韓譯

范氏高等代數學

上卷

韓桂叢 譯述

傅種孫 程廷熙 校訂

附中算學叢刻社

韓譯

范氏高等代數學

再版

譯述者 韓桂叢

校訂者 傅種孫 程廷熙

北平廠甸師大附中

算學叢刻社印行

序

范氏高等代數學 (Fine—A College Algebra) 一書, 近十數年, 風行海內, 中學教以斯, 大學試以斯, 蓋其理論謹嚴, 材料豐富, 誠中學教科之一善本也. 顧中學算學, 授以西文, 事倍而功半, 矧教部明令必用中文課本乎, 於是譯述尚已.

嚴幾道先生謂: 譯書須信, 達, 雅. 竊怪坊間譯本, 有於其內容任意改削, 而猶剽范氏之名者,「信」已不足示於人,「達, 雅」云乎哉? 滿廬學長設講席於師大附中, 授范氏原著十餘過, 大之全部線索, 小之一字精微, 無不融貫焉, 推敲焉, 以明其究竟. 課暇迻譯, 易稿再三; 復由仲嘉學長, 悉心校訂; 余間亦妄參末議: 總期於「信」之中以求「達」, 不敢於「信」之外而言「雅」, 此堪爲讀者告也. 付梓伊始, 聊綴數言以爲序.

民國二十四年八月程廷熙

本書簡稱「辰」字
電報號碼 6591

目　　錄

第一編——數

第二編—代數

第二編代數

I. 研究初步

用文字表數

242. 常數及變數. 代數中常用文字表任何種類之數. 如公式 $ab=ba$ 中, a, b 二字即各表一任意數, 此式之意乃謂: 任何第一數乘以任何第二數之積等於第二數乘以第一數之積也.

但 $x+b$ 式中之 x 及 b 所表之數, 其義意又迴然各異, 故凡式中文字其意義類此者均依下說分別之, 以便研究.

第一. 如 b 者可視爲必指某一特值而言, 初雖可任隨吾人之意, 但一經指定, 則全題不變, 此種字所表之數稱爲已知數 (known number) 或常數 (constant).

第二. 如 x 者可視爲在某問題中始終可自由予以可能之值, 並可任由某值變至任一他值. 此種字所表之數稱爲變數 (variable).

243. 未知數. 文字亦有時用以表某問題中所求之數值. 此種字所表之數稱爲未知數 (unknown number).

表未知數之文字,不能任意予以數值,此與表常數或變數之文字不同者也.

例如 $2x-5=0$ 方程中之 x,即表未知數,其值可求得之爲 $\frac{5}{2}$. $2x-5$ 式中之 x,可任意予以何值,但在 $2x-5=0$ 方程中,則除 $\frac{5}{2}$ 外不能予以他值.

244. 擇字. 選用文字時,其必需限制者,僅勿同時用一字表不同二數而已. 然以在前諸字母如 a, b, c 等表已知數或常數,以在後諸字母如 x, y, z, 等表未知數或變數,則習用已久.

此外有時於字母上附以小撇或數碼者:如 a', a'', a''' 讀爲"a 一"",a 二"",a 三";a_0, a_1, a_2 讀爲"a 附零","a 附一","a 附二".

245. 文字之計算. 若以 a, b, c 等文字表數,計算之時,僅可用算術運算符號連結之,以表示計算之結果. 如加 b 於 a,其意僅指 $a+b$ 形狀之式,而稱之爲 a 與 b 之和 (sum). 同此,ab 一式稱爲 a 與 b 之積 (product).

如上法所得之文字式,既亦用以表數者,當亦可用算術基本法則演算之. 惟因其值尚未經指定,不能直接由其值演算,僅可依其法則連以適當之運算符號,然後用僅變其形而不改其值之方法使其形狀化簡.

對和與積,僅變其形而不改其值之諸法則,於§68曾論及之,茲綜述之如下:

1. $a+b=b+a.$ 2. $a+(b+c)=(a+b)+c.$

3. $ab=ba.$ 4. $a(bc)=(ab)c.$

5. $a(b+c)=ab+ac.$

以上公式1－5實則亦可認爲加法及乘法之定義;其他各算術運算法則亦同此.

例如 $2x+3y$ 加 $4x+5y$,其意僅謂可用1－5各公式及已知數之加法,將 $2x+3y+(4x+5y)$ 化爲最簡形狀 (simplest form) 也. 於是得

$2x+3y+(4x+5y)=2x+3y+4x+5y$ 由 2.

$=2x+(3y+4x)+5y=2x+(4x+3y)+5y$ 由 2 及 1.

$=2x+4x+3y+5y=(2x+4x)+(3y+5y)$ 由 2.

$=(2+4)x+(3+5)y=6x+8y.$ 卽所求之和. 由 3 及 5.

計算之基本法則

246. 根據上節所述加,減,乘,除,乘方,開方諸運算,可以下列諸法則及公式爲其代數的定義. 故可稱下列諸法則及公式爲計算之基本法則 (The fundamental rules of reckoning).

在本書第一編內所創造關於各類數之諸公式中, a, b, c 等文字表任何有限數,而等號 = 乃"所表之數同於"之意.

247. **加法.** 加 b 於 a,其結果卽 $a+b$ 式,此式稱爲 a, b 之和. 已知任何 a, b 之值,此式永有一值,且僅一值. 特例, $a+0=0+a=a.$

248. 加法適合於交換定律(commutative law)及結合定律(associative law);卽適合於

$$a+b=b+a,\quad a+(b+c)=(a+b)+c$$

二定律也,§§ 34, 35.

249. 下列關於和之等式法則(rules of equality)亦屬眞確,§ 39:

若 $a=b$, 則 $a+c=b+c$.

若 $a+c=b+c$, 則 $a=b$.*

250 **減法.** 此乃加法之逆法,§ 55. 已知任何 a, b 二數;永有一數且僅一數,若加以 b 可得 a. 此數稱爲由 a 減 b 所得之餘數(remainder),並以 $a-b$ 式表之,故由定義可得

$$(a-b)+b=a.$$

特例,$0-b$ 即以 $-b$ 表之.

251 **乘法.** 以 b 乘 a,其結果即 ab 式. ab 稱爲 a 乘 b 之積. 已知任何 a, b 二數,此式永有一値,且僅一値.

特例,$a\cdot 0=0\cdot a=0$,其中 a 表任何有限數.

若 b 表正整數,則 $ab=a+a+\cdots\cdots$ 至 b 項.

252 乘法適合於交換定律及結合定律且對加法適合於分配定律(distributive law);即適合於

* 若 c 爲無限時,則此律不合,容後論之.

$$ab=ba,\quad a(bc)=(ab)c,\quad a(b+c)=ab+ac,$$

三定律也, §§45–47.

253 下列關於積之等式法則亦屬眞確, §75, 及§76:

若 $a=b$, 則 $ac=bc$.

若 $ac=bc$, 則 $a=b$, 但 $c=0$ 除外*

若 $ac=0$, 則 $a=0$, 或 $c=0$.

254. **除法** 此乃乘法之逆法, §124. 已知任何 a, b 二數; 除 b 爲零外, 永有一數且僅一數, 若以 b 乘之可得 a. 此數稱爲 a 被 b 除所得之商 (quotient), 並以 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 式表之. 故由定義得

$$\left(\frac{a}{b}\right)b=a, \text{ 但 } b=0 \text{ 除外.}$$

255. **乘方** 此乃一式連續自乘之積 連乘積 $a\times a\times\cdots$ 至 n 個因式以 a^n 表之, 並稱之爲 a 之 n 次冪 (power).

a^n 記號上, n 稱爲指數 (exponent), a 爲底 (base).

256. 乘方適合於下列三定律, 即所謂指數定律 (laws of exponents) 也, §185.

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad (a^m)^n=a^{mn},$$
$$(ab)^n=a^nb^n.$$

---

* 若 c 表無限時, 則此律不合, 容後論之.

257. 下列關於方羃之等式法則亦屬眞確, §184:

若　$a=b$,　　則 $a^n=b^n$.

若　$a^2=b^2$,　　則　$a=b$ 或 $a=-b$.

上述第二法則及其通則,容後論之.

258. **開方**. 此乃乘方之逆法之一, §§ 138, 140. 已知任何正數 a, 則有一正數且僅一正數, 其 n 次羃恰等於 a. 此數稱爲 a 之 n 次主根 (principal nth root), 並以 $\sqrt[n]{a}$ 式表之, 當 $n=2$ 時, 僅以 $\sqrt{a}$ 表之. 故由定義得

$$(\sqrt[n]{a})^n=a.$$

但其 n 次羃等於 a 之數, 不僅此正數 $\sqrt[n]{a}$ 已也. 俟後當證其 n 次羃等於 a 者, 應有 n 個不同之數; 且不惟 a 表正數時爲然, 卽表任何種類之數時亦然.

當 a 表正數, n 爲奇數時, 則 $-a$ 之 n 次主根爲 $-\sqrt[n]{a}$.

259. **以上諸法則之可逆性**. 以上所述之法則, 一部分稱爲等式法則 (rules of equality), 其餘稱爲結合法則 (rules of combination).

須注意所有結合法則及關於和之等式法則均爲可逆 (reversible) 者, 但關於積及方羃之等式法則, 則非完全可逆者.

例如分配定律 $a(b+c)=ab+ac$ 爲一種結合法則, 可以 $a(b+c)$ 代 $ab+ac$, 亦可逆之以 $ab+ac$ 代 $a(b+c)$.

又若 $a=b$, 則永可推斷 $a+c=b+c$; 且逆之若 $a+b=b+c$, 則 $a=b$.

但若 $a=b$; 固可推斷 $ac=bc$, 然而若 $ac=bc$, 則僅當 c 之值知其非零時, 始可推斷 $a=b$.

且雖由 $a=b$, 永可得 $a^2=b^2$; 而由 $a^2=b^2$, 則僅可得「非 $a=b$ 卽 $a=-b$」.

260. 不等式法則. $a\neq b$ 一式, 卽謂 a 不等於 b 也.

已知二不等實數 a 及 b, 其一之代數值較大, 其他卽較小, § 62.

若 a 爲較大者, b 較小者, 則寫爲

$$a>b \text{ 或 } b<a.$$

特例, $a>0$ 或 $a<0$ 依 a 值之正負而定.

261. 對任何已知實數 a, b, c 得下列諸法則 §§ 178, 184:

1. 若　$a=b$, 且 $b=c$, 則 $a=c$.
   若　$a=b$, 且 $b<c$, 則 $a<c$.
   若　$a<b$, 且 $b<c$, 則 $a<c$.
2. 依　$a<, =, >b$,
   可定　$a+c<, =, >b+c$;
   且若 $c>0$, $ac<, =, >bc$;
   但若 $c<0$, $ac>, =, <bc$.
3. 當 a, b 均表正數時,
   依　$a<, =, >b$,
   可定　$a^n<, =, >b^n$
   且　$\sqrt[n]{a}<, =, >\sqrt[n]{b}$.

前曾論及2, 3二條中僅含＝記號部分亦適用於虛數。若$a=b$，且$b=c$，則$a=c$，此法則於虛數亦眞，稱爲等式之通則 (general rule of equality).

其他代數記號

262. 以前各節所述諸種記號外，下列記號亦代數中所常用者.

1. 各種括號，(signs of aggregation) 如括弧( )前已用之，另有括弓[ ]，括帶{ }，表示號內之式可視作一單純記號用之.

2. 雙號 (double signs) $\pm$ 讀爲"加或減"而$\mp$讀爲"減或加".

例如$a\pm b\mp c$指$a+b-c$或$a-b+c$而言，蓋上層符號與下層符號分用也.

3. 用$\therefore$記號代"故"或"所以".

4. 用$\cdots\cdots\cdots$記號代類推或等等.

5. 且用$\because$代"因"；$\ngtr$代不大於；$\nless$代不小於；$\gtrless$代大於或小於.

代數式

263. 凡用上述各演算連結文字，或文字與數所成之式均稱爲代數式 (algebraic expression).

264. 註. 此種式中所含演算之次數，有有限

者如 $1+x+x^2$, 有無限者, 如 $1+x+x^2+\cdots\cdots$ 以至無限. 前者稱爲有限式 (limited expression), 後者稱爲無限式 (unlimited expression). 玆先僅論有限式.

265. 通常按代數式中所含之變數或未知數之情形, 分類如下:

266. 凡式中不含有除法或雖含除法而除數中無變數文字者稱爲整式 (integral expression), 否則稱爲分式 (fractional expression).

例如, 若 x, y 表變數, 而 a, b, c 表常數,

則　ax^2+bx+c 及 $\frac{y}{b}+\sqrt{x}$ 爲整式,

而　$y+\frac{1}{x}$, 及 $\frac{x+2}{1-x}$ 爲分式.

267. 凡式中不含有根式或雖含根式而根號內無變數文字者稱爲有理式 (rational expression), 否則稱爲無理式 (irrational expression).

例如 $a+\sqrt{b}\,x$ 爲有理式, 而 $\sqrt{y}+\sqrt{y-x}$ 則爲無理式.

268. 註. 1. 此類名詞用時, 乃假定已將代數式化爲最簡形狀者而言. 例如 $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$ 仍爲有理式, 蓋因其可化爲 $x+y$ 也.

2. 整式及有理式等名詞與該式之數值(numerical values)無關.

例如,$x+2$本爲整式,然其數值僅當x之值爲整數時爲整數. x之值爲分數時,則其值爲分數,且x之值爲無理數時,其值亦爲無理數.

269. 當代數式A由$+$,$-$號連結數部分而成時,則每部分及其前之符號均稱爲A式之**項**(term).

如 $a+a^2c-(b+c)+[d+e]-\{f+g\}+\left.\begin{matrix}h+\overline{i+j}\\+k\end{matrix}\right|-\dfrac{l+m}{n+p}$,

式中各項爲a, a^2c, $-(b+c)$,等等,其中又有自含許多項之項,則括以括弧或同類之括號,§262, 1.

270. 整式依其所含項數分爲**獨項式**(monomials),**二項式**(binomials),**三項式**(trinomials),及**多項式**(polynomials).

271. 獨項式中,常數因式之積稱爲變數因數之積之**係數**(coefficient).

例如$4ab^2x^3y^4$式中,$4ab^2$爲x^3y^4之係數. 同時,係數中之任一因式稱爲其餘各因式之積之係數亦無不可. 於獨項式,其係數應寫在前邊. 未寫係數時,卽其係數爲1. 如x^2y之係數爲1.

272. 僅係數不同之項稱爲**相似項**(like terms).

例如$-2x^2y$與$6x^2y$卽相似項也.