

极小曲面论

卷 一

极小曲面论的微分几何侧面

剑持胜卫
[日] 丹野修吉 编
萩上絃一

王运达 译

9
东北工学院

极 小 曲 面 论

卷 一

极小曲面论的微分几何侧面

剑持胜卫

〔日〕 丹野修吉 编

荻上紘一

王 运 达 译

东 北 工 学 院

1985 年 7 月

序 言

著名的柏拉图 (Plateau) 问题 “以给定曲线为边界的曲面中，试求面积为最小者”，所代表的极小曲面论有着悠久历史。据说其诞生可在 1762 年拉格朗日的著作中找到。从那时到现在很长的岁月里许多研究者得到非常巨大的成果。稍加浏览可见，极小曲面论和二阶椭圆型方程论，几何测度论，一元复变函数论，子流形论，三维流形论等有密切联系，促进分析，复变函数，微分几何，拓扑学许多优美方面成长。目前更加迅猛发展中。

不论过去，现在，也许将来，极小曲面论经常给微分几何提供新问题，强烈地推动它的前进。最近，极小曲面论在三维流形上的应用也很惊人。因此，了解极小曲面论的基本知识以及最近的应用是重要的。

根据这些理由，在第三次日本几何讨论会 (Surveys in Geometry) 上选极小曲面为议题。请服部晶夫 (A. Hattori)，加藤十吉 (M. Kato)，剑持胜衡 (K. Kenmotsu)，西川青季 (S. Nishikawa)，荻上紘一 (K. Ogiue)，佐佐木 武 (T. Sasaki)，丹野修吉 (S. Tanno) 等各位执笔写成这份资料并在会上宣讲，对此我向他们深表谢意。

在极小曲面论中，几何测度论所起的作用最近愈加重要。本想在这份资料里也报导这方面的内容，但时间来不及了。想在将来的 Surveys in Geometry 里以 “变分问题与几何测度论” 为题再介绍。这份有如此缺点的资料若能在纵观极小曲面论上对许多读者有用，我就感到幸福。

下略。

发起人代表 落合卓四郎 (T. Ochiai)

1982 年 2 月

经典极小曲面论入门

序

据说极小曲面论是1762年发表的 J. Lagrange 的著作 “Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies” 开始研究的. 他在此著作中开拓了今天叫做变分法的分支, 找出了 Euler-Lagrange 方程. 对重积分的情况他举例如下: 在三维欧氏空间 R^3 中考虑曲面 $z=f(x, y)$, $x, y \in D$, D 为 R^2 中的某域. 设此曲面在有相同边界的曲面族中面积最小. 这时, $z=f(x, y)$ 满足

$$(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = 0, \quad (1)$$

现在, (1) 叫做**极小曲面的微分方程**. 1744 年 Euler 就知道悬链面是局部面积最小. 1776 年 J. B. M. C. Meusnier 指出除悬链面外, 正螺面也满足方程 (1). 而且他证出一般曲面的平均曲率 H 满足

$$2H = \frac{1}{(1+z_x^2+z_y^2)^{3/2}} \{ (1+z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} \}.$$

根据此式就把 $H \equiv 0$ 的曲面叫做**极小曲面**了.

大约在 60 年以后的 1834 年 H. F. Scherk 找到了悬链面, 正螺面以外的具体例, 其一是

$$z = \log(\cos y) - \log(\cos x).$$

它叫做 **Scherk 曲面**.

据 J. C. C. Nitsche 看, 极小曲面论的第一黄金时代是 1855 年~1890 年. E. Beltrami, L. Bianchi, O. Bonnet, E. Catalan, G. Darboux, A. Enneper, S. Lie, E. R. Neovius, A. Ribaucour, B. Riemann, A. Schoenflies, H. A. Schwarz, J. A. Serret, K. Weierstrass, J. Wein-

garten 等作了很多基本工作，但 Weierstrass-Enneper 发现的公式和 O. Bonnet 发现的高斯映射的共形性最重要。请注意由此公式得出 $H \equiv 0$ 的另一特征是极小曲面与面积毫无关系，可用调和函数表达它的特点。

第二黄金时代是 Plateau 问题的解决时期 1930 年~1940 年，第三黄金时代从极其最近开始，现在正是这个时代的中间。

本文用初等方法导出 Weierstrass-Enneper 公式（第一章，§3），并阐述由此公式得到的微分几何学结论。

知道极小曲面的具体例子是一件重要的事情，故对经典上著名诸例从局部的，整体的角度详加说明，并且尽量画出图来。

从目录可见，人们知道的经典极小曲面大都说明了。

二维情况下的 Bernstein 定理按 Osserman 的扩充方式证明了（第三章，§6），而在第三章 §17 中给出另一种证明。

完全没有解说 Plateau 问题¹⁾。关于这些请参看 Nitsche[24] 或西川·落合[21]。

本文的一部份曾在东京工业大学（1981 年前期），东北大学大学院（1981 年后期）讲过。向给我这种机会的各位以及热心听众表示感谢。

剑持胜卫

1981 年 11 月 26 日

中文本是日文本的全译，改了一些错字，作了几个附注，增添一个索引。

焦作矿业学院数学教研室王有道，东北工学院数学系李建华，杨胜芳三同志为出版此书中译本作了许多工作，特此表示谢意。

译者 1985 年 5 月 10 日

1) 本书卷二讨论此问题。（译者注）

目 录

第一章 Weierstrass-Enneper 公式

§ 1. 极小曲面的定义	1
§ 2. 面积最小的曲面	10
§ 3. 极小曲面的共形性	12
§ 4. 联带极小曲面	22

第二章 Weierstrass-Enneper 公式的应用

§ 1. 代数极小曲面	25
§ 2. Henneberg 曲面	30
§ 3. Schwarz 公式	33
§ 4. 循环极小曲面	35
§ 5. Catalan 曲面	38
§ 6. 螺极小曲面	39
§ 7. Riemann-Schwarz 曲面	41

第三章 完备极小曲面

§ 1. 高斯映射与全曲率	48
§ 2. 正螺面	49
§ 3. 悬链面	51
§ 4. Enneper 曲面	61
§ 5. Scherk 曲面	62
§ 6. 高斯映射的值分布	65
§ 7. 高斯曲率的估计	77

第一章 Weierstrass-Enneper 公式

在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中极小曲面的最基本公式是 Weierstrass, Enneper 独立发现的用解析函数表示极小曲面的公式。若使用定理“在可定向曲面上恒存在等温参数”，则可简单地证出 $W-E$ 公式 (Weierstrass-Enneper 公式的缩写)，但在本章不用这个存在定理，而给出简易证明。以后不加声明地使用了曲面的初等微分几何知识，复变函数论以及黎曼面的一些结论。

§ 1. 极小曲面的定义

微分几何学的极小曲面的定义是平均曲率恒为 0 的曲面。也有作准备的意思，从平均曲率复习起¹⁾。

设 M 为连通，可定向二维流形； (u, v) 为 M 的局部坐标， $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ 为 C^2 级可微分映射。记

$$x = x(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3.$$

定义

$$x_u := \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad x_v := \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$E := x_u \cdot x_u, \quad F := x_u \cdot x_v, \quad G := x_v \cdot x_v.$$

由拉格朗日恒等式知¹⁾

$$EG - F^2 = |x_u \wedge x_v|^2 = \frac{\partial(x, y)^2}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(y, z)^2}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(z, x)^2}{\partial(u, v)},$$

故下列各命题等价：

1) 其证明见石原 繁著《微分几何学概论》中译本 §5 东北工学院 (1982)。

2) 式中的 $\wedge$ 表示向量的外积 (均系译著注)。

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \begin{aligned}
 & (a) \text{ 在 } M \text{ 的各点, } x_u, x_v \text{ 线性无关,} \\
 & (b) x_u \wedge x_v \neq 0, \\
 & (c) EG - F^2 > 0, \\
 & (d) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \text{ 的秩} = 2, \\
 & (e) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \\
 & \text{中至少一个不是 } 0.
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

定义 1. 当在 M 的各点 $x_u \wedge x_v \neq 0$ 时, $x(u, v)$ 叫做浸入 (immersion).

注意. 当然这种定义与局部坐标的选法无关.

以后不加特殊声明时, 设 x 是浸入. $\{M, x\}$ 叫做 R^3 中的曲面, M 叫做参数曲面.

设 $(u(t), v(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ 为 M 的 C^2 级曲线. $x(t) := x(u(t), v(t))$ 是曲面 $x(M)$ 上的空间曲线¹⁾. 由

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} x_u + \frac{dv}{dt} x_v$$

知, x_u, x_v 在 $x(M)$ 的各点作成切空间的基底. 求其内积, 因

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2,$$

故

$$I := Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

叫做 $\{M, x\}$ 的第一基本形式. 由 (1.1) 可见,

$$n = x_u \wedge x_v / |x_u \wedge x_v|$$

是 $x(M)$ 的单位法向量. 令

$$L := x_{uu} \cdot n, \quad M := x_{uv} \cdot n, \quad N := x_{vv} \cdot n,$$

1) 式中 $\cdot$ 的含义是定义等于. (译者注)

则

$$\Pi := Ldu^2 + 2Mdu dv + Ndv^2$$

叫做 $\{M, \mathbf{x}\}$ 的**第二基本形式**。设 $\mathbf{x}(s) := \mathbf{x}(u(s), v(s))$, s 为弧长, $\mathbf{t} := \frac{d\mathbf{x}}{ds}$, $|\mathbf{t}| = 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} \cdot \mathbf{n} &= L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\ &= \frac{L \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2M \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + N \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2} \\ &= \frac{L \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2M \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + N \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}. \end{aligned}$$

上式右边说明, 用数乘 $\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right)$, 其值不变。因此, 左边仅依赖于 M 的切向量的方向故可设

$$(1.2) \quad \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} \cdot \mathbf{n} = k(t)$$

式中 $\mathbf{t}$ 为单位切向量 (法向量的取法尚有 $-\mathbf{n}$, 这时 (1.2) 的左边变为 $-k(t)$)。它叫做 M 在 $\mathbf{t}$ 方向上的**法曲率**。当 $\mathbf{t}$ 在其起点的切平面中转一圈时,

$$(1.3) \quad k_1 := \max k(t), \quad k_2 := \min k(t)$$

叫做 M 在 $\mathbf{x}(s)$ 处的**主曲率**。(即在 $\mathbf{x}(s)$ 处用含法向量的平面截此曲面而成截痕在 $\mathbf{x}(s)$ 处的曲率是法曲率, 转动此平面而得截痕的最大值和最小值是主曲率)。

$$(1.4) \quad H := \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

叫做 M 在 $\mathbf{x}(s)$ 处的**平均曲率**。

定义 2. 当

$$(1.5) \quad H \equiv 0$$

恒成立时, $\{M, x\}$ 叫做极小曲面.

因为 k_1, k_2 是

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (GL + EN - 2FM)\lambda + (LN - M^2) = 0$$

的解 (在 $Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1$ 的条件下求 $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$ 的最大值和最小值, 故由拉格朗日待定乘数法可得), 所以

$$(1.6) \quad H = \frac{1}{2} \cdot \frac{GL + EN - 2FM}{EG - F^2}.$$

因此, 用第一, 二基本形式表示时, 极小曲面是满足

$$(1.7) \quad GL + EN - 2FM \equiv 0$$

的曲面. 因高斯曲率 $K = k_1 k_2$, 故极小曲面的高斯曲率恒¹⁾

$$(1.8) \quad K \leq 0.$$

设 D 是 R^2 中的域, $f(u, v)$ 是 D 上的 C^2 级函数. 有时, 曲面

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

叫做非参数 (non-parametric) 曲面¹⁾. 对于这种曲面, $H \equiv 0$ 可写成下列偏微分方程 (1.9). 因为

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2,$$

$$x_u \wedge x_v = (-f_u, -f_v, 1) \neq 0, \quad (u, v) \in D,$$

所以非参数曲面是浸入曲面 (immersed surface). 由

$$n(u, v) = (-f_u, -f_v, 1) / \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

得第二基本量

$$L = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad M = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, \quad N = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}},$$

故 $H \equiv 0$ 变为

$$(1.9) \quad (1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} \equiv 0.$$

此式叫做关于 $f(u, v)$ 的极小曲面方程. 它是非线性椭圆型偏微分方

1) 也叫做图象 (graph). (译者注)

程。因任意极小曲面关于适当选取的直角坐标系局部地均可看做非参数曲面，故关于此直角坐标系是 (1.9) 的局部解。

例 1. 正螺面 (Helicoid) 它是

$$(1.10) \quad f(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

的曲面。通过直接运算可见，(1.10) 满足 (1.9)，因此，正螺面是极小曲面。(1.10) 的参数表示是

$$(1.11) \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

这是 $\mathbb{R}^3$ 中的正螺线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ 的主法线作成的直纹面 (图 1)。(1.10) 只在 $(x, y) =$

$(0, 0)$ 有奇点。其实，令 $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ ，

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

则

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta \quad (r \neq 0),$$

故由 $\tan \theta = \tan z$ 得 $\theta_0 \leq z \leq \theta_1$ 。当 (x, y) 在 θ_0 与 θ_1 的范围内的某扇形趋向 $(0, 0)$ 时，曲线上的对应点收敛于 z 轴的某直线段上。请注意，一般来说，当边界为直线段时极小曲面

可通过反射来扩充 [16]，故曲面自身并无奇点 (即 z 轴被光滑地包含在曲面内)。当然，目前情况通过 (1.11) 具体地可看出正螺面是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的浸入。

从 (1.11) 可见， $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2$ 。因此， $\mathbb{R}^3$ 中任意紧致集的原象在 (u, v) 平面内是紧致的。故映射 (1.11) 是 **真映射** (proper map)。于是在 (u, v) 平面上发散于无穷远的曲线的象在 $\mathbb{R}^3$ 中也发散于无穷远，从而此曲面是完备的。

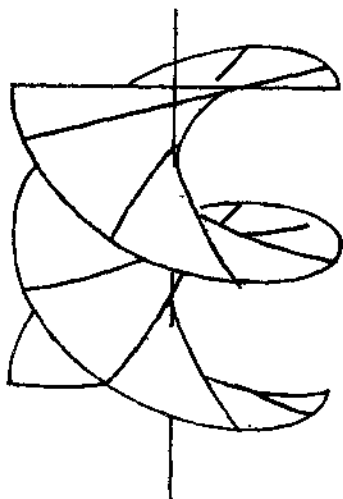


图 1

至于局部特征, 下列定理成立.

定理 1. (E. Catalan, 1842) 直纹面中的极小曲面局部地是超平面的一部分或正螺面的一部分.

证. 随时间 t 而运动的直线所形成的曲面叫做**直纹面**, 动直线叫做**母线**. 直纹面上的一般点可表示为

$$(1.12) \quad x(u, v) = y(u) + ve_1(u),$$

式中设 $y(u)$, $e_1(u)$ 是 R^3 中的向量, 而且 $|e_1(u)| = 1$, $-\infty < v < \infty$, $a < u < b$, $y(u)$, $e_1(u)$ 是 C^2 级向量函数.

计算第一基本形式得

$$I = \{(y', y') + 2v(y', e_1') + v^2(e_1', e_1')\} du^2 + 2(y', e_1) du dv + dv^2,$$

式中 $(\ , \)$ 是 R^3 中的内积. 第二基本形式是

$$II = \frac{(y'' + ve_1'', y' + ve_1', e_1) du^2 + 2(e_1', y', e_1) du dv}{|x_u \wedge x_v|}$$

式中 $(x, y, z) := (x, y \wedge z)$.

由 (1.7) 可见, $H=0$ 与

$$(1.13) \quad \begin{aligned} & v^2(e_1'', e_1', e_1) + [(y'', e_1', e_1) + (e_1'', y', e_1)]v \\ & + (y'', y', e_1) - 2(y', e_1)(e_1', y', e_1) = 0 \\ & a < u < b, \quad -\infty < v < \infty \end{aligned}$$

等价. 当动直线 $ve_1(u)$ 在运动中, 取 $y'(u)$ 与之正交, 则

$$(y'(u), e_1(u)) = 0.$$

因 $y(u)$ 与 $e_1(u)$ 只是 u 的函数, 故由 (1.13) 得

$$(1.14) \quad \begin{cases} (e_1'', e_1', e_1) = 0, \\ (y'', e_1', e_1) + (e_1'', y', e_1) = 0, \\ (y'', y', e_1) = 0, \quad a < u < b. \end{cases}$$

当 $(e_1', y', e_1) = 0$ 时, 由 $M=0$, $N=0$ 得 $K=0$. 即 M 为可展面. 和 $H=0$ 一起得 $k_1=k_2=0$, 于是 x^α 是全测地的. 因此, M 的所有测地线, 在 R^3 中也是测地线, 即直线. 从而, 这时 $\{M, x\}$ 是超平面的一部份.

其次是 $(e'_1, y', e_1)|_{u_0} \neq 0$ 的情况。为了找出局部特征，假设在 (a, b) 上 $(e'_1, y'_1, e_1) \neq 0$ (注：人们知道若规定 M 的完备性，这个假设就不必要了)。更换参数 u 可使 $|e'_1(u)| = 1$ 。把 $e_1(u)$ 看做空间曲线 $r(u)$ 的切向量， u 为其弧长。设 $r(u)$ 的曲率，挠率分别为 κ, τ ，则

$$\kappa(u) = (r''(u), r''(u))^{1/2} = |e_1(u)| = 1,$$

$$\begin{aligned} \kappa^2(u)\tau(u) &= (r'(u), r''(u), r'''(u)) \\ &= (e_1(u), e'_1(u), e''_1(u)) = 0. \end{aligned}$$

可见 $r(u)$ 是单位圆。故 $e_1(u)$ 可写做

$$e_1(u) = A \cos u + B \sin u,$$

式中 A, B 为互相正交的单位常向量。令

$$C := A \wedge B.$$

因

$$e''_1(u) = -e_1(u)$$

故由 (1.14)₂ 得

$$(y'', e'_1, e_1) = 0.$$

于是

$$(y''(u), C) = 0,$$

即

$$(y'(u), C) = \text{const} = c.$$

又因

$$(y'(u), e_1(u)) = 0,$$

故 $y'(u)$ 可写做

$$y'(u) = cC + d(u)e'_1(u).$$

从而由 (1.14)₃ 得

$$d(u) = \text{const} = d.$$

于是

$$y = (y_0 + cuC) + de_1(u).$$

因此

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (y_0 + cuC) + (v + d)e_1(u) \\ &= y_0 + cuC + (v + d)(A \cos u + B \sin u), \end{aligned}$$

这说明 $x(u, v)$ 是正螺面。□

定理 1 指出了正螺面的局部特征，至于整体命题容后再述。

Meusnier (1776) 证明了 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 形状的极小曲面只有正螺面, $z=a \tan^{-1} \frac{y}{x}$. 由(1.9)立即得出证明.

例 2. 悬链面 (Catenoid) 它的方程是

$$(1.15) \quad z = \cosh^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

易见此式是 (1.9) 的解, 因此是极小曲面 (见图 2).

在 (x, z) 平面上的悬链线 $x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ 以 z 轴为轴旋转之可得悬链面.

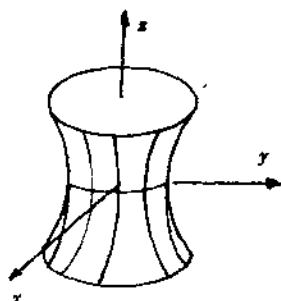


图 2

定理 2. (O. Bonnet, 1860) 旋转面中的极小曲面只有悬链面.

证. 因为是局部定理, 所以可设

$$z = f(x, y) = g(r),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

为旋转面的方程. 把此式代入 (1.9) 得

$$g''(r) + g'(r)(1 + g'(r)^2) \frac{1}{r} = 0.$$

积分两次, 略去常数得

$$g(r) = \cosh^{-1} r. \quad \square$$

有 (1.15) 的参数表示:

$$(1.16) \quad \begin{cases} x = \frac{u}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right), & y = \frac{v}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2} \right), \\ z = \log(u^2 + v^2)^{1/2}, \\ (u, v) \in D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u^2 + v^2 < \infty\}. \end{cases}$$

$x(u, v) := (x, y, z)$ 做为从 D 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射是真映射. 因此, 悬链面是完备的.

例 3. Scherk 曲面 (1835) 易见它的方程

$$z = \log(\cos y) - \log(\cos x)$$

满足极小曲面的方程 (见图 3)。

一般来说, 方程可写成

$$z = g(x) + h(y)$$

的曲面叫做**平移曲面**。Scherk 证明平移曲面中的极小曲面只有上列形状。

此曲面的定义域是 $\cos x, \cos y$ 同号的地方。把 (x, y) 平面用两族平行线

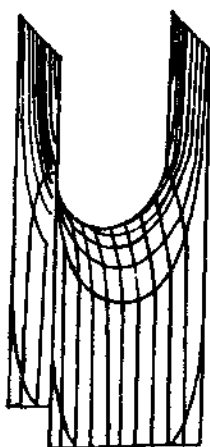


图 3

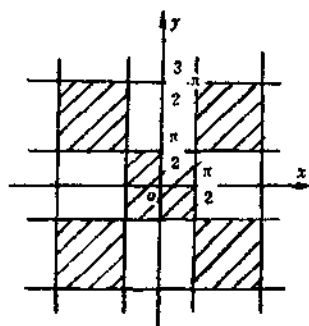


图 4

$$x = \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

分为正方格如图4, 其中的各黑正方格就是定义域。只在这上考虑的曲面也是完备极小曲面。Scherk 曲面的整体性质以及上述性质以后再论证。

Weierstrass-Enneper 公式和极小曲面的共形性有密切联系,但在阐述此问题前,先讲极小曲面与面积最小曲面间的著名关系.

§ 2. 面积最小的曲面

设 (D, φ) 为 M 的任意坐标邻域, V 为以 D 上的简单闭曲线 c 为边界的域. 可定义曲面片 $S = \{V, x|V\}$ 的面积为

$$(1.18) \quad A := \iint_V \sqrt{EG - F^2} \, du dv.$$

有另一个嵌入 $\tilde{x}(u, v)$ 以及曲面片 $\tilde{S} = \{V, \tilde{x}|V\}$, 但 $\tilde{x}(u, v) = x(u, v)$, $(u, v) \in c$. 现在假设 $A \leq \tilde{A}$. 即对于有相同边界的任意 $\tilde{S}$, S 的面积最小时, $x(u, v)$ 要受到什么限制呢? 用 $C^1(D)$ 表示 D 上的 C^1 级函数. 对于

$$\lambda(u, v) \in C^1(D), \quad \varepsilon \in \mathbb{R},$$

考虑

$$\tilde{x}_\varepsilon(u, v) = x(u, v) + \varepsilon \lambda(u, v) n(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

式中 $n(u, v)$ 为 $x(u, v)$ 的单位法向量. 通过计算知¹⁾

$$\tilde{E} = E - 2\varepsilon \lambda L + \varepsilon^2(\dots),$$

$$\tilde{F} = F - 2\varepsilon \lambda M + \varepsilon^2(\dots),$$

$$\tilde{G} = G - 2\varepsilon \lambda N + \varepsilon^2(\dots).$$

故得

$$(1.19) \quad \tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = (EG - F^2)(1 - 4\varepsilon \lambda H + \varepsilon^2 \Phi),$$

式中 Φ 是 u, v, λ 的连续函数; H 为 $x(u, v)$ 的平均曲率.

因为 S 为正则曲面²⁾, 所以 $EG - F^2$ 在 V 上取正的最小值. 由于其它系数在 D 上连续, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $|\lambda| < \varepsilon$ 时, $\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} > 0$. $\tilde{x}_\varepsilon$ 的面积

1) 详细讨论见苏步青等著《微分几何》(1979) p.120. (译者注)

2) 即 $x(u, v)$ 是浸入 (见 p. 2). (译者注)

$$A(\varepsilon) = \iint_{\tilde{V}} \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} du \cdot dv,$$

$A(0) = A$. 由 (1.19) 可见, 存在 $c > 0$ 使得

$$|\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} - \sqrt{EG - F^2} (1 - 2\varepsilon\lambda H)| < c\varepsilon^2.$$

故有 $c_1 > 0$ 使得

$$|A(\varepsilon) - A(0) + 2\varepsilon \iint_{\tilde{V}} \lambda H \sqrt{EG - F^2} du dv| < c_1 \varepsilon^2.$$

因此将 $A(\varepsilon)$ 看做 ε 的函数时, 在 $\varepsilon = 0$ 处存在 $A'(0)$ 并且

$$(1.20) \quad A'(0) = -2 \iint_{\tilde{V}} \lambda H d\sigma, \quad d\sigma = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

成立. (1.20) 叫做曲面的**第一变分公式**.

特别设 $\lambda(u, v) = 0$, $(u, v) \in c$, 则曲面 $\tilde{x}_\varepsilon$ 和 x 有相同边界 c . 若 x 面积最小, 则当 $|\varepsilon|$ 充分小时, $A(0) \leq A(\varepsilon)$. 因此 $A'(0) = 0$. 故由 (1.20) 得

$$(1.21) \quad \iint_{\tilde{V}} \lambda H d\sigma = 0.$$

由此式可导出 $H \equiv 0$. 原因是, 假设存在某个 $(u_0, v_0) \in V$ 使 $H|(u_0, v_0) \neq 0$. 因为 H 在 V 上是连续函数, 所以存在以 (u_0, v_0) 为圆心, 某半径 $\delta > 0$ 的开圆盘使得在此盘中 H 为正. 取有下列性质的 C^1 级函数 $\mu(t)$, $t \in [0, \infty)$, $\mu: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$: (1) $\mu(t) \geq 0$, (2) $\mu(0) = 1$, (3) $\mu(\delta) = 0$, (4) μ 为单调减小函数. 再取 $\lambda = \mu(\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2})$, 则 λ 在 V 的边界上为 0, $\iint_{\tilde{V}} \lambda H d\sigma > 0$, 得到矛盾; 于是 $H \equiv 0$. 即得

定理. 面积为最小的曲面是极小曲面.

1847 年左右, 比利时物理学家 J. Plateau (柏拉图) 观察到, 把金属丝作成的框架浸在肥皂水中拿出后形成的膜在表面张力作用下其面积最小. 由上述计算知, 肥皂泡张成的曲面全是极小曲面.

“已知 Jordan 曲线 Γ , 试用数学方法求以 Γ 为其边界而面积最小的曲面!” 叫做 **Plateau 问题**. 此问题中提出的存在定理于