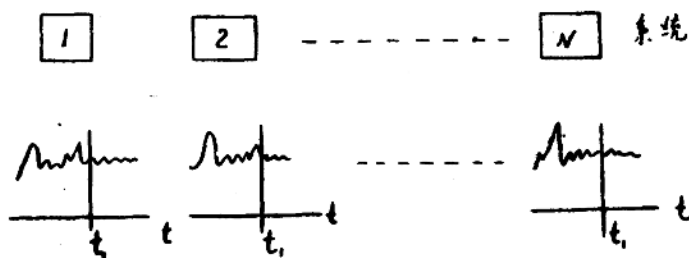


圖 237

現在我們看，在函數總數 $x(t)$ 中這樣一部分函數的或然率，這些函數的 x 值在時刻 t 時介於 x_1 和 $x_1+\Delta x_1$ 之間。顯然，這一或然率與所取的時刻 t 有關，並在 N 值很大及 Δx_1 很小時，與 Δx_1 成比例。

事實上，上面我們所說的也就是研究圖 238 所示的函數 $F(x)$ 的積分曲線。

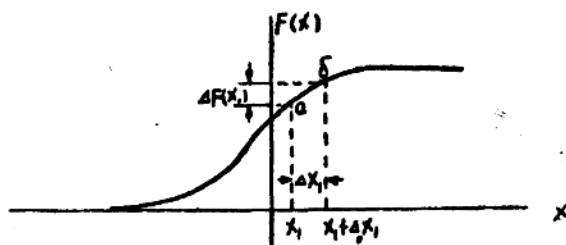


圖 238

當 Δx_1 值較小時，曲線的 $a\delta$ 部分可認為是一直線；因此， $x(t)$ 值介於 x_1 和 $x_1+\Delta x_1$ 間的或然率為 $\Delta F(x_1)$ 。

現在再看或然率分佈密度的曲線（圖 239）。在該圖中，斜線所表示的面積等於 $w(x_1)\Delta x_1$ ；從另一方面來看 $\Delta F(x_1)=w(x_1)\Delta x_1$ 。

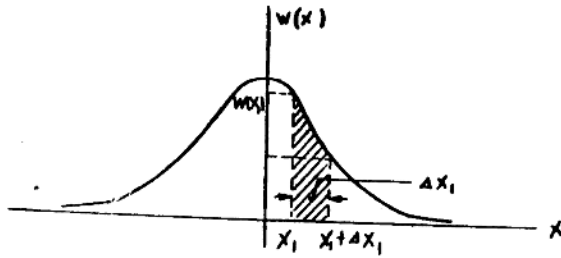


圖 239

因此，当研究处于同一时间条件 ($t = t_1$) 下之函数 $x(t)$ 的纵坐标时，则我们研究圖 238 中曲线上的 $a\delta$ 段即可。

在这种情况下，我们所得的为一元或然率分布密度，亦即第一分布函数。但是如果我們同时取二个不同的时刻值 t_1 和 t_2 来研究 $x(t)$ 的值，则我們不应再想象为线段 $a\delta$ ，而应想象为某一曲面，即二元或然率分布密度。如果所取的时刻为 n 个，则所得的为 n 元或然率分布密度，即

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdots \Delta x_n.$$

考虑到所取的时刻 t_1, t_2, \dots, t_n ，上式可写成更确切的形式：

$$w(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots, x_n, t_n) \cdot \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdots \Delta x_n.$$

如果一随机函数 $x(t)$ 的 n 元分布函数为已知，则該随机函数 $x(t)$ 可认为已给定。

用统计法来研究随机过程并不是研究函数总体中的每个函数，而是研究整个函数总体的一般性质。

11. 平稳随机过程

假设在同一条件下，对某一过程进行观察时得到了许多各不相同的函数 $x(t)$ (随机函数的总体)，尽管我們并不知道其中的每一函数，但是如果我們在不同的时刻 t_1, t_2, \dots, t_n ，能确定函数 $x(t)$ 的 n 元分布函数，则这一过程称为斯他好斯过程，或者称为随机过程。

在研究随机过程时，我們所感兴趣的不是随机函数总体中的某一个函数，而是在同一工作条件下所观察到的全部随机函数的总体。

在研究随机过程时，如果我们利用下面的各种假定，则随机过程的研究可以简化。

1. 我們可以认为随机过程未来的进展只和我們所取的某一时刻的情况有关，这也就是说，在我們所取的时刻以前系统所处的情况可以不考虑。这一假定首由馬尔科夫提出。基于这一假定所建立的研究随机过程的方法 (馬尔科夫法)，導出了统计随机过程的概念。这一方法应用在許多科学技术领域中 (放射分裂，电话等)。然而仍然有許多随机过程不能应用这一方法来研究，在研究动态系统时应用这一方法，无异于不考虑系统的惰性。

2. 平稳随机过程与馬尔科夫假定不同之处，就是它考虑了曾对我们所研究的随机过程有着影响的过去的諸因素；而平稳随机过程与一般斯他好斯过程不同之处，就是