有限单体法在骨架计算中的应用

上海交通大学130教研组

1972.11.

毛主席語录

我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。

目　　录

1. 单体刚度矩阵
2. 结构总刚度矩阵的构成
3. 单体刚度矩阵的座标转换
4. 荷重计算
5. 边界条件——约束的处理
6. 内力计算
7. 刚度矩阵计算例题
8. 正交平面板架计算程序
   8-1. 座标系和符号规则
   8-2. 位移矢量和力矢量排列次序
   8-3. 单体刚度矩阵和座标转换矩阵
   8-4. 总刚度矩阵的存贮及线代数方程组的求解
   8-5. 单位
   8-6. 程序
   8-7. 程序使用说明
   8-8. 计算例题

有限单体法在骨架计算中的应用

工程结构中大量出现由杆件组合成的骨架结构，许多复杂结构常可简化为骨架结构求解。

骨架结构可以视为许多单段的杆件连接而成，每一个单段的杆件称为单体，它们的连接点称为节点。例如图 1-1 所示的板架结构，习惯上看作由三根交叉构件五根主向梁组成，现在，将它视为由 22 个单体组成的结构，图中编号的点称为节点，节点之间为单体。

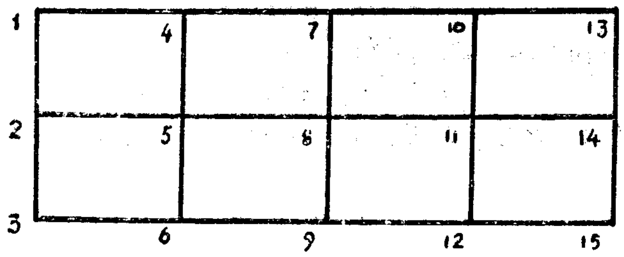

图 1-1

整个结构的变形和应力分布由节点处的位移和应力来表达，节点处的应力和变形是待求的未知量。(这里所说的位移和力都是指广义位移和广义力，以下同)

单体在它们相互连接的节点处必须满足位移协调条件和力的平衡条件，根据这两点并应用虚位移原理可以导出关于节点位移(或节点力)的线性方程组，当我们用节点位移作为未知量时(位移法)，最终可以得出 (1-1) 式所示的方程组。

$$[K_S]\{d\}=\{F\} \tag{1-1}$$

式中 $\{d\}$ 是由各节点位移按一定顺序排列而成的列矢量，乃是待求的未知量，$\{F\}$是作用在节点上的外力列矢量，是已知的，或根据已知条件经简单变换可以求得的。$[K_S]$是根据各单体的结构尺寸和联接方式等决定的矩阵，它是联系力和位移的环节，具有刚度的含义，称为结构刚度矩阵。于是骨架结构求解的主要任务归结为求结构的刚度矩阵和解方程组(1-1)。结构刚度矩阵是由单体刚度矩阵组合而得，以下先推导单体刚度矩阵。

1. 单体刚度矩阵

用虚位移原理推导梁单体的刚度矩阵。

(1) 用节点位移表达单体的弹性线

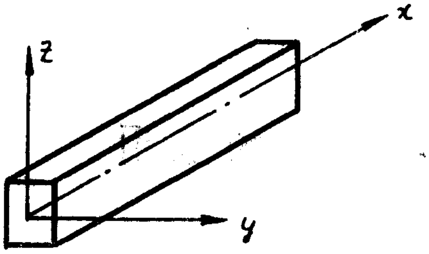

图 1-2

图 1-2 表示一单体梁，置于左手座标系中，并规定位移和力矢量沿座标轴正向为正。设其中心线处之挠度为：

$$w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \tag{1-2}$$

写成矩阵形式

$$w(x)=[1,\ x,\ x^2,\ x^3]\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \tag{1-3}$$

记 $$[H(x)]=[1,\ x,\ x^2,\ x^3] \tag{1-4}$$

$$\{a\}^T=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3] \tag{1-5}$$

则 $$w(x)=[H(x)]\cdot\{a\} \tag{1-6}$$

$\{a\}$ 是梁弹性线函数的待定系数，现用节点位移代换它，以求得用节点位移表示的弹性线

节点位移 $\{d\}$ 是单体梁两端的挠度和转角

$$\{d\}^T=[w_L,\ w_L',\ w_R,\ w_R'] \tag{1-7}$$

脚标 L 表示左端，R 表示右端，角标 T 表示矩阵转置，由 (1-3) 式求出 (1-7) 式右边各元得：

$$\{d\}=\begin{bmatrix}w_L\\w_L'\\w_R\\w_R'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&l&l^2&l^3\\0&1&2l&3l^2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \tag{1-8}$$

记为 $$\{d\}=[A]\cdot\{a\} \tag{1-9}$$

式中

$$[A]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&l&l^2&l^3\\0&1&2l&3l^2\end{bmatrix} \tag{1-10}$$

由 (1-9) 有 $$\{a\}=[A]^{-1}\cdot\{d\} \tag{1-11}$$

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-3/l^2&-2/l&3/l^2&-1/l\\2/l^3&1/l^2&-2/l^3&1/l^2\end{bmatrix} \tag{1-12}$$

(1-11) 代入 (1-6) 得：

$$w(x)=[H(x)]\cdot[A]^{-1}\{d\} \tag{1-13}$$

(2) 计算用节点位移表达的应变

由杆的弯曲微分方程式可知

$$\varepsilon(x,\ z)=-z\cdot w'' \tag{1-14}$$

∵ $$[w''(x)]=[H''(x)]\cdot\{a\}$$

$\therefore$ $$\varepsilon(x,\ z)=-z\cdot[H''(x)]\{\alpha\}$$

记为 $$\varepsilon(x,z)=[B(x,\ z)]\cdot\{\alpha\} \tag{1-15}$$

式中 $$[B(x,\ z)]=-z[H''(x)]=-z[0,\ 0,\ 2,\ 6x] \tag{1-16}$$

(3) 计算应力

由虎克定律，

$$\sigma(x,\ z)=E\cdot\varepsilon(x,\ z) \tag{1-17}$$

$$=E\cdot[B(x,\ z)]\cdot\{\alpha\} \tag{1-18}$$

式中 E 为弹性模量

(4) 计算变形位能之变分 δV

由弹性理论有：

$$\delta V=\iiint_V(\delta\varepsilon)^T\cdot\sigma\cdot dV=\iiint_V(\delta\alpha)^T\cdot B^T\cdot E\cdot B\cdot\alpha\cdot dV \tag{1-19}$$

因为 α 不是座标的函数，所以可从积分号内提出

$\therefore$ $$\delta V=(\delta\alpha)^T\left[\iiint_V B^T\cdot E\cdot B\cdot dV\right]\cdot\alpha \tag{1-20}$$

将 (1-11) 代入 (1-20) 得：

$$\delta V=\{\delta d\}^T\cdot[A^{-1}]^T\cdot\left[\iiint_V B^T\cdot E\cdot BdV\right]\cdot[A]^{-1}\cdot\{d\}$$

$$=\{\delta d\}^T\cdot K\cdot\{d\} \tag{1-21}$$

式中： $$K=[A^{-1}]^T\cdot[\overline{K}]\cdot[A^{-1}] \tag{1-22}$$

$$\overline{K}=\iiint_V\cdot B^T\cdot E\cdot BdV=\iiint_V[H''(x)]^T\cdot E\cdot z^2\cdot[H''(x)]dxdydz$$

$$=\int_0^l[H''(x)]^T\cdot E\cdot I\cdot[H''(x)]dx \tag{1-23}$$

式中： $I=\iint z^2\cdot dzdy$

$\therefore$ $$[K]=[A^{-1}]^T\cdot[\overline{K}]\cdot[A^{-1}]$$

$$=[A^{-1}]^T\cdot E\cdot I\cdot\int_0^l[H''(x)]^T\cdot[H''(x)]dx\cdot[A^{-1}]$$

$$=E\cdot I\cdot\int_0^l[A^{-1}]^T\cdot[H''(x)]^T\cdot[H''(x)]\cdot[A^{-1}]\,dx$$

$$=E\cdot I\cdot\int_0^l([H''(x)]\cdot[A^{-1}])^T\cdot H''(x)\cdot[A^{-1}]dx$$

$$=E\cdot I\cdot\int_0^l[N(x)]^T\cdot[N(x)]dx \tag{1-24}$$

式中引用记号

$$[N(x)]=[H''(x)]\cdot[A^{-1}]=[0,0,2,6x]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-3/l^2&-2/l&3/l^2&-1/l\\2/l^3&1/l^2&-2/l^3&1/l^2\end{bmatrix}$$

$$=\left[\frac{6}{l^2}\left(\frac{2x}{l}-1\right),\ \frac{2}{l}\left(\frac{3x}{l}-2\right),\ -\frac{6}{l^2}\left(\frac{2x}{l}-1\right),\ \frac{2}{l}\left(\frac{3x}{l}-1\right)\right] \tag{1-25}$$

将 (1-25) 式代入 (1-24)，即求出 $[K]$ 矩阵：

$$[K]=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{l^3}&\frac{6EI}{l^2}&-\frac{12EI}{l^3}&\frac{6EI}{l^2}\\\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}\\-\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}\\\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}\end{bmatrix} \tag{1-26}$$

记单体两端的端面力为：

$$\{R\}^T=[N_L,\ M_L,\ N_R,\ M_R] \tag{1-27}$$

N 表示切力，M 表示弯矩。

根据卡斯弟梁诺第二定律，有

$$\{R\}=\frac{\partial V}{\partial\{d\}} \tag{1-28}$$

(1-21) 代入 (1-28) 则得：$\{R\}=[K]\cdot\{d\}$ (1-29)

所以 $[K]$ 就是单体的刚度矩阵。

将 (1-29) 详细写出就是

$$\begin{bmatrix}N_L\\M_L\\N_R\\M_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{12EI}{l^3}&&\text{对}&\text{称}\\\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}&&\\-\frac{12EI}{l^3}&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{12EI}{l^3}&\\\frac{6EI}{l^2}&\frac{2EI}{l}&-\frac{6EI}{l^2}&\frac{4EI}{l}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}w_L\\w'_L\\w_R\\w'_R\end{bmatrix} \tag{1-30}$$

以上用能量原理导出了单体刚度矩阵，我们也可以直接由单跨梁的微分方程求解得到刚度矩阵中的各元素。

例如，令 (1-30) 式中 $w_L=1$，$w'_L=w_R=w'_R=0$，

则 (1-30) 式左端的列矢量各元等于 K 矩阵的第 1 列各元，此时该单体的变形状态如

图 1-3 所示，根据梁的微分方程求解，得出支座处位移 w_L 引起的支座力，它们就是 K 矩阵中第一列的元素。

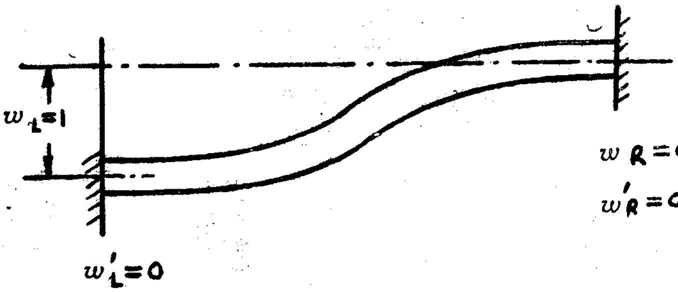

图 1-3

类似地依次使 w'_L、w_R、w'_R 等于单位位移而使其它为 0，求出支座反力，便逐列地求出了刚度矩阵中的各元素。

(1-30) 式是仅计 xoy 平面内的挠度和转角时单体梁的刚度矩阵，一般情况下，一个节点具有六个自由度，对应六个广义力，参考资料 [2] 中给出了三维空间计及弯曲、剪切、轴向力和扭转的单体梁刚度矩阵，如(1-31)式所示，它所对应的坐标系统和力（位移）的正方向如图 1-4 所示。请注意这里采用的是右手座标系统，因此它与前述按左手座标系统导出的刚度矩度，在某些元素前面相差一个负号。

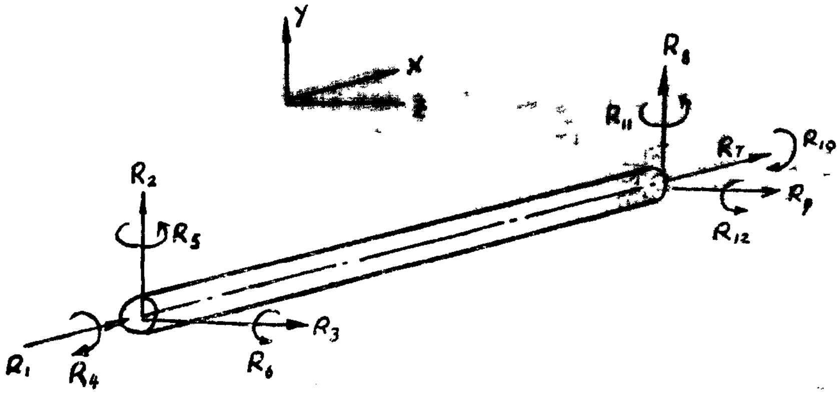

图 1-4 一般情况下的单体梁

该单体刚度矩阵可用于空间骨架结构的求解，对于桁架、平面板架和平面刚架，可以从中除去某三个自由度得到各自的单体刚度矩阵。

式中 d_i——与广义力 R_i 对应的广义位移

J——抗扭惯性矩

$$\phi_Y=\frac{12\,EI_Y}{GA_Sl^2}$$

$$\phi_Z=\frac{12\,EI_Z}{GA_Sl^2}$$

A_S——有效抗剪面积，

（注：矩阵中空白处为 0，以下同。）

$$
\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
 & \frac{12EI_Z}{l^3(1+\phi_Y)} & & & & & & & & & & \\
 & & \frac{12EI_Y}{l^3(1+\phi_Z)} & & & & & & & & & \\
 & & & \frac{GJ}{l} & & & & \text{对} & & \text{称} & & \\
 & & \frac{-6EI_Y}{l^2(1+\phi_Z)} & & \frac{(4+\phi_Z)EI_Y}{l(1+\phi_Z)} & & & & & & & \\
 & \frac{6EI_Z}{l^2(1+\phi_Y)} & & & & \frac{(4+\phi_Y)EI_Z}{l(1+\phi_Y)} & & & & & & \\
\frac{-EA}{l} & & & & & & \frac{EA}{l} & & & & & \\
 & \frac{-12EI_Z}{l^3(1+\phi_Y)} & & & & \frac{-6EI_Z}{l^2(1+\phi_Y)} & & \frac{12EI_Z}{l^3(1+\phi_Y)} & & & & \\
 & & \frac{-12EI_Y}{l^3(1+\phi_Z)} & & \frac{6EI_Y}{l^2(1+\phi_Z)} & & & & \frac{12EI_Y}{l^3(1+\phi_Z)} & & & \\
 & & & \frac{-GJ}{l} & & & & & & \frac{GJ}{l} & & \\
 & & \frac{-6EI_Y}{l^2(1+\phi_Z)} & & \frac{(2-\phi_Z)EI_Y}{l(1+\phi_Z)} & & & & \frac{6EI_Y}{l^2(1+\phi_Z)} & & \frac{(4+\phi_Z)EI_Y}{l(1+\phi_Z)} & \\
 & \frac{6EI_Z}{l^2(1+\phi_Y)} & & & & \frac{(2-\phi_Y)EI_Z}{l(1+\phi_Y)} & 0 & \frac{-6EI_Z}{l^2(1+\phi_Y)} & & & & \frac{(4+\phi_Y)EI_Z}{l(1+\phi_Y)}
\end{bmatrix}
\times
\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \\ d_8 \\ d_9 \\ d_{10} \\ d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix}
\qquad (1\text{-}31)
$$

2. 结构总刚度矩阵的构成

在算出单体的刚度矩阵之后，须将各单体的刚度矩阵按一定规则组成结构的总刚度矩阵，这个规则实质上就是求取汇交于某一节点处的各单体端面内力的合力。

作为一个最简单的例子，构成图 2-1 所示由两个单体组成的连续梁的弯曲刚度矩阵

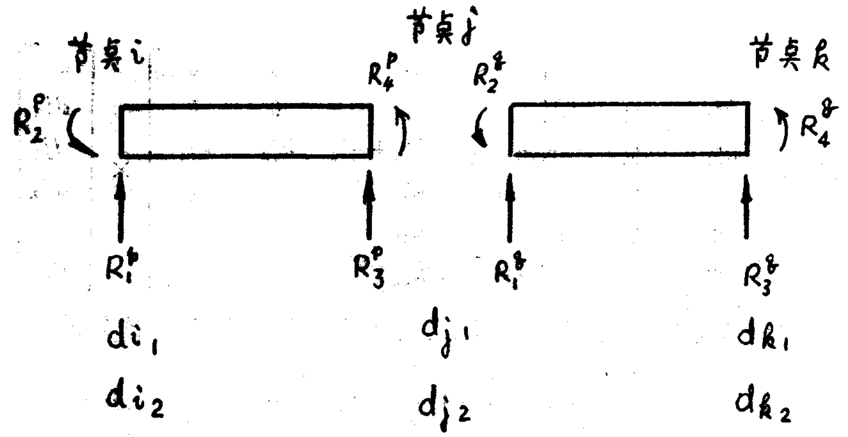

图 2-1

R_1^p, R_3^p, R_1^q, R_3^q 分别表示单体 p 和 q 的端面切力，R_2^p, R_4^p, R_2^q，R_4^q 分别表示弯矩，di_1, dj_1, dk_1 表示节点挠度，di_2,dj_2,dk_2 表示节点转角。

对于单体 p 有

$$\begin{bmatrix} R_1^p \\ R_2^p \\ \hline R_3^p \\ R_4^p \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_{11}^p & k_{12}^p & k_{13}^p & k_{14}^p \\ k_{21}^p & k_{22}^p & k_{23}^p & k_{24}^p \\ \hline k_{31}^p & k_{32}^p & k_{33}^p & k_{34}^p \\ k_{41}^p & k_{42}^p & k_{43}^p & k_{44}^p \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} di_1 \\ di_2 \\ \hline dj_1 \\ dj_2 \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

对于单体 q 有：

$$\begin{bmatrix} R_1^q \\ R_2^q \\ \hline R_3^q \\ R_4^q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_{11}^q & k_{12}^q & k_{13}^q & k_{14}^q \\ k_{21}^q & k_{22}^q & k_{23}^q & k_{24}^q \\ \hline k_{31}^q & k_{32}^q & k_{33}^q & k_{34}^q \\ k_{41}^q & k_{42}^q & k_{43}^q & k_{44}^q \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} dj_1 \\ dj_2 \\ \hline dk_1 \\ dk_2 \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

（根据变形协调条件，单体 p 和 q 在 j 节点处的位移相等，都是 dj_1 和 dj_2）

根据已有的单体矩阵写出节点处单体端面力的合力：

$$
\begin{aligned}
R^p_1 &= k^p_{11}di_1+k^p_{12}di_2+k^p_{13}dj_1+k^p_{14}dj_2\\
R^p_2 &= k^p_{21}di_1+k^p_{22}di_2+k^p_{23}dj_1+k^p_{24}dj_2\\
R^p_3+R^q_1 &= k^p_{31}di_1+k^p_{32}di_2+(k^p_{33}+k^q_{11})dj_1+(k^p_{34}+k^q_{12})dj_2+k^q_{13}dk_1+k^q_{14}dk_2\\
R^p_4+R^q_2 &= k^p_{41}di_1+k^p_{42}di_2+(k^p_{43}+k^q_{21})dj_1+(k^p_{44}+k^q_{22})dj_2+k^q_{23}dk_1+k^q_{24}dk_2\\
R^q_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad k^q_{31}dj_1+k^q_{32}dj_2+k^q_{33}dk_1+k^q_{34}dk_2\\
R^q_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad k^q_{41}dj_1+k^q_{42}dj_2+k^q_{43}dk_1+k^q_{44}dk_2
\end{aligned}
\tag{2-3}
$$

写成矩阵式就是：

$$
[R]=\begin{bmatrix}
k^p_{11} & k^p_{12} & k^p_{13} & k^p_{14} & 0 & 0\\
k^p_{21} & k^p_{22} & k^p_{23} & k^p_{24} & 0 & 0\\
k^p_{31} & k^p_{32} & k^p_{33}+k^q_{11} & k^p_{34}+k^q_{12} & k^q_{13} & k^q_{14}\\
k^p_{41} & k^p_{42} & k^p_{43}+k^q_{21} & k^p_{44}+k^q_{22} & k^q_{23} & k^q_{24}\\
0 & 0 & k^q_{31} & k^q_{32} & k^q_{33} & k^q_{34}\\
0 & 0 & k^q_{41} & k^q_{42} & k^q_{43} & k^q_{44}
\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} di_1\\ di_2\\ dj_1\\ dj_2\\ dk_1\\ dk_2\end{bmatrix}
\tag{2-4}
$$

为了说明单体刚度矩阵中各元在总刚度矩阵中的位置，将（2-1）式分割成如下形式：

$$
\begin{bmatrix} R^p_i\\ \cdots\cdots\\ R^p_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K^p_{ii} & \vdots & K^p_{ij}\\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\\ K^p_{ji} & \vdots & K^p_{jj}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} D_i\\ \cdots\cdots\\ D_j\end{bmatrix}
\tag{2-5}
$$

式中 $R^p_i=\begin{bmatrix} R^p_1\\ R^p_2\end{bmatrix}$， $R^p_j=\begin{bmatrix} R^p_3\\ R^p_4\end{bmatrix}$， $D_i=\begin{bmatrix} di_1\\ di_2\end{bmatrix}$， $D_j=\begin{bmatrix} dj_1\\ dj_2\end{bmatrix}$， （2-6）

K^p_{ii}，K^p_{ij}，K^p_{ji}，K^p_{jj} 表示（2-1）式中被虚线划开的四个 2×2 矩阵。对（2-2）式也可以作类似的分割，这样（2-4）式可以缩写为：

$$
\begin{bmatrix} R_i\\ \cdots\cdots\\ R_j\\ \cdots\cdots\\ R_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K^p_{ii} & \vdots & K^p_{ij} & \vdots & 0\\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\\ K^p_{ji} & \vdots & K^p_{jj}+K^q_{jj} & \vdots & K^q_{jk}\\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\\ 0 & \vdots & K^q_{kj} & \vdots & K^q_{kk}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} D_i\\ \cdots\cdots\\ D_j\\ \cdots\cdots\\ D_k\end{bmatrix}
\tag{2-7}
$$

式中 $R_i=\begin{bmatrix} N_i\\ M_i\end{bmatrix}$， $R_j=\begin{bmatrix} N_j\\ M_j\end{bmatrix}$， $R_k=\begin{bmatrix} N_k\\ M_k\end{bmatrix}$，

从（2-7）式来看，结构刚度矩阵是由单体刚度矩阵的分割子阵组成，子阵的位置由它的两个脚标决定：第一个脚标（单体的左节点号）是它在（2-7）式表示的刚度矩阵中所在的行，第二个脚标（单体的右节点号）是它所在的列，脚标相同的子阵，不管它是属于哪个单体的，都在总矩阵中互相迭加。这就是由单体刚度矩阵构成结构刚度矩阵的法则。

实际的运算乃是按（2-4）式的形式进行，根据（2-7）式表明的脚标规则可以算出单体刚度矩阵中的各元素在（2-4）式表示的总刚度矩阵中的行码和列码，将单体刚度矩阵中各元素按它的行码和列码迭加到总刚度矩阵中去，当对结构的全部单体这样做过以后便得到了结构的刚度矩阵 $[K_S]$。

（2-5）式和（2-7）式显示出分割子阵的物理意义：刚度矩阵的行对应着节点的力，刚

度矩阵的列对应着节点的位移，所以分割子阵 K_{ij} 就是 j 节点的位移对 i 节点力的影响系数。

结构的刚度矩阵有以下一些特点：

(1) 矩阵对称于主对角线

由位移互等原理，单体刚度矩阵是对称矩阵，填入总矩阵后，K_{ii} 与 K_{jj} 位于主对角线上，K_{ij} 与 K_{ji} 对称地分布于主对角线两侧，这样构成的总刚度矩阵仍是对称矩阵。

(2) 矩阵的非零元分布在主对角线两侧一定宽度的带状区域内。

结构中的某节点只与它周围的节点之间构成单体而与其它节点不直接联系，表现在矩阵中，即第 i 行（列）中仅在与 i 有关的节点列（行）上出现分割子阵，其余均为零，分割子阵离开主对角线的距离取决于节点码的差值。总的结果，便是总刚度矩阵的非零元分布在主对角线两侧的一个带状区域内，其宽度由相关节点的差值决定。

利用上述特性可以节约矩阵的存贮单元和简化解线性方程的计算。

3. 单体刚度矩阵座标转换

单体刚度矩阵是按照这样的座标系导出的：座标原点位于单体一端，座标系的 $\overline{x}$ 轴沿着单体的纵轴，$\overline{y}$ 轴沿着截面中和轴，然后按左手法则（或右手法则）定出 $\overline{z}$ 轴。这样导得的刚度矩阵对于所有单体具有统一的形式，所对应的力和位移都是对单体上的座标系而言。只有当各单体的轴线同方向时，才能如前节所说的那样直接进行刚度矩阵的迭加，但是实际结构由多个单体组成，它们的纵轴方向和截面中和轴方向往往各不相同，它们的单体刚度矩阵对应的力和位移也各不同向，因此，在组成结构刚度矩阵时，不能把单体刚度矩阵简单地叠加，必须对结构建立一个总座标系，各单体节点的位移和力首先由单体座标系转换到总座标系，单体刚度矩阵亦作座标变换，然后填入总刚度矩阵。

设 d_1、F_1、K_1 分别表示单体座标系 $0-\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ 中的节点位移、力、单体刚度矩阵。

d_2、F_2、K_2 分别表示总座标系 $0-xyz$ 中的节点位移、力、单体刚度矩阵

T 表示单体座标系与总座标系之间力（或位移）的转换矩阵。

按定义有：

$$F_1=K_1\cdot d_1 \tag{3-1}$$

$$F_2=K_2\cdot d_2 \tag{3-2}$$

$$F_2=T\cdot F_1 \tag{3-3}$$

$$d_2=T\cdot d_1 \tag{3-4}$$

将 (3-1)(3-3)(3-4) 式代入 (3-2) 消去 d 和 F 得

$$T\cdot K_1=K_2\cdot T \tag{3-5}$$

等式两边后乘 T^{-1} 可得：

$$K_2=T\cdot K_1\cdot T^{-1} \tag{3-6}$$

根据 (3-3) 或 (3-4) 式可以求出 T：

例如平面板架问题，在节点处考虑三个位移：沿 z 轴的挠度 w，绕 x 轴和绕 y 轴的转角 θ_x、θ_y，单体座标系与总座标系关系如图 3-1，且按 w_z，θ_x，θ_y 的次序排列：$\{d\}=$

$[w_{1z},\ \theta_{1x},\ \theta_{1y},\ w_{2z},\ \theta_{2x},\ \theta_{2y}]^T$，则由总座标系度量的节点位移为：

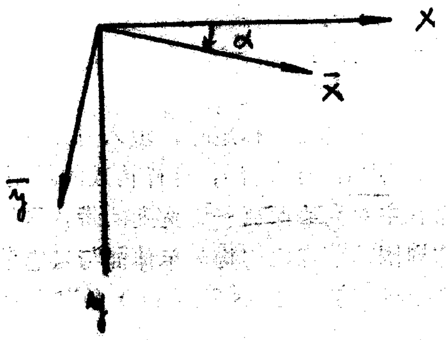

图 3-1

$$\left.\begin{aligned} w_z &= \overline{w}_z \cdot 1 + \overline{\theta}_x \cdot 0 + \overline{\theta}_y \cdot 0 \\ \theta_x &= \overline{w}_z \cdot 0 + \overline{\theta}_x \cdot \cos\alpha + \overline{\theta}_y \cdot (-\sin\alpha) \\ \theta_y &= \overline{w}_z \cdot 0 + \overline{\theta}_x \cdot \sin\alpha + \overline{\theta}_y \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{3-7}$$

即 $$\{d_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \{d_1\} \tag{3-8}$$

对于单体有两个端节点共六个位移其 T 矩阵便为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & & 0 & \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & & & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{3-9}$$

T 阵中各元素的位置与 d 列矢量中元素的排列次序有关。

对于三维问题，一个节点有六个自由度，设位移矢量的排列次序为：

$$\{d\} = [u_x,\ v_y, w_z,\ \theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z]^T$$

则对于一个单体，其 T 阵为：

$$T = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & & & & & & & & & \\ n_1 & n_2 & n_3 & & 0 & & & & & & & \\ l_1 & l_2 & l_3 & & & & & & 0 & & & \\ & & & m_1 & m_2 & m_3 & & & & & & \\ & 0 & & n_1 & n_2 & n_3 & & & & & & \\ & & & l_1 & l_2 & l_3 & & & & & & \\ \hline & & & & & & m_1 & m_2 & m_3 & & & \\ & & & & & & n_1 & n_2 & n_3 & & 0 & \\ & & & & & & l_1 & l_2 & l_3 & & & \\ & & 0 & & & & & & & m_1 & m_2 & m_3 \\ & & & & & & & 0 & & n_1 & n_2 & n_3 \\ & & & & & & & & & l_1 & l_2 & l_3 \end{array}\right] \tag{3-10}$$

式中 m_1、n_1、l_1 为 $o\overline{x}$ 轴在 $o\text{-}XYZ$ 座标系中的三个方向余弦，脚标2和脚标3是对 $o\overline{y}$ 轴和 $o\overline{z}$ 轴的。

T 矩阵具有一个特性：T 的逆矩阵等于它的转置矩阵，证明如下：

从 T 中取出一个子阵：

$$t=\begin{bmatrix} m_1 & n_1 & l_1 \\ m_2 & n_2 & l_2 \\ m_3 & n_3 & l_3 \end{bmatrix}$$

计算 $t\times t^T$ 可得：

$$t\times t^T=\begin{bmatrix} m_1^2+n_1^2+l_1^2 & m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+l_1\cdot l_2 & m_1\cdot m_3+n_1\cdot n_3+l_1\cdot l_3 \\ m_2\cdot m_1+n_2\cdot n_1+l_2\cdot l_1 & m_2^2+n_2^2+l_2^2 & m_2\cdot m_3+n_2\cdot n_3+l_2\cdot l_3 \\ m_3\cdot m_1+n_3\cdot n_1+l_3\cdot l_1 & m_3\cdot m_2+n_3\cdot n_2+l_3\cdot l_2 & m_3^2+n_2^2+l_2^2 \end{bmatrix} \tag{3-11}$$

因为一矢量的三方向数之平方和为1，垂直向量的内积为0所以

$$t\times t^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E \tag{3-12}$$

E—么阵，可见 $t^T=t^{-1}$，显而易见这个证明对(3-10)式是等效的，所以(3-6)式可以写为：

$$K_2=T\cdot K_1\cdot T^T \tag{3-13}$$

在实际计算中（3-13）式比（3-6）式方便。

4. 荷重计算

根据节点处力的平衡条件，作用于某一节点上的内力之合力应与作用于该节点之外力平衡，节点受到的内力合力等于汇交于此节点处各单体端面力合力之反作用力 $-\{R\}$。

所以有

$$[K_S]\{d\}=\{F\} \tag{4-1}$$

式中 $\{F\}$ 为作用于节点之外力列矢量

此即有限单体法中位移法的基本方程式，如前所述 $[K_S]$ 已求得，现在要求出节点上的外力来构成 $\{F\}$ 矩阵。

如果外力是集中力，则将力的作用点划为节点，力的数值可直接填入 $\{F\}$ 中，其序号与 $\{d\}$ 中对应广义位移序号相同。

如果外力是分布荷重，则须按单体将分布荷重转换为相当的节点荷重，然后按节点叠加组成结构的荷重矩阵。

设单体梁上受分布荷重 $q(x)$

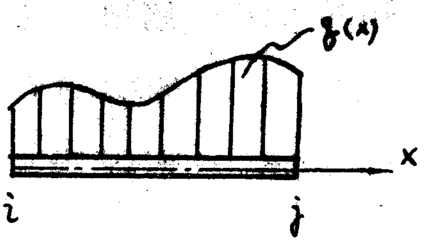

图 4-1

该荷重在给定虚位移 δw 上所作的功：

$$\delta W=\int_0^l q(x)\cdot\delta w(x)\cdot dx=\int_0^l q(x)\cdot H\cdot A^{-1}\cdot\delta d\cdot dx=QA^{-1}\delta d$$

因 δW 是一个数值，所以可以将它的矩阵表达式转置

$$\delta W=QA^{-1}\delta d=(QA^{-1}\delta d)^T=\{\delta d\}^T\cdot[A^{-1}]^T\cdot\{Q\}^T \tag{4-2}$$

式中 $\{Q\}=[Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3]^T$

$$Q_0=\int_0^l q(x)dx,\quad Q_1=\int_0^l q(x)\cdot xdx$$

$$Q_2=\int_0^l q(x)\cdot x^2dx,\quad Q_3=\int_0^l q(x)\cdot x^3\cdot dx \tag{4-3}$$

而相当节点荷重在节点虚位移上作的功为：

$$\delta W=\{\delta d\}^T\cdot\{F\} \tag{4-4}$$

由（4-2）及（4-4）式可有

$$\{F\}=[A^{-1}]^T\cdot\{Q\} \tag{4-5}$$

详细写出即

$$\begin{bmatrix} f_{NL}\\ f_{ML}\\ f_{NR}\\ f_{MR}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l^3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l^2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l^3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q_0\\ Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{bmatrix} \tag{4-6}$$

（如果采用的是右手座标系，$[A^{-1}]^T$ 中第 2 行及第 4 行各元素要改变符号。）

实际计算时可查阅两端刚性固定单跨梁弯曲要素表，按（4-6）式计算的节点荷重数值上等于支座反力（矩），符号则根据荷重的实际作用方向加以判断。

对分布载荷作上述处理带有一定的误差，例如，结构的端部节点处如果是自由支持，当其相关单体受到分布荷重时，该节点将分配到弯矩荷重，并最后作为端部截面内力矩出现。

这种误差随着单体的分细而减小，所以，对结构的重要部位和端部单体，如果其上受有分布荷重的话，单体应划得小些（即在跨度内适当增加节点）。

5. 边界条件——约束的处理

计算出总刚度矩阵 K_S 和荷重列矢量 F 之后，便得到关于节点位移的线性方程组(4-1)。

该方程组尚不能求解，还须将结构的边界条件反映进去，结构的边界条件表现为某些节点的约束（在划分单体时，必须将约束处划为节点），节点的约束可能是①刚性约束，即某几个位移限制为 0，② 弹性固定，节点处位移 di 与支座反力 f 间有关系式：

$$f_i=-kdi, \tag{5-1}$$

k——支座刚度系数

对于情况①（4-1）式中的约束处 $\{d\}$ 矢量中的元变为已知数零，而 $\{F\}$ 矢量中的对应元则为未知的支座反力。据此，可将与被约束位移对应的行和列从（4-1）式中划去，使方程个数等于 $\{d\}$ 中未知数的个数，而 $\{F\}$ 式中的未知项则不出现。从该方程组便可以解出 $\{d\}$，然后根据解出的 $\{d\}$ 仍可方便地求出支座反力。

对于情况②，弹性支座的反力 f_i 出现在（4-1）式的 $\{F\}$ 列阵中，将此附加项移到等式右方并入刚度矩阵中，则刚度矩阵中第 i 行 i 列的元素变为：

$$k'_{ii}=k_{ii}+k \tag{5-2}$$

式中 k_{ii} 是刚度矩阵中原有的元，即弹性支座的处理方法是将支座刚度系数加到刚度矩阵中与约束位移对应行的主对角线上。

最后说明一下，用位移法解题时，必须使结构具有足够的约束，即结构不能具有空间运动的自由度，否则［K］矩阵的行列式值为 0，方程呈不定解。

6. 内力计算

从（4-1）式求出 $\{d\}$ 以后，便可利用每个单体的刚度矩阵求出单体端面力。

参看（2-1）式，右边的 $\{d\}$ 列阵可以根据节点号码从总的位移列阵中取得，代入（2-1）式便可求得节点处单体截面内力。

当求出所有单体的端截面内力后，可将汇交于一节点处的内力迭加，它应该等于施加于此节点处的外力，如果此节点处是支座，则合力就是支反力。

7. 刚度矩阵计算例题

设有图（7-1）所示的交叉梁系，求结构的刚度矩阵和荷重列矢量。

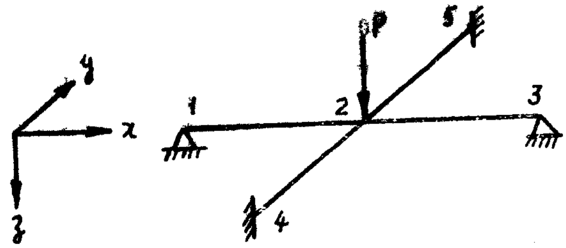

图 7-1

已知：$L_{12}=L_{23}=2\,m \quad L_{42}=L_{25}=2.5\,m$

$I_{12}=I_{23}=I_{42}=I_{25}=1200\ \mathrm{cm}^4=0.12\ \mathrm{cm}^2\,\mathrm{m}^2$

$P=8_T \quad E=2\times10^6\ \mathrm{kg/cm}^2$

不计扭转与剪切影响

(1) 编节点号码，建立结构座标系 0-XYZ 如图 7-1 所示。

规定位移的排列次序：

$$[d]=\{w_1,\ \theta x_1,\ \theta y_1,\ w_2,\ \theta x_2,\ \theta y_2\cdots\cdots,\ w_5,\ \theta x_5,\ \theta y_5\}^T \tag{7-1}$$

(2) 计算单体刚度矩阵：

对于单体 1-2 及 2-3；按照公式 (1-30) 算出：

$$K=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3.6 & 0 & 3.6 & -3.6 & 0 & 3.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.6 & 0 & 4.8 & -3.6 & 0 & 2.4 \\ \hline -3.6 & 0 & -3.6 & 3.6 & 0 & -3.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.6 & 0 & 2.4 & -3.6 & 0 & 4.8 \end{array}\right] \quad (7\text{-}2)$$

对单体 4-2 及 2-5：

$$K=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.84 & 0 & 2.3 & -1.84 & 0 & 2.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.3 & 0 & 3.84 & -2.3 & 0 & 1.92 \\ \hline -1.84 & 0 & -2.3 & 1.84 & 0 & -2.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.3 & 0 & 1.92 & -2.3 & 0 & 3.84 \end{array}\right] \quad (7\text{-}3)$$

在此说明一下所用各物理量的单位。力——吨，力矩——吨·米，挠度——厘米，转角——$\frac{1}{100}$弳，梁长度——米，剖面惯性矩——厘米^2·米^2，这样弹性模数 E 的因次应为：吨·米/厘米^3，例如钢材 $E=20$ 吨·米/厘米^3。上列刚度矩阵中的数值是与这些量纲一致的。

(3) 单体刚度矩阵的座标转换：

对于 1-2，2-3 杆单体座标系与结构座标系一致不须转换。

对于 4-2，2-5 杆 $\overline{ox}$ 轴与 $o\overline{Y}$ 同向，$\alpha=90°$ 由 (3-9) 式得：

$$T=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad (7\text{-}4)$$

$$\therefore\ T\cdot K\cdot T^T=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.84 & -2.3 & 0 & -1.84 & -2.3 & 0 \\ -2.3 & 3.84 & 0 & 2.3 & 1.92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1.84 & 2.3 & 0 & 1.84 & 2.3 & 0 \\ -2.3 & 1.92 & 0 & 2.3 & 3.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (7\text{-}5)$$

(4) 用 (7-2) 和 (7-5) 组成结构总刚度矩阵，结果为 (7-6) 式。