文登学校辅导材料系列

高等数学试题分析及解答

（理工类）

（1987—2002 年全国硕士研究生考试
高等数学试题解答）

北京文登培训学校

一、填空题

【1987 年数一 1(1)】

当 $x =$ $-\frac{1}{\ln 2}$ 时，函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值.

【解】 由 $y' = 2^x(1 + x\ln 2) = 0$，得 $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

又 $y'' = 2^x\ln 2(2 + x\ln 2)$，$y''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = 2^{-\frac{1}{\ln 2}}\ln 2 > 0$，所以，当 $x = -\frac{1}{\ln 2}$ 时，函数 $y = x \cdot 2^x$ 取得极小值.

【1987 年数一 1(2)】

由曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = e + 1 - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积是________.

【解】 所求面积为

$$S = \int_1^e \ln x\,dx + \int_e^{e+1}(e + 1 - x)dx = \frac{3}{2}$$

或

$$S = \int_0^1 [e + 1 - y - e^y]dy = \frac{3}{2}.$$

【1987 年数一 1(3)】

与两直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为________.

【解】 所求平面的法向量为

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}，$$ 所以，所求平面方程为

$$-1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0,$$

即 $x - y + z = 0$.

【1987 年数一 1(4)】

设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$，则曲线积分 $\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy =$ ________.

【解】 由格林公式得

$$\oint_L (2xy - 2y)dx + (x^2 - 4x)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= -2\iint_D dxdy = -18\pi，$$ 其中 D 为：$x^2 + y^2 \leqslant 9$.

【1987 年数二 1(1)】

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=$ ______ e^{-3}.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{n-2}{n+1}-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+1}}=e^{-3}.$$

注:对于“1^∞”型的极限$\lim f(x)^{g(x)}$,由于 $f(x)\to1$,得

$$\ln f(x)=\ln[1+f(x)-1]\sim f(x)-1,$$

所以有,$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$

$$=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$$

【1987 年数二 1(2)】

设 $y=\ln(1+ax)$,则 $y'=$ $\frac{a}{1+ax}$,$y''=$ $\frac{-a^2}{(1+ax)^2}$.

【解】 $y'=\frac{a}{1+ax}$,

$$y''=-\frac{a}{(1+ax)^2}\cdot a=-\frac{a^2}{(1+ax)^2}.$$

【1987 年数二 1(3)】

曲线 $y=\arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是______;法线方程是______.

$y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ $y=-2x+2+\frac{\pi}{4}$

【解】 由于 $y'=\frac{1}{1+x^2}$,$y'(1)=\frac{1}{2}$,

所以,过点$(1,\frac{\pi}{4})$的切线方程为

$$y-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(x-1),\text{即}\quad y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2};$$

法线方程为 $y-\frac{\pi}{4}=-2(x-1)$,即 $y=-2x+2+\frac{\pi}{4}$.

【1987 年数二 1(4)】

$\int f'(x)\mathrm{d}x=$ $f(x)+C$,$\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=$ $\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)]$.

【解】 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$,

$$\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f'(2x)\mathrm{d}2x=\frac{1}{2}f(2x)\Big|_a^b$$

$$=\frac{1}{2}[f(2b)-f(2a)].$$

【1987 年数二 1(5)】

积分中值定理的条件是______,结论是______.

【解】 积分中值定理的条件是:$f(x)$ 在$[a,b]$上连续;结论是:在$[a,b]$上至少存在一点 ξ,

使$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$.

【1988 年数一 1(1)】

若 $f(t) = \lim\limits_{x\to\infty} t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$,则 $f'(t) =$ $\underline{(1+2t)e^{2t}}$

【解】 由于 $f(t) = t\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{2t} = t\mathrm{e}^{2t}$,所以,$f'(t) = \mathrm{e}^{2t} + 2t\mathrm{e}^{2t} = (1+2t)\mathrm{e}^{2t}$.

【1988 年数一 1(2)】

设 $f(x)$ 连续且$\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$,则 $f(7) =$ $\underline{\frac{1}{12}}$.

【解】 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$ 两边对 x 求导,得

$3x^2 f(x^3-1) = 1$,令 $x = 2$,有

$12f(7) = 1$,故 $f(7) = \frac{1}{12}$.

【1988 年数一 1(3)】

设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间$(-1,1]$上定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leqslant 0 \\ x^3, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 1$ 处收敛于________.

【解】 由狄利克雷定理得,$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = 1$ 处收敛于

$$\frac{f(-1+0)+f(1-0)}{2} = \frac{3}{2}.$$

【1988 年数二 1(1)】

设 $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \leqslant 0 \\ \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则 $a =$ $\underline{1}$.

【解】 由已知得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,所以有 $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$,即

$$\lim_{x\to 0^-}(2x+a) = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) = a,$$

得 $a = 1$.

【1988 年数二 1(3)】

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$ $\underline{1}$.

【解】
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\ln x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+} x} = 1.$$

【1988 年数二 1(4)】

$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx =$ $\underline{2(e^2+1)}$

【解】 令$\sqrt{x} = t, x = t^2, dx = 2tdt$,

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^2 2te^t dt = 2\left[te^t\Big|_0^2 - \int_0^2 e^t dt\right]$$

$$= 2\left(2e^2 - e^t\Big|_0^2\right)$$

$$= 2(2e^2 - e^2 + 1) = 2(e^2 + 1).$$

【1989 年数一 1(1)】

已知 $f'(3) = 2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h} =$ $\underline{-1}$.

【解】 由导数定义得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h} = -\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$$

$$= -\frac{1}{2}f'(3) = -1.$$

【1989 年数一 1(2)】

设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)dt$,则 $f(x) =$ $\underline{x-1}$.

【解】 由于$\int_0^1 f(x)dx$ 为常数,设 $A = \int_0^1 f(x)dx$,则 $f(x) = x + 2A$,所以,

$$A = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x + 2A)dx = \frac{1}{2} + 2A,$$

得 $A = -\dfrac{1}{2}$,故 $f(x) = x - 1$.

【1989 年数一 1(3)】

设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分$\int_L (x^2+y^2)ds =$ ________.

【解】 以 x 为参数化为定积分得

$$\int_L (x^2+y^2)ds = \int_{-1}^1 (x^2 + 1 - x^2)\sqrt{1+y'^2}dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\arcsin x\Big|_0^1 = \pi.$$

【1989 年数一 1(4)】

向量场 $\vec{u}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\vec{u} =$ ________.

【解】 $\operatorname{div}\vec{u}\Big|_P = \left[\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(ye^z)}{\partial y} + \frac{\partial(x\ln(1+z^2))}{\partial z}\right]_P$

$$= \left(y^2 + e^z + \frac{2xz}{1+z^2}\right)_{(1,1,0)} = 2.$$

【1989 年数二 1(1)】

$\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$

【1989 年数二 1(2)】

$\int_0^{\pi} t\sin t\,dt =$ $\underline{\quad \pi \quad}$.

【解】 $\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = -t\cos t\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t\,dt$

$$= \pi + \sin t\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

【1989 年数二 1(3)】

曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2)\,dt$ 在点(0,0)处的切线方程是 $\underline{\quad y=2x \quad}$.

【解】 由 $y' = (x-1)(x-2)$，得 $y'(0) = 2$，
所以，曲线在点(0,0)处的切线方程是

$$y = 2x.$$

【1989 年数二 1(4)】

设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0) =$ $\underline{\quad n! \quad}$.

【解】 利用导数定义，

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$$
$$= n!$$

【1989 年数二 1(6)】

设 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是 $\underline{\quad a=b \quad}$.

【解】 由连续定义得 $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$，

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}(a + bx^2) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x} = f(0) = a$， 得 $a = b$.

【1989 年数二 1(7)】

设 $\tan y = x + y$，则 $dy =$ ________.

【解】 方程 $\tan y = x + y$ 微分，得

$\sec^2 y\mathrm{d}y = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$,因此,$\mathrm{d}y = \cot^2 y\mathrm{d}x$.

【1990 年数一 1(1)】

过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $L:\begin{cases} x = -t+2 \\ y = 3t-4 \\ z = t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是_______.

【解】 由已知得,直线 L 的方向向量 $(-1,3,1)$ 即为所求平面的法向量,所以,所求平面的方程为 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$,

即 $x-3y-z+4=0$.

【1990 年数一 1(2)】

设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x =$ e^{2a}.

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$.

【1990 年数一 1(3)】

设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$,则 $f[f(x)] =$ 1.

【解】 令 $u = f(x)$, $|u| \leqslant 1$,所以,

$f[f(x)] = f(u) = 1$.

【1990 年数一 1(4)】

积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于_______.

Review

【解】 由于 e^{-y^2} 的原函数不能用初等函数表示,所以,该二次积分不能先对 y 积分,因此,交换积分次序,得

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^y e^{-y^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^2 y e^{-y^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-e^{-4}).$$

【1990 年数二 1(1)】

曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是 $y=\sqrt{3}x+\frac{5}{4}$.

【解】 曲线上对应于 $t = \dfrac{\pi}{6}$ 的点的直角坐标为 $\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$,在该点处的切线斜率为

$$k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{1}{8}\right)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t\sin t}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以,在该点处的法线斜率为$\sqrt{3}$.

因此,所求法线方程为

$$y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right),\text{即 } y=\sqrt{3}x-1$$

【1990 年数二 1(2)】

设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{1}{x}$,则 $y'=$ $-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}(\sec\frac{1}{x}\tan\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})$.

【解】 $y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sin\frac{1}{x}$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\sec\frac{1}{x}\tan\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right).$$

【1990 年数二 1(3)】.

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=$ $\frac{4}{15}$

【解】 令$\sqrt{1-x}=t$, $x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$,

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=\int_1^0(1-t^2)t(-2t)\,dt=2\int_0^1(t^2-t^4)\,dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}.$$

【1990 年数二 1(4)】

下列两个积分大小的关系式:$\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}dx$ $>$ $\int_{-2}^{-1}e^{x^3}dx$.

【解】 因为当$-2\leqslant x\leqslant-1$时,$e^{-x^3}>e^{x^3}$,所以由定积分性质得 $\int_{-2}^{-1}e^{-x^3}dx>\int_{-2}^{-1}e^{x^3}dx$.

【1991 年数一 1(1)】

设$\begin{cases}x=1+t^2\\y=\cos t\end{cases}$,则$\frac{d^2y}{dx^2}=$ $\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

【解】 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{\sin t}{2t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2}\Big/2t=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

【1991 年数一 1(2)】

Review

由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点$(1,0,-1)$处的全微分 $dz=$ ______

【解】 对方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边求微分,

得 $yzdx+xzdy+xydz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$,

代入(1,0, - 1),得 $\quad -\mathrm{d}y+\dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}=0$,

即 $\quad \mathrm{d}z\Big|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$.

【1991 年数一 1(3)】

已知两条直线的方程是 $l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$, $l_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$,则过 l_1 且平行于 l_2 的平面方程是________.

【解】 由已知,所求平面经过点(1,2,3),且与 l_1、l_2 的方向向量平行,即平面方程的法向量

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},$$

所以,所求平面方程为 $\quad (x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$,

即 $\quad x-3y+z+2=0$.

【1991 年数一 1(4)】

已知当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,则常数 $a=$________.

【解】 由于当 $x\to 0$ 时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$, $\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,所以,$a=-\dfrac{3}{2}$.

【1991 年数二 1(1)】

设 $y=\ln(1+3^{-x})$,则 $\mathrm{d}y=$ $\underline{\dfrac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}}$.

【解】 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{-3^{-x}\ln 3}{1+3^{-x}}\mathrm{d}x$.

【1991 年数二 1(2)】

曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的上凸区间是________.

【解】 $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $y''=-2\mathrm{e}^{-x^2}+4x^2\mathrm{e}^{-x^2}=2\mathrm{e}^{-x^2}(2x^2-1)$,令 $y''<0$,得 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

所以,曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的上凸区间是$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【1991 年数二 1(3)】

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$________.

【解】 $$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty}$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$$

$= 1.$

【1991 年数二 1(4)】

质点的速度 $t\sin t^2$ 米／秒作直线运动，则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$ 米.

【解】 根据题意，所求路程

$$S = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} t\sin t^2 \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t^2 \Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}(\text{米}).$$

【1991 年数二 1(5)】

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} =$ ______.

【解】 令 $x = \dfrac{1}{t}$，当 $x \to 0^+$ 时，$t \to +\infty$，

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^t}{\frac{1}{t} + e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t - te^t}{1 + te^t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1 - e^t - te^t}{(t+1)e^t} = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{(t+1)e^t} - 1\right] = -1.$$

【1992 年数一 1(1)】

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$ $\dfrac{y\sin xy - e^{x+y}}{e^{x+y} - x\sin xy}$.

【解】 方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 两边对 x 求导，得 $e^{x+y}(x+y)' - \sin(xy)(xy)' = 0$，

即 $e^{x+y}(1 + y') - \sin(xy)(y + xy') = 0$，

得 $y' = \dfrac{y\sin(xy) - e^{x+y}}{e^{x+y} - x\sin(xy)}$.

【1992 年数一 1(2)】

函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u\Big|_M =$ ______.

【解】 由于 $\mathrm{grad}u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$

$$= \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

所以，$\mathrm{grad}u\Big|_M = \dfrac{2}{9}(1,2,-2)$.

【1992 年数一 1(3)】

设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leqslant 0 \\ 1 + x^2, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$，则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x = \pi$ 处收敛于 ______.

【解】 由狄利克雷定理得，傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$.

【1992 年数一 1(4)】

微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$______.

【解】 $y=e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\cos x e^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=e^{\ln\cos x}\left(\int\cos x e^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\cos x(x+C)=(x+C)\cos x$.

【1992 年数二 1(1)】

设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$，其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$ 3______.

【解】 由于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{f'(e^{3t}-1)\cdot 3e^{3t}}{f'(t)}$，

所以，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\dfrac{3f'(0)}{f'(0)}=3$.

【1992 年数二 1(2)】

函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

【解】 $y'=1-2\sin x$，令 $y'=0$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，得 $x=\dfrac{\pi}{6}$，又 $f(0)=2$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，所以，最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$.

【1992 年数二 1(3)】

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ ______.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0$.

【1992 年数二 1(4)】

$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=$ $\frac{1}{2}\ln 2$.

【解】 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)}=\int_1^{+\infty}\dfrac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$=\int_1^{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\left[\ln x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$

$=\ln\left.\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_1^{+\infty}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

【1992 年数二 1(5)】

由曲线 $y = xe^x$ 直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$ $\underline{\ \frac{e}{2}-1\ }$.

【解】 $S = \int_0^1 [ex - xe^x]\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}ex^2\Big|_0^1 - xe^x\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e - e + e^x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}e - 1.$$

【1993 年数一 1(1)】

函数 $F(x) = \int_1^x\left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\,(x > 0)$ 的单调减少区间为$\underline{(0, \frac{1}{4})}$

【解】 $F'(x) = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，令 $F'(x) < 0, x > 0$，得 $0 < x < \frac{1}{4}$，即 $F(x)$ 的单调减少区间为$(0, \frac{1}{4})$ 或$(0, \frac{1}{4}]$.

【1993 年数一 1(2)】

由曲线$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为________.

【解】 旋转面方程为 $3(x^2 + z^2) + 2y^2 = 12$. 令 $F(x,y,z) = 3(x^2 + z^2) + 2y^2 - 12$,

则 $F'_x = 6x, F'_y = 4y, F'_z = 6z$.

因此，旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的法向量为$\{F'_x, F'_y, F'_z\}\Big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})} = \{0, 4\sqrt{3}, 6\sqrt{2}\}$,

所以，单位法向量为$\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

【1993 年数一 1(3)】

设函数 $f(x) = \pi x + x^2(-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$，则其中系数 b_3 的值为________.

【解】 $b_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 3x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x + x^2)\sin 3x\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi x\sin 3x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi.$$

【1993 年数一 1(4)】

设数量场 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，则 $div(\mathrm{grad}u) =$ ________.

【解】 $\mathrm{grad}u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2+z^2} \\
&= \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.
\end{aligned}
$$

【1993 年数二 1(1)】

$\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = $ ____0____.

【解】 $$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

【1993 年数二 1(2)】

函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定，则 $\frac{dy}{dx} = $ ________.

【解】 方程 $\sin(x^2+y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 两边对 x 求导，

得 $\cos(x^2+y^2)(2x+2yy') + e^x - y^2 - 2xyy' = 0$,

得 $$y' = \frac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2) - 2xy}.$$

【1993 年数二 1(4)】

$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx = $ ________ $+C$

【解】
$$
\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{\cos x}}dx \\
&= -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d\cos x = 2(\cos x)^{-\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.
\end{aligned}
$$

【1993 年数二 1(5)】

已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，则 $f(x) = $ ________.

【解】 由已知得

$$f'(x) = x\ln(1+x^2), \quad f(0) = -\frac{1}{2},$$

所以
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int x\ln(1+x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2}dx
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \int (x - \frac{x}{1+x^2})dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$$

代入 $f(0) = -\frac{1}{2}$，得 $C = -\frac{1}{2}$，

所以，$f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2) - 1]$.

【1994 年数一 1(1)】

$\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}) =$ ______. $\frac{1}{6}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

【1994 年数一 1(2)】

曲面 $z - e^z + 2xy = 3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为______.

【解】 令 $F(x,y,z) = z - e^z + 2xy - 3$，得 $F'_x = 2y, F'_y = 2x, F'_z = 1 - e^z$，所以，曲面在点 $(1,2,0)$ 处的法向量为 $\{F'_x, F'_y, F'_z\}\Big|_{(1,2,0)} = \{4,2,0\}$，

因此，所求的切平面方程为

$$4(x-1) + 2(y-2) + 0\cdot(z-0) = 0,$$

即 $2x + y - 4 = 0$.

【1994 年数一 1(3)】

设 $u = e^{-x}\sin\frac{x}{y}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\frac{1}{\pi})$ 处的值为 $\pi^2 e^{-2}$.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}\sin\frac{x}{y} + e^{-x}\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}$

$$= -e^{-x}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y}e^{-x}\cos\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$= -e^{-x}\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) - \frac{1}{y^2}e^{-x}\cos\frac{x}{y} + \frac{1}{y}e^{-x}(-\sin\frac{x}{y})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$
$$= e^{-x}\left[-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}\right],$$

所以，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{(2,\frac{1}{\pi})} = \left(\frac{\pi}{e}\right)^2$.

【1994 年数一 1(4)】

设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leqslant R^2$，则 $\iint\limits_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})dxdy =$ ______.

【解】 由于区域 D 关于直线 $y = x$ 对称，所以，有

$$\iint_D \frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{y^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D \frac{x^2+y^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_D \frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{x^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D \frac{x^2+y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此，

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\cdot r\mathrm{d}r$$
$$= \pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

【1994 年数二 1(1)】

若 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，则 $a =$ ____2____.

【解】 由已知得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，所以，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{2ax}{x}$$
$$= 2 + 2a = f(0) = a,$$

得 $a = -2$.

【1994 年数二 1(2)】

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} =$ ________.

【解】 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}$$
$$= \frac{(3t^2+2t)(1+t)}{t} = 3t^2+5t+2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{6t+5}{1-\dfrac{1}{1+t}} = \frac{(6t+5)(t+1)}{t}.$$

【1994 年数二 1(3)】

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)\mathrm{d}t\right) =$ $-3f(\cos 3x)\sin 3x$.

【解】 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{\cos 3x} f(t)\mathrm{d}t\right) = f(\cos 3x)(-\sin 3x)\cdot 3$$

$$= -3f(\cos 3x)\sin 3x.$$

【1994 年数二 1(4)】

$\int x^3 e^{x^2} dx =$ ____ $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}$

【解】 $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{x^2} dx^2$

$$= \frac{1}{2}\int x^2 de^{x^2} = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2} dx^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}) + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C.$$

【1994 年数二 1(5)】

微分方程 $y dx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解为 ______ .

【解】 方程化为$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{4x - x^2}dx$，两边积分

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{4x - x^2}dx = \int \frac{dx}{x(4 - x)}$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4 - x}\right)dx,$$

得 $\ln y = \frac{1}{4}[\ln x - \ln(4 - x)] + \ln C,$

即 $y = C\sqrt[4]{\frac{x}{4 - x}}$，或 $(x - 4)y^4 = Cx$.

【1995 年数一 1(1)】

$\lim\limits_{x \to 0}(1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ ____ e^6 ____.

【解】 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0}\frac{2}{\sin x}\cdot 3x} = e^6$

【1995 年数一 1(2)】

$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt =$ $\int_0^{x^2} \cos t^2 dt + 2x^2 \cos x^4$

【解】 $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 dt = \frac{d}{dx}\left(x\int_{x^2}^{0}\cos t^2 dt\right)$

$$= \int_{x^2}^{0}\cos t^2 dt + x\cos x^4 \cdot (-2x)$$

$$= \int_{x^2}^{0}\cos t^2 dt - 2x^2\cos x^4.$$

【1995 年数一 1(3)】

设$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2$，则$[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) =$ ______.

【解】 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$= [(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}](\vec{c}+\vec{a}) + [(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$
$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} + (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$
$$= 2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 4.$$

【1995 年数一 1(4)】

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R =$ ______.

【解】 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}\right|}$

$$= x^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{3\sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}} = \frac{x^2}{3},$$

当 $\frac{x^2}{3}<1$ 时,级数收敛,所以,收敛半径为 $\sqrt{3}$.

【1995 年数二 1(1)】

设 $y = \cos(x^2)\sin^2\frac{1}{x}$,则 $y' =$ $\underline{-(\sin x^2)}\cdot 2x\sin^2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdots\sin\frac{2}{x}$

【解】 $y' = -\sin(x^2)\cdot 2x\sin^2\frac{1}{x} + 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos(x^2)$

$$= -2x\sin(x^2)\sin^2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}\cos(x^2).$$

【1995 年数二 1(2)】

微分方程 $y''+y=-2x$ 的通解为______.

【解】 相应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$,特征根为 $\lambda=\pm i$.

设非齐次的特解为 $y^* = Ax+B$,代入方程,得 $A=-2, B=0$,即 $y^*=-2x$,

所以,该方程的通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x$.

【1995 年数二 1(3)】

曲线 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为 $\underline{y=3x-}$.

【解】 当 $t=2$ 时,$x=5, y=8$,

又 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$,

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = 3$,所以,所求的切线方程为 $y-8=3(x-5)$,即 $y=3x-7$.

【1995 年数二 1(4)】

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right) =$ $\underline{1/2}$.