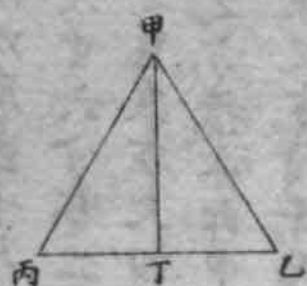


平三角

線面相求

凡三角形。立於圓界之一半者為直角。即勾股。過圓界之一半者為銳角。不及圓界之一半者為鈍角。然不拘銳角鈍角。自一角至底邊作垂線。即分為兩直角。是仍不離乎勾股也。兩腰等者。垂線即當底之一半。而兩腰不等者。所分底界。則有大小不同。故和較相比之法。因之而生。蓋和求較。較求和。要必歸於勾股相求之理。由勾股而得垂線。則凡面積及內容方圓等形。皆無不可得。茲為圖解。以次勾股。使與勾股相表裏焉。

設有等邊三角形。每邊十尺。求中垂線幾何。

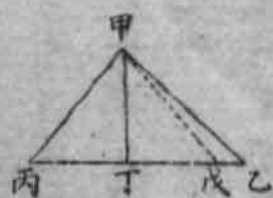


法以底邊十尺折半得五尺為勾。任以兩腰之一邊十尺為弦。勾弦求股。得八尺六寸六分零二豪有餘。即為中垂線也。如圖。甲乙丙三角形。其甲乙甲丙兩腰相等。自甲作垂線至丁。平分為兩直角三角形。而甲乙丁甲丙丁兩角之度相等。故所分之兩直角三角形。為同式形。又甲丁垂線。為兩三角形所共用之邊線。則所分底邊之乙丁丁丙亦等。故將乙丙

底邊折半為勾。任以甲乙丙兩邊之一邊為弦。求得股為中垂線也。

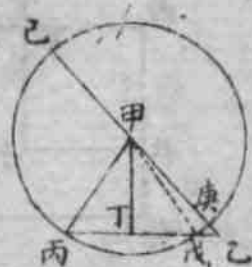
又法。以底邊十尺。折半得五尺。自乘得二十五尺。三因之得七十五尺。開方得八尺六寸六分零二豪有餘。即為中垂線也。蓋弦比勾大一倍。則弦之自乘方。必比勾之自乘方大四倍。故弦自乘方內。減勾自乘方。所餘勾自乘方三倍。即為股自乘之方積。亦即中垂線之自乘方積也。故將底邊折半自乘。三因之。即與中垂線自乘之方積等。而開方得中垂線也。

設有銳角三角形。大腰一百二十二尺。小腰一百一十二尺。底一百五十尺。求中垂線幾何。

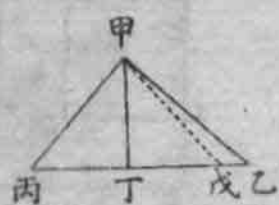


法以底一百五十尺為一率。大腰一百二十二尺。與小腰一百一十二尺相加。得二百三十四尺為二率。以大腰一百一十二尺。與小腰一百一十二尺相減。餘十尺為三率。求得四率十五尺六寸。為底邊之較。與底一百五十尺相減。餘一百三十四尺四寸。折半得六十七尺二寸為勾。以小腰一百一十二尺為弦。求得股八十九尺六寸。為中垂線也。如圖。甲乙

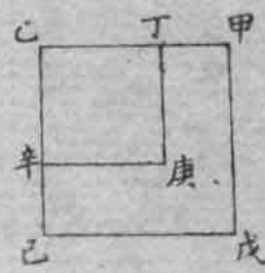
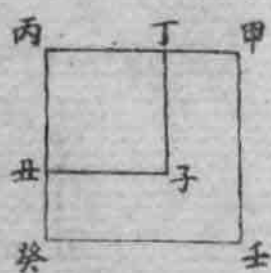
丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所求中垂線。試以甲為心。丙為界。作一圓。截甲乙大腰於庚。截乙丙底於戊。又將甲乙大腰引長至己。作甲



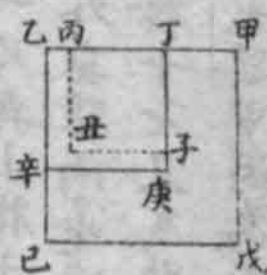
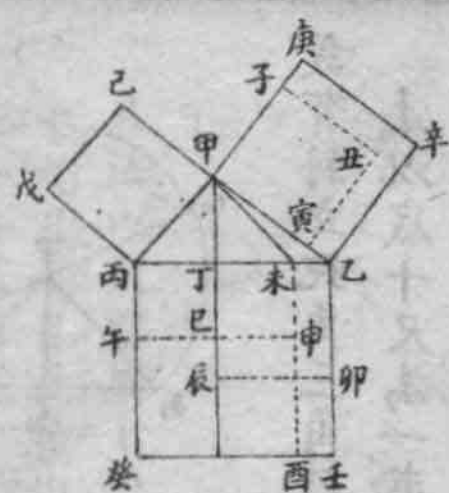
已線與甲丙小腰相等。則已乙為兩腰之和。庚乙為兩腰之較。蓋甲庚與甲丙等故。乙丙為底邊之和。乙戊為底邊之較。蓋丁庚乙為兩腰之較。丁戊等故。乙戊今以乙丙底邊之和與乙已兩腰之和為比。即為底邊之較。同於乙庚兩腰之較。與乙戊底邊之較為比。為轉比例之四率。故為一率。乙已為二率。乙庚為三率。求得四率為乙戊。既得乙戊。則於乙丙底邊內減去乙戊。餘戊丙。折半得丁丙為勾。甲丙為弦。求得股為甲丁中垂線也。



又法。以大腰一百二十二尺自乘。得一萬四千八百八十四尺。又以小腰一百一十二尺自乘。得一萬二千五百四十四尺。兩自乘數相減。餘二千三百四十尺。以底邊一百五十尺除之。得十五尺六寸為底邊之較。與底邊一百五十尺相減。餘一百三十四尺四寸。折半得六十七尺二寸為勾。以小腰一百一十二尺為弦。求得股八十九尺六寸為中垂線也。如圖。甲乙丙三角形。試自甲角作甲丁垂線。則分為甲丁乙。甲丁丙兩勾股形。甲乙甲丙皆為弦。乙丁丁丙皆為勾。共以甲丁為股。乙丙為兩勾之和。乙戊為兩勾之較。今以甲乙弦自乘。則成甲戊己乙方形。內丁庚辛乙為乙



丁勾自乘方形。於甲戌己乙方形內。減去丁庚辛乙方形。所餘
 甲戌己辛庚丁磬折形積。即與甲丁股自乘方相等。又以甲丙
 弦自乘。則成甲壬癸丙方形。內丁子丑丙為丁丙勾自乘方形。
 於甲壬癸丙方形內。減去丁子丑丙方形。所餘甲壬癸丑子丁
 磬折形積。亦與甲丁股自乘方相等。是則前圖之甲戌己辛庚
 丁磬折形。與後圖之甲壬癸丑子丁磬折形相等矣。若兩自乘
 之數相減。則如甲戌己乙方形內。減去與甲壬癸丑子丁磬折
 形相等之甲戌己辛庚丁磬折形。又減去丁子丑丙一小方形。
 所餘為子庚辛乙丙丑一小磬折形。引而長之。成一長方形。其
 長即乙丁與丁丙之和。其闊即乙丁與丁丙之較。故以乙丁與
 丁丙之和。除子庚辛乙丙丑磬折形之積。而得乙丁與丁丙之
 較也。又圖甲乙丙三角形。作甲丁垂線分為兩勾股形。共以甲
 丁垂線為股。故甲乙弦自乘方內。有甲丁股自乘一方。乙丁勾
 自乘一方。而甲丙弦自乘方內。有甲丁股自乘一方。丁丙勾自
 乘一方。今兩勾股形之股既同。則兩弦方相減所餘之數。即丙
 勾方相減所餘之數。故甲丁乙勾股形之甲乙弦自乘方內。減

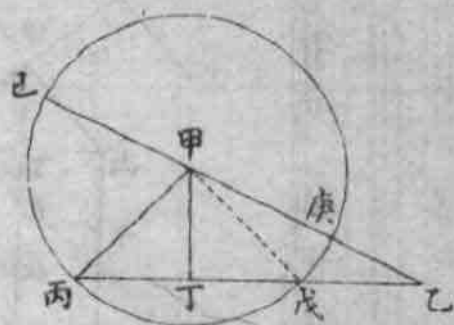


甲丁丙勾股形之甲丙弦自乘方。所餘庚辛乙寅丑子磬折形。即與甲丁乙勾股形之丁乙勾自乘方內。減甲丁丙勾股形之丁丙勾自乘方。所餘乙卯辰巳申未磬折形相等。若將乙卯辰巳申未磬折形。引而長之。遂成乙壬酉未長方形。其長即乙丁丁丙兩勾之和。其闊即乙丁丁丙兩勾之較。其積即乙丁丁丙兩勾方相減之餘。亦即甲乙甲丙兩弦方相減之餘。是以兩弦自乘相減之餘積。以兩勾之和除之。而得兩勾之較也。

設有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求中垂線幾何。

法以底二十一尺為一率。以大腰十七尺與小腰十尺相加。得二十七尺為二率。以大腰十七尺與小腰十尺相減。餘七尺為三率。求得四率九尺。為底邊之較。與底二十一尺相減。餘十二尺。折半得六尺為勾。以小腰十尺為弦。求得股八尺。為中垂線也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所求中垂線。試以甲為心。丙為界。作一圓。截甲乙大腰於庚。截乙丙底邊於戌。又將甲

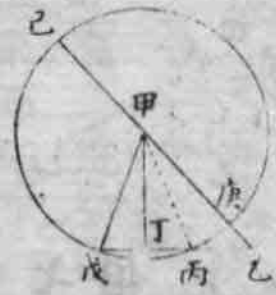
乙大腰引長至己。作甲己線。與甲丙小腰等。則己乙為兩腰之和。庚乙為兩腰之較。乙丙為底邊之和。乙戊為底邊之較。其乙丙與乙己之比。即同於庚乙與乙戊之比。為轉比例四率也。



又法。以大腰十七尺自乘。得二百八十九尺。又以小腰十尺自乘。得一百尺。兩自乘數相減。餘一百八十九尺。以底二十一尺除之。得九尺。為底邊之較。與底二十一尺相減。餘十二尺。折半得六尺。為勾。以小腰十尺為弦。求得股八尺。為中垂線也。圖解同前。

設有斜立鈍角三角形。大腰二十一尺。小腰十七尺。底十尺。求形外垂線幾何。

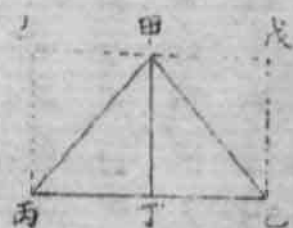
法以底十尺為一率。大腰二十一尺與小腰十七尺相減。餘四尺。為二率。大腰二十一尺與小腰十七尺相加。得三十八尺。為三率。求得四率十五尺二寸。為底與形外垂線兩邊連底之總。內減去底十尺。餘五尺二寸。折半得二尺六寸。為勾。以小腰十七尺為弦。求得股十六尺八寸。為形外垂線也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所求形外垂線。試以甲為心。丙為界。作一



圖。截甲乙大腰於庚。又將甲乙大腰引長至己。作甲己線。與甲丙小腰相等。復將乙丙底引長至戊。作乙戊線。則成甲乙戊三角形。其乙丙為底邊之和。乙戊為底邊之和。乙庚為兩腰之較。乙己為兩腰之和。自圖外至圖內。所作兩線之比例。既同於圖外兩段轉相比之比例。則圖外兩段之比例。亦必同於兩全線轉相比之比例。故乙丙與乙庚之比。即同於乙己與乙戊之比。既得乙戊。則減乙丙。餘丙戊。折半得丙丁為勾。甲丙為弦。求得股即甲丁垂線也。

又法。以大腰二十一尺自乘。得四百四十一尺。又以小腰十七尺自乘。得二百八十九尺。兩自乘數相減。餘一百五十二尺。以底十尺除之。得十五尺二寸。為底與形外垂線兩邊連底之總。內減底十尺。餘五尺二寸。折半得二尺六寸。為勾。以小腰十七尺為弦。求得股十六尺八寸。為形外垂線也。如圖甲乙丙三角形。將乙丙底引長至戊。自甲作垂線至丁。則丁戊與丁丙等。又自甲至戊作甲戊線。與甲丙小腰等。則成甲丁乙甲丁戊兩勾股形。甲乙甲戊皆為弦。乙丁丁戊皆為勾。共以甲丁為股。而乙丙為兩勾之較。乙戊為兩勾之和。前法以和求較。此法以較求和。其理一也。圖解並同前。

設有銳角三角形。兩腰俱五尺。底六尺。求面積幾何。

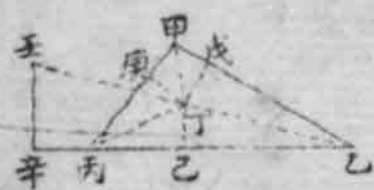


法先以底六尺折半得三尺為勾。任以兩腰之一邊五尺為弦。求得股四尺。為中垂線。與底六尺相乘。得二十四尺。折半得一十二尺。為三角面積也。如圖。甲乙丙三角形。以乙丙底邊與甲丁中垂線相乘。成戊乙丙已長方形積。比三角形積正大一倍。故折半得三角積也。

設有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求面積幾何。

法先用求中垂線法。求得中垂線八尺。與底二十一尺相乘。得一百六十八尺。折半得八十四尺。為三角面積也。

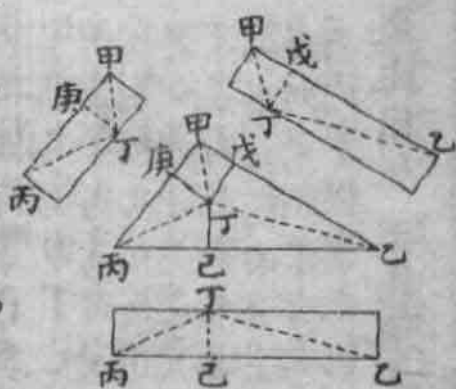
又法。以甲乙邊十七尺。乙丙邊二十一尺。甲丙邊十尺。三數相加。得四十八尺。為三邊之總。折半得二十四尺。為半總。以甲乙邊十七尺。與半總二十四尺相減。餘七尺。為甲乙邊與半總之較。以乙丙邊二十一尺。與半總二十四尺相減。餘三尺。為乙丙邊與半總之較。以甲丙邊十尺。與半總二十四尺相減。餘十四尺。為甲丙邊與半總之較。乃以半總二十四尺為一率。甲丙邊與半總之較十四尺為二率。乙丙邊與半總之較三尺。與甲乙邊與半總之較七尺相乘。得二十一尺。為三率。求得四率十二



尺二十五寸。開方得三尺五寸。為三角形自中心至三邊之垂線。與三邊之總四十八尺相乘。得一百六十八尺。折半得八十四尺。即三角形之面積。或以所得垂線二尺五寸。與半總二十四尺相乘。亦得八十四尺。為三角形之面積也。此法蓋一率二率以線與線為比。三率四率以面與面為比也。如甲乙丙三角形。自中心丁至三邊各作一垂線。又自中心丁至三角各作一分角線。即成六直角三角形。俱兩兩相等。丁己丙與丁庚丙等。丁己乙與丁庚甲等。又按甲戊度引乙丙線至辛。則乙辛為三邊之半總。即三較之和。乙己與乙戊等。即甲丙邊與半總之較。己丙與丙庚等。即乙丙邊與半總之較。試自辛作直角。將乙丁線引長。作一乙辛壬直角形。則壬辛與丁己平行。乙辛壬形與乙己丁形。遂為同式形。其乙辛與乙己之比。即同於壬辛與丁己之比。然乙辛一率。乙己二率之數雖有。而壬辛之數却無。又但知己丙與丙辛相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。故以己丙與丙辛相乘之數為三率。何以知己丙相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。試作壬丙線。壬癸線。使丙癸與丙辛等。癸角丙角皆為直角。癸丙辛角與辛壬癸角相合。共成一百八十度。然庚丙己角為癸丙辛角之外角。相合亦共成一百八十度。是庚丙己角與辛壬癸角等。庚丁己角與癸丙辛角等。是以壬癸丙辛形與丙庚丁己形為同式形。而丙辛壬勾股形與丁己丙勾股形亦為同式形。可互相七例矣。以丁己作一率。己丙二率。丙辛作三率。即得四率壬辛。是以己丙二率與丙辛三率相乘之數。即與丁己一率與壬辛四率相乘之數等。故直以己丙二率與丙辛三率相乘之數。即與丁己一率與壬辛四率相乘之數作三率也。其所得四率。即丁己自乘之數。是故乙辛與乙己之比。同於丁己與壬辛相乘之面。即己丙與丙辛相乘之面。與丁己自乘之面之比也。既得丁

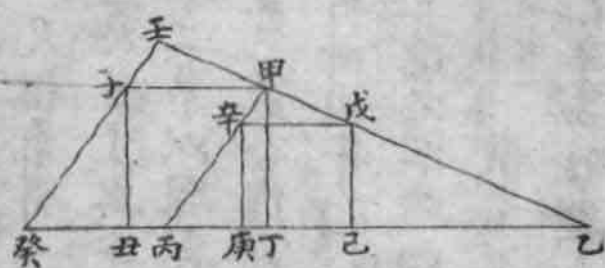
之比。同於丁己與壬辛相乘之面。即己丙與丙辛相乘之面。與丁己自乘之面之比也。既得丁

設有鈍角三角形。大腰三十七尺。小腰十五尺。底四十四尺。求內容正方邊幾何。

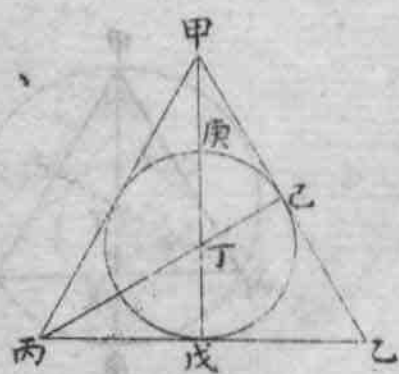


已自乘之面故開方而得丁己。為三角形自中心至三邊之垂線。與丁戊丁庚俱相等。又即三角形容圍之半徑也。既得自中心至三邊之垂線。則用垂線與三邊之總相乘。所得一長方積。即如用垂線與三邊各相乘。比三角形積大一倍。故折半而得三角形之面積。如以垂線與三邊半總相乘。即與三角形積等。而不用折半矣。

法先用求中垂線法。求得中垂線十二尺。與底邊四十四尺相加。得五十六尺為一率。中垂線十二尺為二率。底邊四十四尺為三率。推得四率九尺四寸二分八釐五豪有餘。即三角形內所容正方之一邊也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為大腰。甲丙為小腰。乙丙為底。甲丁為所得中垂線。戊己庚辛為今所求內容正方形。試依甲丁中垂線度。將乙丙線引長。作乙癸線。為五十六尺。又與甲丙線平行。作壬癸線。又將甲乙線引長。作壬乙線。則成與甲乙丙同式之壬乙癸三角形。復與底線平行。作甲子線。與丙癸等。即與甲丁垂線等。又與甲

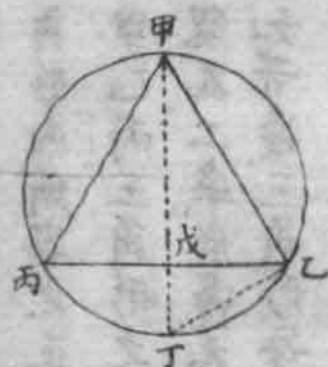
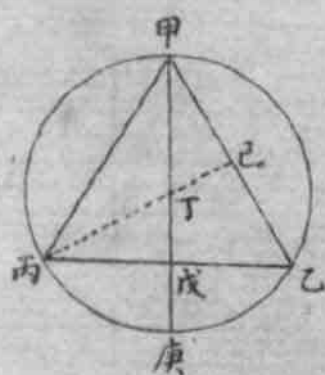


丁平行作于丑線。與甲丁等。則甲丁垂線所作甲丁丑子正方形。即為壬乙癸二角形內所容之正方形矣。故壬乙癸三角形之乙癸底。與甲丁方邊之比。即同於甲乙丙三角形之乙丙底。與戊己方邊之比。故中垂線與底邊相加為一率。中垂線為二率。底邊為三率。推得四率。為內容正方形之一邊也。
 設如等邊三角形。每邊一尺二寸。求內容圓徑幾何。



法先用求中垂線法。求得中垂線一尺零三分九釐二豪有餘。以三歸之。得三寸四分六釐四豪有餘。即內容圓形半徑。倍之得六寸九分二釐八豪有餘。即內容圓形全徑也。如圖。甲乙丙三角形。內容丁圓形。先求得甲戊中垂線。又自丙角至甲乙線界。作丙己垂線。與甲戊中垂線相交於丁。即三角形之中心。亦即內容圓形之中心。故丁戊與丁己。即內容圓形之半徑。又甲戊乙甲己丁兩勾股形為同式形。甲乙為乙戊之二倍。則甲丁亦必為丁己或丁戊之二倍。丁戊既為內容圓形之半徑。則甲丁即為內容圓形之全徑。而甲戊中垂線。必為丁戊半徑之三倍矣。故求得甲戊中垂線。以三歸之。得丁戊。即內容圓形之半徑。倍之得庚戊。即內容圓形之全徑也。

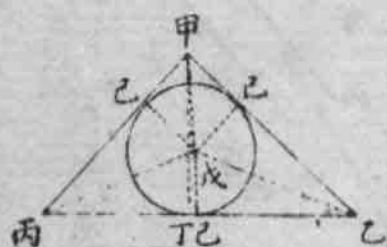
設如等邊三角形。每邊一尺二寸。求外切圓徑幾何。



法先用求中垂線法。求得中垂線一尺零三分九釐二豪有餘。三歸四因。得一尺三寸八分五釐六豪有餘。即外切圓形全徑也。如圖。甲乙丙三角形。外切丁圓形。先求得甲戊中垂線。又自丙角至甲乙線界。作丙己垂線。與甲戊中垂線相交於丁。即三角形之中心。亦即外切圓形之中心。故甲丁與丙丁。即外切圓形之半徑。又甲戊乙甲己丁兩勾股形為同式形。甲乙為乙戊之二倍。則甲丁亦必為丁己或丁戊之二倍。甲丁既為外切圓形之半徑。則為甲戊中垂線三分之二。而甲戊中垂線。却為甲庚全徑四分之三矣。故求得甲戊中垂線。三歸四因。得甲庚。即外切圓形之全徑也。

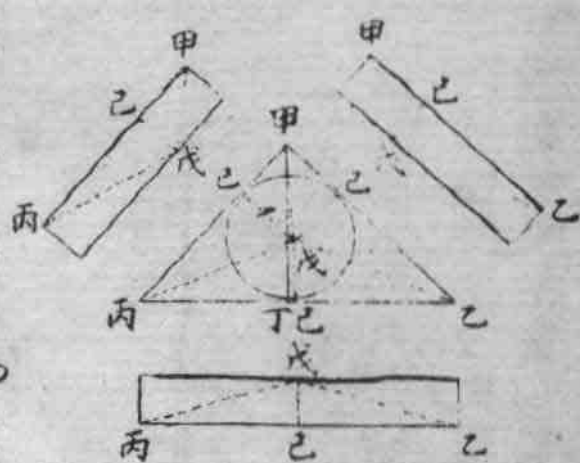
又法。以每邊一尺二寸自乘。三歸四因。開方得一尺三寸八分五釐六豪有餘。即外切圓形全徑也。如圖。甲乙丙三角形。外切甲丁乙丙圓形。試自甲角作甲戊中垂線。又引長作甲丁全徑線。復自丁至乙作丁乙線。遂成甲乙丁甲戊乙兩勾股形。為同式形。甲乙既為乙戊之二倍。則甲丁亦必為乙丁

之二倍故甲丁自乘方比乙丁自乘方大四倍。若依句弦求股之法言之。則甲丁弦自乘方內減乙丁句自乘方。所餘為甲乙股自乘之方。今甲丁弦自乘方。既為乙丁句自乘方之四倍。則是甲乙每邊自乘方。為甲丁全徑自乘方四分之三矣。故以一邊自乘。三歸四因。即與全徑自乘方等。而開方得外切圓形之全徑也。設有銳角三角形。大腰三百三十八尺。小腰三百尺。底四百一十八尺。求內容圓徑幾何。

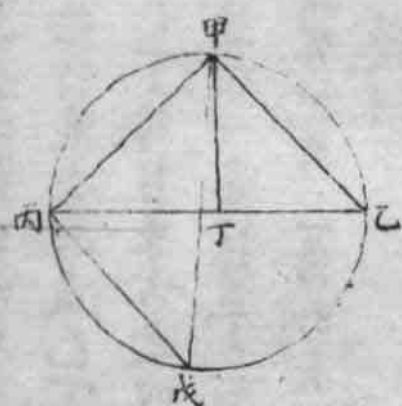


法先用求中垂線法。求得中垂線二百四十尺。與底四百一十八尺相乘。得一十萬零三百二十尺。以大腰三百三十八尺。小腰三百尺。底四百一十八尺。三數相加。得一千零五十六尺。除之得九十五尺。即內容圓半徑。倍之得一百九十尺。即內容圓全徑也。如圖。甲乙丙三角形。內容戊圓形。試自圓之中心至甲乙丙三角。各作戊甲戊乙戊丙三線。遂分甲乙丙三角形。為甲戊乙甲戊丙乙戊丙三三角形。其三邊皆為三角形之底。而戊已半徑。皆為三角形之垂線。今乙丙底邊與甲丁中垂線相乘所得之長方積。原比甲乙丙三角形積大一倍。即如將所分三三角形。各用垂線乘底邊所得之三

三長方積。合為一長方也。三長方之長雖不同。而闊則一。故各以長除積而得闊者。即如合三角形之三邊。除三角形之倍積。而得半徑也。



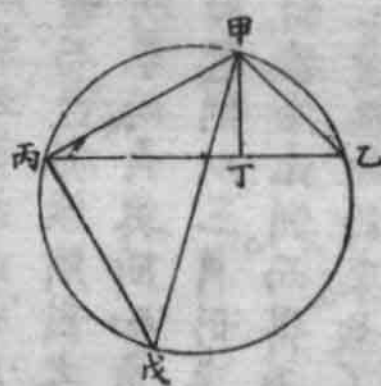
設有銳角三角形。大腰一百八十三尺。小腰一百六十八尺。底二百二十五尺。求外切圓徑幾何。



法用求中垂線法。求得中垂線一百三十四尺四寸為一率。小腰一百六十八尺為二率。大腰一百八十三尺為三率。推得四率二百二十八尺七寸五分。即外切圓徑也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為小腰。甲丙為大腰。乙丙為底。甲丁為中垂線。試作切三角一圓。自甲角至圓對界。作甲戊全徑線。又自丙角至戊作丙戊線。則甲丙戊三角形之丙角。立於圓界之半。必為直角。與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等。

而戊角與乙角皆對甲丙弧其度又等。故甲丙戊與甲丁乙兩三角形為同式形。是以甲丁與甲乙之比。同於甲丙與甲戊之比也。

設有鈍角三角形。大腰十七尺。小腰十尺。底二十一尺。求外切圓徑幾何。



法用求中垂線法。求得中垂線八尺為一率。小腰十尺為二率。大腰十七尺為三率。推得四率二十一尺二寸五分。即外切圓徑也。如圖。甲乙丙三角形。甲乙為小腰。甲丙為大腰。乙丙為底。甲丁為中垂線。試作切三角一圓。自甲角至圓對界作甲戊全徑線。又自丙角至戊作丙戊線。則甲丙戊三角形之丙角。立於圓界之一半。必為直角。與甲丁垂線所分甲丁乙三角形之丁角等。而戊角與乙角皆對甲丙弧。其度又等。故甲丙戊與甲丁乙兩三角形為同式形。是以甲丁與甲乙之比。同於甲丙與甲戊之比也。

邊角相求

三角形有直角者為勾股。無直角者作中垂線。分為兩直角形。則亦成兩勾股。是皆有其二而得其一。或有其三而分為二。概以邊線相求者也。至於割圓之法。則凡三角形。有一角即有八線。皆成勾股。詳見割圓術中而可比例以相求。故三角形不論角之直

與銳鈍。要以角度為準。而三角之度必與兩直角之度等。角之大者。所對之邊亦大。角之小者。所對之邊亦小。凡三角三邊。但知其三而其餘者悉可得。若直角。則惟知其二而其餘者亦可得。此三角之法所由立。而測量之用所由廣也。如知兩角一邊。求又一邊者。以對所知之角與對所求之角為比。即如所知之邊與所求之邊為比也。知兩邊一角。求又一角者。以對所知之邊與對所求之角為比。即如所知之角與所求之角為比也。或所知之一角。在所知兩邊之間。而求又一角者。則角無所對之邊。而邊亦無所對之角。必用兩邊之和較。與所知角之外角半弧之切線為比。而得所求兩角與所知角之外角半弧之較。既得較。而角度亦得矣。又如知三邊而求三角者。則以三角形中垂線法。分為兩直角形。而三角自隨之而得。或用三邊之方面。按法比例。而得兩直角形之各一角。既得一角。而三角亦可得矣。若止有三角。則三邊無所約束。故不成法。蓋角度為虛率。而邊線為實數。有實數而虛率可取。總以比例四率展轉用之。惟在分合有法。相度得宜耳。

設如甲乙丙直角三角形。乙為直角。知丙角五十七度。丙乙邊五丈。求甲乙邊幾何。

丙

法以丙角五十七度。與象限九十度相減。餘三十三度。為甲

角。乃以甲角為對所知之角。其正弦五萬四千四百六十四

為一率。丙角為對所求之角。其正弦八萬三千八百六十七

